годняшний день. Интернет старается учесть потребности каждого человека и подстроиться под всех. От распространения доступных сайтов выиграют не только люди со специальными потребностями, но и все пользователи интернета.

1. Web Content Accessibility Guidelines (WCAG) 2.0 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.w3.org/Translations/WCAG20-ru/ – Дата доступа: 31.01.2023
2. Интернет-ресурсы. Общие требования доступности для инвалидов по зрению : СТБ 2304-2013. – Введ. 01.09.2013 – Минск : Белорус. гос. ин-т стандартизации и сертификации, 2013. – 12 с.

САМОПОДОБНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ $\mathcal{G}_3\oplus\mathcal{R}$

М.Н. Подоксёнов
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Пусть в алгебре Ли $\mathcal{G}$ задано евклидово или лоренцево скалярное произведение. Линейное преобразование $f\colon \mathcal{G}\to\mathcal{G}$ называется *автоподобием*, если оно является одновременно автоморфизмом алгебры Ли и подобием относительно заданного скалярного произведения. Назовем алгебру Ли *самоподобной*, если она допускает однопараметрическую группу автоподобий, не являющуюся группой изометрий.

Задача построения самоподобных однородных многообразий группы Ли G, снабженной левоинвариантной лоренцевой метрикой g, предполагает первоначально решение задачи нахождения самоподобных алгебр Ли [1], а точнее нахождение такого скалярного произведения, при котором данные алгебры Ли будут самоподобными.

В данной работе мы рассмотрим четырёхмерные алгебры Ли вида $\mathcal{G}_4=\mathcal{G}_3\oplus\mathcal{R}$, где $\mathcal{G}_3$ – трехмерная алгебра Ли. Цель работы – показать, что все такие алгебры Ли являются самоподобными, при условии что $\mathcal{G}_3$ не является простой или полупростой.

Материал и методы. Рассматриваются четырёхмерные алгебры Ли вида $\mathcal{G}_4=\mathcal{G}_3\oplus\mathcal{R}$, снабженные лоренцевым скалярным произведением. Используются методы теории алгебр Ли и аналитической геометрии.

Результаты и их обсуждение. Согласно классификации, изложенной в обзоре Дж. Милнора [2], в размерности 3 существуют с точностью до изоморфизма, ровно одна простая и одна полупростая алгебры Ли. Все остальные являются разрешимыми (включая нильпотентную и коммутативную), и они содержат двумерный коммутативный идеал $\mathcal{L}$, который либо совпадает с производной алгеброй Ли $\mathcal{G}_3^{(2)}=[\mathcal{G}_3,\mathcal{G}_3]$, либо содержит $\mathcal{G}_3^{(2)}$. Соответственно, такой же идеал содержит алгебра Ли $\mathcal{G}_4=\mathcal{G}_3\oplus\mathcal{R}$. В $\mathcal{G}_4$ выберем базис (E_1,E_2,E_3,E_4), так что $E_2,E_3\in\mathcal{L}$, $E_4\in\mathcal{R}$. Любой такой базис будем называть каноническим. Обозначим $\mathcal{H}$ – линейную оболочку векторов $\langle E_2,E_3,E_4\rangle$. Тогда $\mathcal{H}$ – коммутативный идеал. Вектор E_1 действует на $\mathcal{H}$ с помощью преобразования $\mathrm{ad}(E_1)$ (по формуле $\mathrm{ad}(E_1)X = [E_1, X]$), причем ядро этого преобразования содержит E_4.

Теорема. **1.** *Пусть $\mathcal{G}_3$ – трехмерная алгебра Ли, не являющаяся простой или полупростой, а $\mathcal{G}_4 = \mathcal{G}_3 \oplus \mathcal{R}$. Тогда на $\mathcal{G}_4$ можно так задать лоренцево скалярное произведение, что данная алгебра Ли будет самоподобной. При этом необходимым условием является вырожденность скалярного произведения, индуцированного на идеале $\mathcal{H}$.*

2. *Если скалярное произведение задано помощью матрицы Грама в каноническом базисе*:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

то данная алгебра Ли допускает однопараметрическую группу подобий $F(t)$, действие которой в каноническом базисе задается матрицей

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$e^{\nu t}\mathrm{Q}(t)$}} & 0 \\ 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\nu t} \end{pmatrix}, \ \nu > 0\,, t \in \boldsymbol{R} \tag{2}$$

где $\mathrm{Q}(t)$ *– ортогональная матрица порядка 2* $(\det \mathrm{Q}(t) = 1)$, *которая, в зависимости от алгебры Ли $\mathcal{G}_3$, может быть единичной.*

Доказательство. Предположим, что в алгебре Ли задано лоренцево скалярное произведение, при котором на $\mathcal{H}$ индуцируется невырожденная метрика. Тогда под действием автоподобия $F: \mathcal{G}_4 \to \mathcal{G}_4$ идеал $\mathcal{H}$ должен оставаться инвариантным. Поэтому должно оставаться инвариантным его ортогональное дополнение. Мы можем выбрать $E_1 \in \mathcal{H}^{\perp}$, так что операция скобки не изменится. Если подобие отлично от изометрии, то $E_1' = F(E_1) = \alpha E_1$, $|\alpha| \neq 1$, и $\mathrm{ad}(E_1) = \alpha \cdot \mathrm{ad}(E_1)$. Это значит, данное преобразование не может быть автоморфизмом.

Предположим, теперь что на $\mathcal{H}$ индуцируется вырожденная метрика, при которой вектор E_4 является изотропным. Тогда на идеале $\mathcal{L}$ индуцируется положительно определенное скалярное произведение. Обозначим $\mathcal{P} = \mathcal{H}^{\perp}$. Это двумерное подпространство, которое содержит E_4, и на нем индуцируется лоренцево скалярное произведение (рисунок 1). Оно содержит два изотропных направления, одно из которых есть $\boldsymbol{R}E_4$.

Без изменения операции скобки мы можем выбрать E_1, принадлежащим второму направлению, а затем умножить этот вектор на такое число, что новый вектор (мы сохраним для него то же обозначение) будет обладать свойством $E_4 \cdot E_1 = 1$. Векторы E_2, E_3 можем выбрать в идеале $\mathcal{L}$ единичными и ортогональными. В итоге получаем матрицу Грама (1).

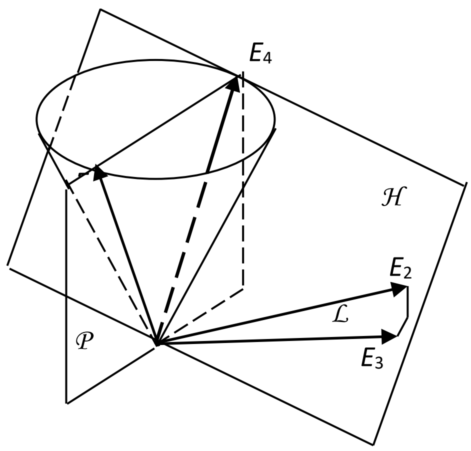

Рисунок 1

Нетрудно убедиться, что преобразования, которые действуют по формулам (2), являются подобиями и образуют однопараметрическую группу.

В частности, в алгебре Ли $\mathcal{G}_3 = \mathcal{E}(2)$ операция скобки задается равенствами $[E_1, E_2] = E_3$, $[E_1, E_3] = -E_2$. Для алгебры Ли $\mathcal{E}(2) \oplus \mathcal{R}$ матрица $Q(t)$ является произвольной, т.е. имеет вид $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Заметим, что сама по себе трехмерная алгебра Ли $\mathcal{E}(2)$ не может быть самоподобной при любом способе задания в ней скалярного произведения, и это показано в работе [3].

Заключение. Мы доказали, что любая четырехмерная алгебра Ли $\mathcal{G}_4 = \mathcal{G}_3 \oplus \mathcal{R}$ может быть самоподобной, при условии задания в ней подходящего лоренцева скалярного произведения (с помощью матрицы Грама (1) в каноническом базисе), но с дополнительным условием: $\mathcal{G}_3$ не является разрешимой или нильпотентной. Мы выписали действие однопарметрической группы автоподобий. Имея формулы (1) и (2) мы можем построить однородное самоподобное многообразие соответствующей четырехмерной группы Ли $\mathcal{G}_4 = G_3 \times \boldsymbol{R}^+$, снабженной левоинвариантной лоренцевой метрикой, но эту задачу необходимо решать, рассматривая различные группы Ли G_3 в отдельности.

1. Подоксёнов, М.Н. Подобия и изометрии однородного многообразия группы Гейзенберга, снабжённой левоинвариантной лоренцевой метрикой // Веснік Віцебскага дзяржаунага ун-та. 2011. №5. С.10-15. URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/4581 (дата обращения: 19.01.2023).

2. Milnor J. Curvaturies of left-invariant metrics on Lie groups // Adv. Math.–1976.–V.21–P.293–329.

3. Подоксёнов, М.Н. Гомотетические автоморфизмы трёхмерных алгебр Ли // Учёные записки УО «ВГУ им. П.М.Машерова». Сборник научных трудов. Том 8. Витебск: Изд-во ВГУ. – 2009. – С.203-211. URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/5125 (дата обращения: 19.01.2023).