1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Fisher, B. Injektoren endlicher auflosbarer Gruppen / B. Fisher, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Vol. 102. – P. 337–339.
3. Fisher, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Grouppen / B. Fisher. – Habilitationsschreft, Universität Frankfurt am Mainz, 1966.
4. Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.
5. Blessenohl, D. Fittingklassen endlicher Gruppen in denen gewisse Haupfaktoren einfach sind / D. Blessenohl, H. Laue // J. Algebra. – 1979. – Vol. 56, № 3. – P. 516–532.
6. Шеметков, Л. А. О подгруппах -разрешимых групп / Л.А. Шеметков // в кн.: Конечные группы. – Минск: Наука и техника. – 1975. – С. 207–212.
7. Шеметков, Л.А. Некоторые свойства инъекторов в конечных группах / Л.А. Шеметков // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 1999. – № 1 (15). – С. 5–13.
8. Shemetkov, L.A. Injectors in finite groups / L.A. Shemetkov // Izvestija Gomel'skogo gos. un-ta im. F. Skoriny. Voprosy algebry. – 2000. – № 3 (16). – P. 186–187.
9. Liu, Y.F. Description of $\mathfrak{F}$-injectors of finite soluble groups /Y.F. Liu, W. Guo, N.T. Vorob'ev // Math. Sci. Res. J. – 2008. – Vol. 12, № 1. – P. 17–22.
10. Guo, W. On injectors of finite soluble groups / W. Guo, N.T. Vorob'ev // Comm. Algebra. – 2008. – Vol. 36. – P. 3200–3208.
11. Yang, N. On $\mathfrak{F}$-injectors of Fitting set of a finite group / Yang N., Guo W., N.T. Vorob'ev // Communications in Algebra. – 2018. – Vol. 46, № 1. – P. 217–229.

О ХОЛЛОВСКИ ЗАМКНУТЫХ КЛАССАХ ФИТТИНГА

Н.Т. Воробьёв, Л.В. Иванова
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. В определениях и обозначениях мы следуем [1; 2].

В теории классов групп ряд исследований структуры классов разрешимых групп связаны с изучением классов Фиттинга, замкнутых относительно холловых подгрупп [3; 4]. В частности, Бризоном [4, теорема 3.5] в универсуме $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп в терминах решеточных объединений [5] и операторов Локетта [6] был доказан критерий холловски замкнутого класса Фиттинга. Скибой [2] было обобщено понятие холловой подгруппы и установлено существование и сопряженность таких подгрупп в частично разрешимых группах. *В связи с этим актуальна задача описания холловски замкнутых классов Фиттинга относительно обобщенных холловых подгрупп.* Решение указанной задачи – основная цель настоящей работы.

Материал и методы. *Классом групп* называют совокупность групп, которая наряду с каждой группой содержит ей изоморфную. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп из $\mathfrak{F}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется *нормально наследственным или классом, замкнутым относительно нормальных подгрупп*, если выполняется следующее требование: если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то $N \in \mathfrak{F}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется *замкнутым относительно произведений нормальных -подгрупп*, если выполняется следующее требование: если $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ и $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$, то $N_1N_2 \in \mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, тогда $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ – это класс Фиттинга, порожденный объединением $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}$, т.е. наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}$.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$, $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Обозначим $\pi(n)$ – множество всех простых делителей числа n. Подгруппа H группы G называется *π-подгруппой*, если |H| есть π-число, т.е. все простые делители |H| принадлежат π.

В работе мы используем метод исследования σ-свойств групп и классов Фиттинга.

Результаты и их обсуждение. Пусть $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ – разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел, $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Пусть $\Pi \subseteq \sigma$ и $\Pi' = \sigma \backslash \Pi$, $\sigma(n) = \{\sigma_i \,|\sigma_i \cap \pi(n) = \emptyset\}$ и $\sigma(\mathrm{G}) = \sigma(|\mathrm{G}|)$. Натуральное число n называется -числом, если $\pi(n) \subseteq \bigcup_{\sigma_i\in\Pi} \sigma_i$. Группа G называется σ-разрешимой, если каждый главный фактор H/K группы G является σ_i-группой для некоторого $i \in I$ [2].

Группу G называют Π-группой, если σ(G) ⊆ Π. Подгруппу H группы G называют *холловой Π-подгруппой* [2], если |H| – Π-число и индекс |G:H| является Π'-числом. Единичная подгруппа является холловой Π-подгруппой группы G, если |G| – Π'-число.

Пусть $\Pi \subseteq \sigma$. Символами $\mathfrak{S}_\Pi$ будем обозначать класс всех Π-разрешимых групп и $\mathfrak{S}_\sigma$ будем обозначать класс всех σ-разрешимых групп.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Тогда класс $\mathfrak{F}^*$ определяется как наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G\times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*}\times H_{\mathfrak{F}^*}$. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F}_*$ – пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$ [6].

Определение. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем холловски Π-замкнутым, если он замкнут относительно взятия холловых Π-подгрупп.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Обозначим через $\mathrm{K}_\Pi(\mathfrak{F})$ класс всех Π-разрешимых групп, холловы Π-подгруппы которых принадлежат $\mathfrak{F}$.

Основной результат работы – критерий холловски замкнутого класса Фиттинга в универсуме $\mathfrak{S}_\sigma$. Доказана следующая

Теорема. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ холловски Π-замкнут тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{F} = (\mathfrak{S}_\Pi \cap \mathfrak{F}) \vee (\mathrm{K}_\Pi(\mathfrak{F}_*) \cap \mathfrak{F}).$$

Следствие [4, теорема 3.5]. Пусть π – множество простых чисел и $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F}$ является холловски π-замкнутым тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{F} = (\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}) \vee (\mathrm{K}_\pi(\mathfrak{F}_*) \cap \mathfrak{F}).$$

Заключение. В работе получена характеризация холловских Π-замкнутых классов Фиттинга.

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Skiba A. N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // Journal of Algebra and Its Applications. – 2016. – Vol. 15. – № 05. – P. 1650085.
3. Brison O. J. Hall operators for Fitting classes / O. J. Brison // Arch. Math. (Basel). – 1979. – Vol. 33, № 1. – P. 1 – 9.
4. Brison O. J. A criterion for the hall-closure of fitting.classes / O. J. Brison // bull. Austral. Math. Soc. – 1981. – Vol. 23. – P. 361 – 365.
5. Cusack E. The join of two Fitting classes / E. Cusack // Math. Z. – 1979. – Bd. 167, № 1. – S. 37-47.
6. Lockett, P. The Fitting class F* / P. Lockett. – Math. Z. – 1974. – Vol. 137, № 2. – P. 131–136.