Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ – совокупность l_σ^∞-значных H_σ-функций, где f_j – некоторая H_σ-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_j$. Тогда символом $\vee_\sigma^\infty(f_j \mid j \in J)$ обозначается такая H_σ-функция f, что

$$f(\sigma_i) = l_\sigma^\infty \mathrm{fit}(\bigcup_{j\in J} f_j\,(\sigma_i)).$$

для всех i, если по крайней мере один из классов Фиттинга $f_j\,(\sigma_i) \neq \varnothing$. Если же $f_j\,(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $j \in J$, то предполагают $f(\sigma_i) = \varnothing$.

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ – совокупность l_σ^∞-значных H_σ-функций. Символом $\bigcup_{j\in J} f_j$ обозначается H_σ-функция f такая, что $f(\sigma_i) = \bigcup_{j\in J} f_j\,(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma$. Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ – совокупность всех l_σ^∞-значных H_σ-функций класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Таким образом, $f = \bigcup_{j\in J} f_j$ – H_σ-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда H_σ-функция f называется *минимальной l_σ^∞-значной H_σ-функцией класса Фиттинга* $\mathfrak{F}$ (см. [4]).

Основной результат работы – следующая

Теорема. *Пусть f_j – минимальная l_σ^∞-значная H_σ-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_j$. Тогда $\vee_\sigma^\infty(f_j \mid j \in J)$ – минимальная l_σ^∞-значная H_σ-функция класса Фиттинга* $\mathfrak{F} = \vee_\sigma^\infty(\mathfrak{F}_j \mid j \in J)$.

Заключение. В данной работе дано описание минимальной l_σ^∞-значной σ-функции Хартли порожденного тотально σ-локального класса Фиттинга.

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1978. – 272 с. – (Соврем. алгебра).
2. Скиба, А.Н. Кратно -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2., № 2. – С. 114–147.
3. Chi, Z. On *n*-multiply σ-local formations of finite groups/ Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2019. – Vol. 47, no. 3. – P. 957–968.
4. Guo, W. On σ-local Fitting classes / W. Guo, Li Zhang, N.T. Vorob'ev // J. Algebra. – 2020. – V. 546. – P. 116–129.
5. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

О ПРОБЛЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ И СОПРЯЖЕННОСТИ ИНЪЕКТОРОВ π-РАЗРЕШИМЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Н.Т. Воробёв, Е.Д. Волкова
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все рассматриваемые группы в настоящей работе конечны. В определениях и обозначениях следуем [1]. *Классом групп* называют совокупность групп, которая наряду с каждой своей группой содержит и все изоморфные ей группы. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он обладает следующими свойствами: 1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то $N \in \mathfrak{F}$; 2) если $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ и $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G = N_1N_2 \in \mathfrak{F}$.

В теории классов Фиттинга разрешимых групп, известен результат [2], который обобщает фундаментальные теоремы Силова и Холла: теорема Гашюца, Фишера и Хартли о существовании и сопряженности $\mathfrak{F}$-инъекторов в разрешимых группах для каждого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. При этом подгруппу V группы G называют *-инъектором*, если $V \cap N$ является максимальной из подгрупп $G \in \mathfrak{F}$ для любой $N \trianglelefteq\trianglelefteq G$. В последующем развитие методов локализации в теории групп привело к серии результатов [3–11], посвященных как обобщению теоремы Гащюца-Фишера-Хартли, так и нахождению характеризаций инъекторов в терминах радикалов и холловых подгрупп.

Л.А. Шеметковым в работе [6] было доказано, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в любой -разрешимой группе G (π – множество всех простых делителей группы G) существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены. В связи с этим актуальна *задача нахождения классов сопряженных инъекторов в -разрешимых группах без ограничения на множество* π. Решение указанной задачи для локального класса Фиттинга, определяемого постоянной функцией Хартли – основной результат настоящей работы.

Материал и методы. В работе материалом для исследования являются -инъекторы в π-разрешимых группах. При исследовании использованы терминология и методы абстрактной теории групп.

Результаты и их обсуждения. Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Группу G называют *-разрешимой*, если существует такой главный ряд группы G, в котором каждый главный фактор группы G является либо элементарной абелевой p-группой для $p \in \pi$, либо π'-группой. *Произведением* $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс групп $(G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$.

Всякое отображение вида $f : \to \mathbb{P}$ {классы Фиттинга} называется *функцией Хартли* или просто *Н-функцией*. Множество $\pi = \{p \in \mathbb{P} : f(p) \neq \emptyset\}$ называют *носителем* функции f.

Пусть $LR(f) = \mathfrak{E}_{\pi} \cap (\cap_{p \in \pi} f(p)\, \mathfrak{E}_p\, \mathfrak{E}_{p'})$, где $\mathfrak{E}_p$ и $\mathfrak{E}_{p'}$ – классы всех p-групп и всех p'-групп соответственно. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют [10] *локальным*, если $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой H-функции f.

Пусть f – H-функция, определяющая класс Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда f назовем:

1) *постоянной*, если $f(p) = f(q)$ для всех $p,q \in \pi$;

2) *полной*, если $f(p)\, \mathfrak{E}_p = f(p)$ для всех $p \in \pi$.

Основной результат работы представляет следующая

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F} = LR(f)$ – локальный класс Фиттинга, f – полная постоянная Н-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда в любой -разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены*.

Заключение. В настоящей работе нами доказано существование и сопряженность -инъекторов в любой π-разрешимой группе для локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
2. Fisher, B. Injektoren endlicher auflosbarer Gruppen / B. Fisher, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Vol. 102. – P. 337–339.
3. Fisher, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Grouppen / B. Fisher. – Habilitationsschreft, Universität Frankfurt am Mainz, 1966.
4. Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.
5. Blessenohl, D. Fittingklassen endlicher Gruppen in denen gewisse Haupfaktoren einfach sind / D. Blessenohl, H. Laue // J. Algebra. – 1979. – Vol. 56, № 3. – P. 516–532.
6. Шеметков, Л. А. О подгруппах -разрешимых групп / Л.А. Шеметков // в кн.: Конечные группы. – Минск: Наука и техника. – 1975. – С. 207–212.
7. Шеметков, Л.А. Некоторые свойства инъекторов в конечных группах / Л.А. Шеметков // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 1999. – № 1 (15). – С. 5–13.
8. Shemetkov, L.A. Injectors in finite groups / L.A. Shemetkov // Izvestija Gomel'skogo gos. un-ta im. F. Skoriny. Voprosy algebry. – 2000. – № 3 (16). – P. 186–187.
9. Liu, Y.F. Description of $\mathfrak{F}$-injectors of finite soluble groups /Y.F. Liu, W. Guo, N.T. Vorob'ev // Math. Sci. Res. J. – 2008. – Vol. 12, № 1. – P. 17–22.
10. Guo, W. On injectors of finite soluble groups / W. Guo, N.T. Vorob'ev // Comm. Algebra. – 2008. – Vol. 36. – P. 3200–3208.
11. Yang, N. On $\mathfrak{F}$-injectors of Fitting set of a finite group / Yang N., Guo W., N.T. Vorob'ev // Communications in Algebra. – 2018. – Vol. 46, № 1. – P. 217–229.

О ХОЛЛОВСКИ ЗАМКНУТЫХ КЛАССАХ ФИТТИНГА

Н.Т. Воробьёв, Л.В. Иванова
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. В определениях и обозначениях мы следуем [1; 2].

В теории классов групп ряд исследований структуры классов разрешимых групп связаны с изучением классов Фиттинга, замкнутых относительно холловых подгрупп [3; 4]. В частности, Бризоном [4, теорема 3.5] в универсуме $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп в терминах решеточных объединений [5] и операторов Локетта [6] был доказан критерий холловски замкнутого класса Фиттинга. Скибой [2] было обобщено понятие холловой подгруппы и установлено существование и сопряженность таких подгрупп в частично разрешимых группах. *В связи с этим актуальна задача описания холловски замкнутых классов Фиттинга относительно обобщенных холловых подгрупп.* Решение указанной задачи – основная цель настоящей работы.

Материал и методы. *Классом групп* называют совокупность групп, которая наряду с каждой группой содержит ей изоморфную. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп из $\mathfrak{F}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется *нормально наследственным или классом, замкнутым относительно нормальных подгрупп*, если выполняется следующее требование: если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то $N \in \mathfrak{F}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется *замкнутым относительно произведений нормальных -подгрупп*, если выполняется следующее требование: если $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ и $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$, то $N_1N_2 \in \mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, тогда $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ – это класс Фиттинга, порожденный объединением $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}$, т.е. наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}$.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$, $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Обозначим $\pi(n)$ – множество всех простых делителей числа n. Подгруппа H группы G