Молекулы α-аланина несколько больше молекул глицина, и встраивание их в решетку приводит к возникновению дополнительных локальных полей механических напряжений. Поэтому темный контраст дают полосы с примесью. Ширина полос TGS составила 200–250 мкм, TGS+LATGS – 150–200 мкм. Здесь также возможно наблюдать макроскопические области различного контраста.

Заключение. Таким образом, СМП-изображения являются наиболее информативными для выявления ростовой примесной структуры как для полидоменных так и монодоменных неоднородных кристаллов TGS.

1. Shi-Ning Zhu, Yong-Yuan Zhu, Nai-Ben Ming . Ferroelectric Superlattice: Materials and Applications. Review// Phase Transitions. (2000).- Vol.72.-P. 239-298.

2. Ban Z.-G., Alpay S. P., Mantese J. V. Phys. Rev. 2003. B 67. P. 184104. DOI:https://doi.org/10.1103/PhysRevB.67.184104.

3. Scanning capacitance microscopy of TGS − TGS + Cr ferroelectric crystals / R. V. Gainutdinov [et al.], I. F. Kashevich [et al.] // Ferroelectrics. – 2019. – Vol. 541. – P. 39–46.Gainutdinov R.V., Belugina N.V., Lashkova A.K. et al. Ferroelectrics. 2019. V. 541. Issue 1. P. 39. https://doi.org/10.1080/00150193.2019.1574640

О СТРУКТУРАХ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ ОТ РЕЗУЛЬТАНТА МНОГОЧЛЕНА С ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПРИ НАЛИЧИИ КРАТНЫХ КОРНЕЙ

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Теория построения явных аналитических формул для кратных корней полиномов является молодым и актуальным направлением в алгебре полиномов. До появления современных компьютеров получение точных символьных выражений значения кратного корня через коэффициенты было практически невозможным из-за большой громоздкости вычислений. Одной из первых известных опубликованных работ, в которой упоминается информация о точном методе нахождения корня кратности 2 для алгебраического полинома произвольной степени, является книга И.М. Гельфанда, М.М. Капранова и А.В. Зелевинского [1]. В той работе представлены формулы, выражающие значение кратного корня в виде отношения частных производных первого порядка от дискриминанта полинома по коэффициентам данного полинома, но явных символьных формул для нахождения кратного корня полиномов конкретных степеней не имеется. Авторам настоящего доклада удалось усовершенствовать алгоритм построения формул для кратных корней, что позволило получать нужные аналитические формулы в более компактном виде, чем, например, по теории из работы [1]. Первые результаты в этом направлении были опубликованы в статье [2]. Цель исследования – провести анализ частных производных третьего порядка от результанта полинома со своей первой производной, на основе чего обосновать семейство формул, выражающих значение корня кратности 3 в виде рациональных функций от коэффициентов.

Материал и методы. Материалом исследования являются алгебраические полиномы комплексного аргумента, имеющие кратный корень некоторой кратности, а также структура результанта многочлена со своей производной. Методы исследования – методы математического анализа и алгебры с применением системы компьютерной математики *Maple* 2022.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим два полинома комплексного аргумента вида $f(z)=a_0\prod_{i=1}^{n}(z-\alpha_i)$ и $g(z)=b_0\prod_{j=1}^{m}(z-\beta_j)$.

Напомним, что выражение $R=a_0^m b_0^n\cdot\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)$ называется *результантом* полиномов f и g. Это рассматриваемое выражение можно представить в виде [3; с. 336]:

$$R=a_0^m g(\alpha_1)g(\alpha_2)\cdot\ldots\cdot g(\alpha_n)=(-1)^{mn}b_0^n f(\beta_1)f(\beta_2)\cdot\ldots\cdot f(\beta_m). \qquad (1)$$

В терминах коэффициентов полиномов выражение (1) имеет вид определителя, который называют *формулой Сильвестра* (в ячейках определителя, где оставлены пустые поля, подразумеваются нули):

$$R=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n & & \\ & a_0 & a_1 & \ldots & a_n & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_m & & \\ & b_0 & b_1 & \ldots & b_m & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & b_0 & b_1 & \ldots & b_m \end{vmatrix}\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \end{matrix}$$

Пусть $a_0=1$. Тогда согласно (1) рассмотрим результант многочлена f со своей первой производной g (с точностью до постоянного множителя) в виде $R=g_1g_2\ldots g_{n-1}g_n=g_1g_2g_3\cdot\prod_{m=4}^{n}g_m$, где

$$g_i\equiv b_0z_i^{n-1}+b_1z_i^{n-2}+\ldots+b_{n-2}z_i+b_{n-1}=\sum_{j=0}^{n-1}b_jz_i^{n-1-j} \text{ –}$$

значение производной на i-м корне многочлена.

Тогда $\dfrac{\partial g_i}{\partial b_j}=z_i^{n-1-j}$ $(j=0,1,\ldots,n-1)$, $R=g_1g_2g_3\prod_{m=4}^{n}g_m$.

$$\frac{\partial R}{\partial b_j}=\frac{\partial}{\partial b_j}(g_1g_2g_3)\cdot\prod_{m=4}^{n}g_m+g_1g_2g_3\cdot\frac{\partial}{\partial b_j}\prod_{m=4}^{n}g_m.$$

В случае наличия корня кратности 3 $z_1=z_2=z_3=w$. Для уменьшения громоздкости записи будем подставлять эти значения в $\partial R/\partial b_j$ сразу по мере их возникновения. Это не повлияет на результат последующих дифференцирований.

$$\frac{\partial R}{\partial b_j} = w^{n-1-j}\left(g_2 g_3 + g_1 g_3 + g_1 g_2\right)\cdot \prod_{m=4}^{n} g_m + g_1 g_2 g_3 \cdot \frac{\partial}{\partial b_j}\prod_{m=4}^{n} g_m .$$

Далее вторые производные $\frac{\partial^2 R}{\partial b_j \partial b_k} = w^{n-1-j}\prod_{m=4}^{n} g_m \cdot \frac{\partial}{\partial b_k}\left(g_2 g_3 + g_1 g_3 + g_1 g_2\right) +$

$$+w^{n-1-j}\left(g_2 g_3 + g_1 g_3 + g_1 g_2\right)\frac{\partial}{\partial b_k}\prod_{m=4}^{n} g_m + \frac{\partial}{\partial b_k}\left(g_1 g_2 g_3\right)\cdot \frac{\partial}{\partial b_j}\prod_{m=4}^{n} g_m + g_1 g_2 g_3 \frac{\partial^2}{\partial b_j \partial b_k}\prod_{m=4}^{n} g_m =$$

$$= w^{n-1-j}\cdot 2w^{n-1-k}\left(g_1 + g_2 + g_3\right)\prod_{m=4}^{n} g_m + w^{n-1-j}\left(g_2 g_3 + g_1 g_3 + g_1 g_2\right)\frac{\partial}{\partial b_k}\prod_{m=4}^{n} g_m +$$

$$+w^{n-1-k}\left(g_2 g_3 + g_1 g_3 + g_1 g_2\right)\cdot \frac{\partial}{\partial b_j}\prod_{m=4}^{n} g_m + g_1 g_2 g_3 \cdot \frac{\partial^2}{\partial b_j \partial b_k}\prod_{m=4}^{n} g_m .$$

В случае наличия корня кратности 3 $g_1 = g_2 = g_3 = 0$, поэтому все частные производные первого и второго порядков от результанта равны нулю.

Вычислим третьи производные от результанта.

$$\frac{\partial^3 R}{\partial b_j \partial b_k \partial b_l} = \frac{\partial}{\partial b_l}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial b_j \partial b_k}\right) = 2\cdot 3\cdot w^{3(n-1)-(j+k+l)}\cdot \prod_{m=4}^{n} g_m +$$

$$+2w^{2(n-1)-(j+k)}\left(g_1 + g_2 + g_3\right)\cdot \frac{\partial}{\partial b_l}\prod_{m=4}^{n} g_m + 2w^{2(n-1)-(j+l)}\left(g_1 + g_2 + g_3\right)\cdot \frac{\partial}{\partial b_k}\prod_{m=4}^{n} g_m +$$

$$+w^{n-1-j}\left(g_2 g_3 + g_1 g_3 + g_1 g_2\right)\cdot \frac{\partial^2}{\partial b_k \partial b_l}\prod_{m=4}^{n} g_m + 2w^{2(n-1)-(k+l)}\left(g_1 + g_2 + g_3\right)\cdot \frac{\partial}{\partial b_j}\prod_{m=4}^{n} g_m +$$

$$+w^{n-1-k}\left(g_2 g_3 + g_1 g_3 + g_1 g_2\right)\cdot \frac{\partial^2}{\partial b_j \partial b_l}\prod_{m=4}^{n} g_m + \frac{\partial}{\partial b_l}\left(g_1 g_2 g_3 \cdot \frac{\partial^2}{\partial b_j \partial b_k}\prod_{m=4}^{n} g_m\right).$$

В случае наличия корня кратности 3 $g_1 = g_2 = g_3 = 0$, поэтому окончательно получаем

$$\frac{\partial^3 R}{\partial b_j \partial b_k \partial b_l} = 2\cdot 3\cdot w^{3(n-1)-(j+k+l)}\prod_{m=4}^{n} g_m \quad \left(j,k,l = 0,1,\ldots,n-1\right).$$

Последний результат для наглядности удобно представлять в виде последовательности n матриц из частных производных третьего порядка, в первой из которых содержатся частные производные по b_0 от всех частных производных от результанта второго порядка, во второй – частные производные по b_1, и так далее. Например, пусть $n = 4$. Тогда, например, четвертая матрица примет вид:

$$D_{b_3} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^3 R}{\partial b_0^2 \partial b_3} & \frac{\partial^3 R}{\partial b_0 \partial b_1 \partial b_3} & \frac{\partial^3 R}{\partial b_0 \partial b_2 \partial b_3} & \frac{\partial^2 R}{\partial b_0 \partial b_3^2} \\ \frac{\partial^3 R}{\partial b_1 \partial b_0 \partial b_3} & \frac{\partial^3 R}{\partial b_1^2 \partial b_3} & \frac{\partial^3 R}{\partial b_1 \partial b_2 \partial b_3} & \frac{\partial^3 R}{\partial b_1 \partial b_3^2} \\ \frac{\partial^3 R}{\partial b_2 \partial b_0 \partial b_3} & \frac{\partial^3 R}{\partial b_2 \partial b_1 \partial b_3} & \frac{\partial^3 R}{\partial b_2^2 \partial b_3} & \frac{\partial^3 R}{\partial b_2 \partial b_3^2} \\ \frac{\partial^3 R}{\partial b_3 \partial b_0 \partial b_3} & \frac{\partial^3 R}{\partial b_3 \partial b_1 \partial b_3} & \frac{\partial^3 R}{\partial b_3 \partial b_2 \partial b_3} & \frac{\partial^3 R}{\partial b_3^3} \end{pmatrix} = 6g_4 \begin{pmatrix} w^6 & w^5 & w^4 & w^3 \\ w^5 & w^4 & w^3 & w^2 \\ w^4 & w^3 & w^2 & w \\ w^3 & w^2 & w & 1 \end{pmatrix}.$$

Заключение. Таким образом, аналитически в терминах значения кратного корня полинома установлена структура частных производных второго и третьего порядков от результанта многочлена произвольной степени со своей первой производной для случаев, когда заданный многочлен имеет кратность корня равна 2 или 3. Проведенный анализ позволяет строить последовательности из рациональных формул, выражающих значения кратного корня через коэффициенты полинома в случаях, когда остальные корни простые.

1. Gelfand, I.M. Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants / I.M. Gelfand, M.M Kapranov, A.V. Zelevinsky. – Boston : Birkhäuser, 1994. – 528 p.
2. Чернявский, М.М. Модификация формул Эйткена и алгоритмы аналитического нахождения кратных корней полиномов / М.М. Чернявский, Ю.В. Трубников // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2021. – № 1 (110). – С. 13–25. URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/26638 (дата обращения: 26.01.2023).
3. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры : учебник / А.Г. Курош. – 19-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2013. – 432 с.

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

В.В. Устименко, А.А. Молодечкина
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Тема «Логарифмические неравенства» является завершающей темой школьного курса алгебры, а также кульминационным моментом в изучении неравенств. На базовом уровне учащихся знакомят с решением логарифмических неравенств, опираясь на ныне действующий учебник алгебры, в котором даётся три метода их решения. На факультативных занятиях, в профильных математических классах школьникам показывают ещё один-два метода решения. Вместе с тем в методической литературе отсутствует полная картина того, что следует знать и уметь при изучении данной темы.

Цель исследования – определить методическую схему изучения логарифмических неравенств.

Материал и методы. Экспериментальный материал создан на основе учебников, учебных пособий для повторения и подготовки к централизованному тестированию, сборников задач по математике, опыта работы авторов со школьниками и предложен для практического использования в одиннадцатых классах ГУО «СШ №31 г. Витебска имени В.З. Хоружей» (учитель математики – А.Б. Яцковская). В ходе исследования были использованы эмпирические и логические методы.

Результаты и их обсуждение. Проведя подробный анализ научной и учебно-методической литературы, используя собственный подход мы пришли к выводу, что в изучении данной темы можно выделить следующие важные моменты:

Во-первых, повторяется и систематизируется материал, предшествующий изучению логарифмических неравенств: определение логарифма, свойства логарифмов, логарифмическая функция и её свойства, логариф-