групп $f(G)$, называется [8] фиттинговым $\mathfrak{X}$-функтором, если выполняются следующие условия:

1) если α: $G \to \alpha(G)$ – изоморфизм, то

$$f(\alpha(G)) = \{\alpha(X): X \in f(G)\};$$

2) если N – нормальная подгруппа группы G, то

$$f(N) = \{X \cap N: X \in f(G)\}.$$

Фиттингов $\mathfrak{X}$-функтор назовем

1) сопряженным, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ множество $f(G)$ есть класс сопряженных подгрупп группы G;

2) удовлетворяющим аргументу Фраттини, если для любой $\mathfrak{X}$-группы G, подгруппы $M \in f(G)$ и нормальной подгруппы N группы G выполняется равенство $G = N_G(M \cap N)\, N$;

3) σ-разрешимым, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}_\sigma$.

Доказана

Теорема. Пусть f – σ-разрешимый сопряженный фиттингов функтор. Тогда функтор f удовлетворяет аргументу Фраттини.

1. Курош, А.Г. Радикалы колец и алгебр / А.Г. Курош // Матем. сб. – 1953. – Т. 33, № 1. – С. 13–26.
2. Amitsur, S.A. A general theory of radicals / S.A. Amitsur // Amer. J. Math. – 1952. – Vol. 74, № 4. – P. 774–786.
3. Amitsur, S.A. A general theory of radicals / S.A. Amitsur // Amer. J. Math. – 1954. – Vol. 76, № 1. – P. 100–125.
4. Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.
5. Плоткин, Б.И. Радикалы в группах, операции на классах групп и радикальные классы / Б.И. Плоткин // Избранные вопросы алгебры и логики : сб., посв. памяти А.И. Мальцева / АН СССР. Сиб. отд-ние, Ин-т математики ; под ред. А.И. Ширшова (гл. ред.). – Новосибирск : Наука, 1973. – С. 205–244.
6. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
7. Скиба, А.Н. О σ-свойствах конечных групп II / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 70–83.
8. Витько, Е. А. О теории фиттинговых функторов конечных групп / Е. А. Витько // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя П. М. Машэрава. – 2010. – № 2 (56). – С. 48–51. URL: https://rep.vsu.by/handle/123456789/4954 (дата обращения: 03.02.2023).

О МИНИМАЛЬНОЙ ЛОКАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ХАРТЛИ ПОРОЖДЕННОГО ТОТАЛЬНО σ-ЛОКАЛЬНОГО КЛАССА ФИТТИНГА

Н.Н. Воробьёв, И.И. Стаселько
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать терминологию из [1–5].

Основная цель настоящей работы – описание минимальной l_σ^∞-значной σ-функции Хартли порожденного тотально σ-локального класса Фиттинга.

Материал и методы. В работе используются методы теории классов конечных групп. В частности, методы теории локальных формаций и теории классов Фиттинга.

Результаты и их обсуждение. *Классом Фиттинга* называется класс групп $\mathfrak{F}$, который замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп из $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел. Символом $\pi(n)$ обозначают множество всех различных простых делителей целого числа n. Следуя Л.А. Шеметкову [1], символом σ обозначается некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$, $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Напомним, что для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$, где (1) – класс всех единичных групп, символом $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех нормальных подгрупп N таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Символами $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{G}_{\sigma_i'}$ обозначают соответственно класс всех σ_i-групп и класс всех σ_i'-групп. По аналогии с обозначениями работы [2] положим $F^{\sigma_i}(G) = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}}$ (см. также [3, 4]).

Пусть f – произвольная функция вида

$$f : \sigma \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}, \qquad (1)$$

называемая *σ-функцией Хартли* (или, более кратко, *H_σ-функцией*). Следуя [4] рассмотрим класс групп

$$LR_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } F^{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ для некоторой H_σ-функции f вида (1), то $\mathfrak{F}$ называется *σ-локальным классом Фиттинга*, а f – *σ-локальным заданием* класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ (см. [4]).

В работе [4] введено понятие кратно σ-локального класса Фиттинга: всякий класс Фиттинга считается *0-кратно σ-локальным*. При $n \geqslant 1$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *n-кратно σ-локальным*, если $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$, где каждое непустое значение $f(\sigma_i)$ H_σ-функции f является $(n-1)$-кратно σ-локальным классом Фиттинга. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *тотально σ-локальным*, если он является n-кратно σ-локальным для всех натуральных n (см. [4]).

Совокупность классов Фиттинга Θ называется *полной решеткой классов Фиттинга* [2], если классы $\varnothing$ и $\mathfrak{G}$ принадлежат Θ и пересечение любого множества классов из Θ снова принадлежит Θ. Относительно включения $\subseteq$ множество всех тотально σ-локальных классов Фиттинга l_σ^∞ образует полную решетку.

Символ $l_\sigma^\infty\text{fit}(\mathfrak{X})$ обозначает пересечение всех тотально σ-локальных классов Фиттинга, содержащих совокупность групп $\mathfrak{X}$. H_σ-Функция f называется *l_σ^∞-значной*, если каждое ее непустое значение принадлежит решетке l_σ^∞.

Пусть $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ – непустая совокупность тотально σ-локальных классов Фиттинга. Следуя [5] будем полагать

$$\vee_\sigma^\infty(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = l_\sigma^\infty\text{fit}(\bigcup_{j\in J}\mathfrak{F}_j).$$

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ – совокупность l_σ^∞-значных H_σ-функций, где f_j – некоторая H_σ-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_j$. Тогда символом $\vee_\sigma^\infty(f_j \mid j \in J)$ обозначается такая H_σ-функция f, что

$$f(\sigma_i) = l_\sigma^\infty \mathrm{fit}(\bigcup_{j\in J} f_j\,(\sigma_i)).$$

для всех i, если по крайней мере один из классов Фиттинга $f_j\,(\sigma_i) \neq \varnothing$. Если же $f_j\,(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $j \in J$, то предполагают $f(\sigma_i) = \varnothing$.

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ – совокупность l_σ^∞-значных H_σ-функций. Символом $\bigcup_{j\in J} f_j$ обозначается H_σ-функция f такая, что $f(\sigma_i) = \bigcup_{j\in J} f_j\,(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma$. Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ – совокупность всех l_σ^∞-значных H_σ-функций класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Таким образом, $f = \bigcup_{j\in J} f_j$ – H_σ-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда H_σ-функция f называется *минимальной l_σ^∞-значной H_σ-функцией класса Фиттинга* $\mathfrak{F}$ (см. [4]).

Основной результат работы – следующая

Теорема. *Пусть f_j – минимальная l_σ^∞-значная H_σ-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_j$. Тогда $\vee_\sigma^\infty(f_j \mid j \in J)$ – минимальная l_σ^∞-значная H_σ-функция класса Фиттинга* $\mathfrak{F} = \vee_\sigma^\infty(\mathfrak{F}_j \mid j \in J)$.

Заключение. В данной работе дано описание минимальной l_σ^∞-значной σ-функции Хартли порожденного тотально σ-локального класса Фиттинга.

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1978. – 272 с. – (Соврем. алгебра).
2. Скиба, А.Н. Кратно -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2., № 2. – С. 114–147.
3. Chi, Z. On n-multiply σ-local formations of finite groups/ Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2019. – Vol. 47, no. 3. – P. 957–968.
4. Guo, W. On σ-local Fitting classes / W. Guo, Li Zhang, N.T. Vorob'ev // J. Algebra. – 2020. – V. 546. – P. 116–129.
5. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

О ПРОБЛЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ И СОПРЯЖЕННОСТИ ИНЪЕКТОРОВ π-РАЗРЕШИМЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Н.Т. Воробёв, Е.Д. Волкова
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

Все рассматриваемые группы в настоящей работе конечны. В определениях и обозначениях следуем [1]. *Классом групп* называют совокупность групп, которая наряду с каждой своей группой содержит и все изоморфные ей группы. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он обладает следующими свойствами: 1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$, то $N \in \mathfrak{F}$; 2) если $N_1, N_2 \lhd G$ и $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G = N_1N_2 \in \mathfrak{F}$.