Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2022. Том 63, № 6

УДК 512.542

О ПРИЗНАКАХ ДИСТРИБУТИВНОСТИ И МОДУЛЯРНОСТИ СЕМЕЙСТВ МНОЖЕСТВ ФИТТИНГА КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

Н. Т. Воробьёв, Е. Д. Волкова

Аннотация. Определены условия, при которых для множеств Фиттинга группы выполняются дистрибутивное и модулярное равенства.

DOI 10.33048/smzh.2022.63.605

Ключевые слова: множество Фиттинга, σ-локальное множество Фиттинга, дистрибутивное и модулярное равенства.

1. Введение

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными, если не оговорено противное. В терминологии и обозначениях мы следуем [1]. Множество $\mathscr{F}$ подгрупп группы G [2, 3] называют *множеством Фиттинга* G, когда выполняются следующие условия:

(1) если $T \trianglelefteq S \in \mathscr{F}$, то $T \in \mathscr{F}$;

(2) если $S, T \in \mathscr{F}$ и $S, T \trianglelefteq ST$, то $ST \in \mathscr{F}$;

(3) если $S \in \mathscr{F}$ и $x \in G$, то $S^x \in \mathscr{F}$.

Легко видеть, что совокупность всех множеств Фиттинга группы G, частично упорядоченная включением $\subseteq$, образует решетку, в которой $\mathscr{F} \cap \mathscr{H}$ — нижняя грань и $\mathscr{F} \vee \mathscr{H} = \mathrm{Fitset}(\mathscr{F} \cup \mathscr{H})$ — верхняя грань для любой пары множеств Фиттинга $\mathscr{F}$ и $\mathscr{H}$ группы G. Здесь символом $\mathrm{Fitset}(\mathscr{F} \cup \mathscr{H})$ обозначено множество Фиттинга G, порожденное объединением $\mathscr{F} \cup \mathscr{H}$, т. е. $\mathrm{Fitset}(\mathscr{F} \cup \mathscr{H})$ — пересечение всех тех множеств Фиттинга G, которые содержат $\mathscr{F} \cup \mathscr{H}$.

Заметим, что в теории классов групп для описания свойств решеток классов используется концепция кратной локализации, которая была впервые предложена в теории формаций А. Н. Скибой и нашла приложения в вопросах классификации групп и их классов, а также для нахождения новых семейств решеток формаций групп (см. [4, гл. 4]). Указанная концепция была дуализирована при изучении локальных классов Фиттинга в [5]. Идея такой локализации получила дальнейшее развитие при изучении обобщенно локальных классов Фиттинга в [6].

До настоящего времени свойства решетки всех классов Фиттинга остаются малоисследованными: до сих пор неизвестно, является ли решетка таких классов даже в разрешимом случае модулярной [7, вопрос 14.47], хотя А. Н. Скибой

Исследование выполнено в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция–2025» (№ ГР 20210495).

и Н. Н. Воробьёвым [8, теорема], а также независимо Рейффершейд [9, теорема 2.2.14(в)] было доказано, что решетка всех тотально локальных классов Фиттинга (примитивных насыщенных формаций) разрешимых групп дистрибутивна. В теории классов Фиттинга известны также результаты Лауша [10] и Н. Т. Воробьёва и А. В. Марцинкевич [11] о том, что решетка всех разрешимых нормальных классов Фиттинга и решетка всех локально нормальных классов Фиттинга модулярны. Однако, как установлено нами в [12], такие решетки и решетка всех классов Фиттинга не дистрибутивны.

Исследованию решеток формационных фиттинговых множеств посвящена работа А. Н. Скибы [13]. Вместе с тем результаты по изучению свойств решеток семейств произвольных фиттинговых множеств группы до настоящего времени отсутствовали. В частности, остаются открытыми вопросы о том, *являются ли решетка всех множеств Фиттинга группы модулярной и решетка всех тотально локальных множеств Фиттинга разрешимой группы дистрибутивными.*

Поиск решения указанных вопросов приводит *к задаче описания семейств множеств Фиттинга группы, для которых справедливы дистрибутивное и модулярное равенства.* Решению такой задачи посвящена настоящая работа. Нами определены семейства множеств Фиттинга и семейства σ-локальных (в частности, локальных) множеств Фиттинга, для которых выполняются дистрибутивное и модулярное равенства (см. теоремы 4.2 и 4.5).

2. Предварительные сведения

Напомним, что *классом групп* называют всякую совокупность групп, содержащую вместе с каждой своей группой G все группы, изоморфные G. Группу, принадлежащую классу групп $\mathfrak{X}$, называют *$\mathfrak{X}$-группой.*

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп.

Пусть $\mathscr{F}$ — множество Фиттинга группы G и $\mathfrak{H}$ — класс Фиттинга. Тогда множество $\{S \leq G : S/S_{\mathscr{F}} \in \mathfrak{H}\}$ подгрупп G называют *произведением* $\mathscr{F}$ и $\mathfrak{H}$ и обозначают через $\mathscr{F} \odot \mathfrak{H}$. Если $\mathscr{F} = \varnothing$ или $\mathfrak{H} = \varnothing$, то полагают $\mathscr{F} \odot \mathfrak{H} = \varnothing$.

Лемма 2.1 [14, предложение 3.1]. *Если $\mathscr{F}$ — множество Фиттинга группы G и $\mathfrak{H}$ — класс Фиттинга, то произведение $\mathscr{F} \odot \mathfrak{H}$ является множеством Фиттинга G.*

Лемма 2.2 [14, предложение 3.4(3)]. *Если $\mathscr{F}$ — множество Фиттинга группы G, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}$ — классы Фиттинга, то $\mathscr{F} \odot (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}) = (\mathscr{F} \odot \mathfrak{H}) \cap (\mathscr{F} \odot \mathfrak{M})$.*

Лемма 2.3 [14, свойство 3.2(1)]. *Если $\mathscr{F}$ — множество Фиттинга группы G и $\mathfrak{H}$ — непустой класс Фиттинга, то $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F} \odot \mathfrak{H}$.*

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *гомоморфом*, если из $G \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G/N \in \mathfrak{F}$ для любой нормальной подгруппы N группы G. Если класс групп $\mathfrak{F}$ является одновременно гомоморфом и классом Фиттинга, то его называют *радикальным гомоморфом.*

Лемма 2.4 [14, предложение 3.4(1)]. *Если $\mathscr{F}$ и $\mathscr{H}$ — множества Фиттинга группы G, $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{H}$ и $\mathfrak{M}$ — непустой радикальный гомоморф, то $\mathscr{F} \odot \mathfrak{M} \subseteq \mathscr{H} \odot \mathfrak{M}$.*

Класс групп называется *формацией*, если он замкнут относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Если $\mathfrak{F}$ — непустая формация, то любая группа G имеет наименьшую нормальную подгруппу, фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$. Ее называют *$\mathfrak{F}$-корадикалом* G и обозначают через $G^{\mathfrak{F}}$.

Лемма 2.5 [6, лемма 2.1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — непустые формации. Если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{H}} \leq G^{\mathfrak{F}}$ для всех групп G.*

Напомним, что *произведением* $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ *двух классов групп* называют класс $(G : \exists N \trianglelefteq G,\ N \in \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{H})$; *произведением* $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ *формаций* $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс $(G : G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Если $\mathfrak{F}$ или $\mathfrak{H}$ — пустая формация, то полагают $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = \varnothing$. Хорошо известно, что произведение двух любых формаций является формацией и операция «$\circ$» ассоциативна на множестве всех формаций (см. [1, теорема IV.1.8(a),(c)]). Если формация $\mathfrak{F}$ замкнута относительно взятия нормальных подгрупп, то $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ (см. [1, с. 338]).

Лемма 2.6 [1, теорема IV.1.8(b)]. *Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — непустые формации, то $G^{\mathfrak{F}\circ\mathfrak{H}} = (G^{\mathfrak{H}})^{\mathfrak{F}}$ для всех групп G.*

Для каждого непустого множества Фиттинга $\mathscr{F}$ группы G любая подгруппа H группы G имеет наибольшую нормальную $\mathscr{F}$-подгруппу, которую называют *$\mathscr{F}$-радикалом* H и обозначают через $H_{\mathscr{F}}$.

Лемма 2.7 [1, предложение VIII.2.4(d)]. *Пусть $\mathscr{F}$ — непустое множество Фиттинга группы G. Если $N \trianglelefteq G$, то $N_{\mathscr{F}} = N \cap G_{\mathscr{F}}$.*

3. σ-Локальные множества Фиттинга группы и их свойства

В теории множеств Фиттинга группы мы развиваем σ-метод исследования строения групп и их классов, предложенный А. Н. Скибой (см. [13, 15, 16]).

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Символом $\pi(n)$ обозначим множество всех простых делителей числа n, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых делителей группы G. Пусть σ — некоторое разбиение $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, $\mathbb{P} = \bigcup\limits_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Следуя [6], всякое отображение вида $f : \sigma \to \{$ множество Фиттинга группы $G\}$ назовем *σ-функцией Хартли* группы G или просто *H_σ-функцией* G. Если f — H_σ-функция, то символом $\mathrm{Supp}(f)$ обозначают носитель f, т. е. множество всех σ_i таких, что $f(\sigma_i) \neq \varnothing$.

Пусть $LFS_\sigma(f) = \{S \leq G : S = 1$ или $S \neq 1$ и $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(S)\}$, где $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ — классы всех σ_i-групп и всех σ_i'-групп соответственно.

Определение 3.1. Множество Фиттинга группы G назовем *σ-локальным*, если $\mathscr{F} = LFS_\sigma(f)$ для некоторой H_σ-функции f. В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$, то $\mathscr{F}$ назовем *локальным* множеством Фиттинга G.

Заметим, что каждому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ соответствует множество $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G, т. е. $\{S \leq G : S \in \mathfrak{F}\}$, которое обозначают через $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}(G)$ и называют *следом* класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в группе G. Очевидно, $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}}(G)$ является множеством Фиттинга G, хотя обратное в общем случае неверно (см. [1, пример VII.2.2(c)]).

Примеры 3.2. (1) Множество Фиттинга, состоящее только из единичной подгруппы $\{1\}$ группы G, локально, т. е. $\{1\} = LFS_\sigma(f)$ для H_σ-функции f такой, что $f(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $i \in I$.

(2) Пусть $\mathscr{F} = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}(G)$ — множество Фиттинга всех σ_i-подгрупп группы G. Если $S \leq G$ и $S \in \mathscr{F}$, то $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in \mathscr{F}$ и $\mathscr{F} = LFS_\sigma(f)$ для H_σ-функции такой, что $f(\sigma_i) = \mathscr{F}$ и $f(\sigma_j) = \varnothing$ для всех $i \neq j$.

(3) Напомним, что группу G называют *σ-примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого $i \in I$, и *σ-нильпотентной* [15], если $G = G_1 \times \dots \times G_t$ для некоторых σ-примарных групп $G_1, \dots, G_t$. Пусть $\mathscr{X}$ — множество Фиттинга группы G, $\mathfrak{N}_\sigma$ — класс всех σ-нильпотентных групп, $\mathscr{X} \odot \mathfrak{N}_\sigma$ — произведение $\mathscr{X}$ и класса Фиттинга $\mathfrak{N}_\sigma$ и f — H_σ-функция такая, что $f(\sigma_i) = \mathscr{X}$ для всех i. Тогда по лемме 2.2

$$LFS_\sigma(f) = \bigcap_{\sigma_i} \mathscr{X} \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'} = \mathscr{X} \odot \Big(\bigcap_{\sigma_i} \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\Big) = \mathscr{X} \odot \mathfrak{N}_\sigma$$

и $\mathscr{X} \odot \mathfrak{N}_\sigma$ — σ-локальное множество Фиттинга группы G.

(4) Положим $\mathfrak{N}_\sigma^k = \underbrace{\mathfrak{N}_\sigma \dots \mathfrak{N}_\sigma}_{k}$ $(k \in \mathbb{N})$, $\mathfrak{N}_\sigma^0$ — класс групп порядка 1. Пусть $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{N}_\sigma^k}(G)$ — след класса Фиттинга $\mathfrak{N}_\sigma^k$ в группе G. Тогда $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{N}_\sigma^k}(G)$ — σ-локальное множество Фиттинга группы G с H_σ-функцией f такой, что $f(\sigma_i) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{N}_\sigma^{k-1}}(G)$ для всех σ_i. В частности, $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{N}_\sigma}(G)$ — σ-локальное множество Фиттинга группы G с H_σ-функцией f такой, что $f(\sigma_i) = \{1\}$ для всех σ_i.

Лемма 3.3. *Пусть $\mathscr{F} = LFS_\sigma(f)$ и $\Pi = \mathrm{Supp}(f)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $\Pi = \sigma(\mathscr{F})$;

(2) $S \leq G$ и $S \in \mathscr{F}$ тогда и только тогда, когда $S \in f(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(S)$, т. е. $\mathscr{F} = \{S \leq G : S \in f(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\}$;

(3) $\mathscr{F} = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{E}_\Pi}(G) \cap \big(\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} f(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\big)$.

Доказательство. (1) Если $\sigma_i \in \Pi$, то $\{1\} \in f(\sigma_i)$ и для любой σ_i-подгруппы S группы G такой, что $S \neq 1$, имеем $\sigma(S) = \{\sigma_i\}$. Так как $\{1\} \in f(\sigma_i)$, по лемме 2.3 $S \in \{1\} \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq \{1\} \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \subseteq f(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ для любого $\sigma_i \in \Pi$. По определению произведения множества Фиттинга группы G и класса Фиттинга $S/S_{f(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ и поэтому $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \leq S_{f(\sigma_i)}$. Ввиду определения $f(\sigma_i)$-радикала $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \trianglelefteq S_{f(\sigma_i)}$. Следовательно, $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i)$ и $S \in \mathscr{F}$. Значит, $\Pi \subseteq \sigma(\mathscr{F})$.

Если $\sigma_i \in \sigma(\mathscr{F})$, то для некоторой подгруппы $S \in \mathscr{F}$ группы G имеем $\sigma_i \in \sigma(S)$ и $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i)$. Значит, $\sigma_i \in \Pi$ и $\sigma(\mathscr{F}) \subseteq \Pi$. Таким образом, $\Pi = \sigma(\mathscr{F})$.

(2) Если $\sigma_i \in \sigma(S)$ и S — $\mathscr{F}$-подгруппа группы G, то $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i)$. Ввиду того, что $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \leq S_{f(\sigma_i)}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ — формация, получаем

$$(S/S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}})/(S_{f(\sigma_i)}/S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}}) \cong S/S_{f(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}.$$

Следовательно, $S \in f(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(S)$.

Обратно, если для любого $\sigma_i \in \sigma(S)$ имеем $S \in f(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$, то $S/S_{f(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. Тогда $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \leq S_{f(\sigma_i)}$. Поскольку $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \trianglelefteq S_{f(\sigma_i)}$, то $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i)$. Следовательно, $S \in \mathscr{F}$.

(3) Пусть S — $\mathscr{F}$-подгруппа группы G. Тогда $|S|$ — $\sigma(\mathscr{F})$-число. Ввиду утверждения (1) $\sigma(\mathscr{F}) = \Pi$, $|S|$ — Π-число и S — Π-подгруппа G. Следовательно, $S \in \mathfrak{G}_\Pi$ и $S \in \mathrm{Tr}_{\mathfrak{E}_\Pi}(G)$. Кроме того, из $S \in \mathscr{F}$ по утверждению (2) следует $S \in f(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(S)$. Если $\sigma_i \in \Pi \setminus \sigma(S)$, то $S \in \mathfrak{E}_{\sigma_i'} \subseteq$

$\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \subseteq f(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. Таким образом, $S \in \mathrm{Tr}_{\mathfrak{E}_\Pi}(G) \cap \big(\bigcap_{\sigma_i\in\Pi} f(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\big)$ и справедливо включение $\mathscr{F} \subseteq \mathrm{Tr}_{\mathfrak{E}_\Pi}(G) \cap \big(\bigcap_{\sigma_i\in\Pi} f(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\big)$. Обратно, если

$$S \in \mathrm{Tr}_{\mathfrak{E}_\Pi}(G) \cap \Big(\bigcap_{\sigma_i\in\Pi} f(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\Big)$$

для всех $\sigma_i \in \sigma(S)$, то $S \in f(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. Следовательно, по утверждению (2) леммы $S \in \mathscr{F}$ и $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{E}_\Pi}(G) \cap \big(\bigcap_{\sigma_i\in\Pi} f(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\big) \subseteq \mathscr{F}$.

Лемма доказана.

Определение 3.4. Пусть $\mathscr{F}$ — σ-локальное множество Фиттинга группы G. Тогда H_σ-функцию f множества $\mathscr{F}$ назовем

1) *внутренней*, если $f(\sigma_i) \subseteq \mathscr{F}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$;

2) *полной* в случае, когда $f(\sigma_i) = f(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$;

3) *полной внутренней*, если f является одновременно полной и внутренней H_σ-функцией.

Лемма 3.5. *Пусть $\mathscr{F}$ — σ-локальное множество Фиттинга группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $\mathscr{F}$ определяется внутренней H_σ-функцией;

(2) $\mathscr{F}$ определяется полной внутренней H_σ-функцией.

Доказательство. (1) Поскольку множество Фиттинга $\mathscr{F}$ σ-локально, по утверждению (3) леммы 3.3 существует такая H_σ-функция f, что

$$\mathscr{F} = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{E}_\Pi}(G) \cap \Big(\bigcap_{\sigma_i\in\Pi} f(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\Big),$$

где $\Pi = \mathrm{Supp}(f) = \sigma(\mathscr{F})$. Определим H_σ-функцию φ такую, что $\varphi(\sigma_i) = f(\sigma_i) \cap \mathscr{F}$ для всех $i \in I$. Тогда $\varphi(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i)$ для любого $\sigma_i \in \sigma(\mathscr{F})$. Следовательно, по лемме 2.4 $\varphi(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \subseteq f(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ и поэтому $LFS_\sigma(\varphi) \subseteq \mathscr{F}$.

Обратно, пусть $S \in \mathscr{F}$. Тогда $S \in f(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. Значит, $S/S_{f(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. Поэтому $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \leq S_{f(\sigma_i)}$ и $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i)$. Поскольку $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \trianglelefteq S$, то $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in \mathscr{F}$. Следовательно, $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i) \cap \mathscr{F} = \varphi(\sigma_i)$. Отсюда получаем $S \in \varphi(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathscr{F})$ и

$$S \in \mathrm{Tr}_{\mathfrak{E}_{\Pi}(G)} \cap \Big(\bigcap_{\sigma_i\in\Pi} \varphi(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\Big) = LFS_\sigma(\varphi).$$

Стало быть, $\mathscr{F} \subseteq LFS_\sigma(\varphi)$ и $\mathscr{F} = LFS_\sigma(\varphi)$. Утверждение (1) доказано.

(2) Пусть $\mathscr{F} = LFS_\sigma(\varphi)$ для некоторой внутренней H_σ-функции. Рассмотрим H_σ-функцию ψ такую, что $\psi(\sigma_i) = \varphi(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для каждого $i \in I$. Очевидно, ψ — полная H_σ-функция. Покажем, что ψ является внутренней H_σ-функцией $\mathscr{F}$.

Пусть $S \in \psi(\sigma_i)$. Тогда $S/S_{\varphi(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. Следовательно, $S \in \varphi(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$. Пусть $\sigma_j \neq \sigma_i$. Тогда $\mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{E}_{\sigma_j'}$. По лемме 2.5 $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_j'}} \leq S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}$. Отсюда $(S^{\mathfrak{E}_{\sigma_j'}})^{\mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_j'}} \in \varphi(\sigma_j)$. Используя лемму 2.6, получим

$$(S^{\mathfrak{E}_{\sigma_j'}})^{\mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_j'}} = S^{\mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_j'}\mathfrak{E}_{\sigma_j'}} = S^{\mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_j'}}, \quad S^{\mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_j'}} \in \varphi(\sigma_j).$$

Значит,
$$(S/S^{\mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma'_j}})/(S_{\varphi(\sigma_j)}/S^{\mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma'_j}}) \cong S/S_{\varphi(\sigma_j)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma'_j}.$$
Тогда $S \in \varphi(\sigma_j) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma'_j}$ для всех $j \neq i$. Получаем $S \in \varphi(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$. Следовательно, согласно утверждению (2) леммы 3.3 $S \in \mathscr{F}$.

Лемма доказана.

Если $\mathscr{X}$ — совокупность подгрупп группы G, то символом $\mathrm{Fitset}(\mathscr{X})$ будем обозначать пересечение всех множеств Фиттинга G, содержащих $\mathscr{X}$. Очевидно, $\mathrm{Fitset}(\mathscr{X})$ является множеством Фиттинга G.

Пусть Ω — совокупность всех H_σ-функций множества Фиттинга $\mathscr{F}$ группы G. Определим на Ω отношение порядка $\leq$ следующим образом: если $f, \varphi \in \Omega$, то $f \leq \varphi$ тогда и только тогда, когда $f(\sigma_i) \subseteq \varphi(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$. Минимальный элемент из Ω назовем *минимальной H_σ-функцией* множества Фиттинга $\mathscr{F}$ группы G.

Лемма 3.6. *Пусть $\mathscr{F}$ — σ-локальное множество Фиттинга группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$\mathscr{F}$ определяется единственной минимальной H_σ-функцией f такой, что $f(\sigma_i) = \mathrm{Fitset}\{S \leq G : S$ сопряжена с $X^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}}$, $X \in \mathscr{F}\}$ для всех $\sigma_i \in \mathrm{Supp}(f)$;*

(2) *$\mathscr{F}$ определяется единственной минимальной полной внутренней H_σ-функцией f такой, что $f(\sigma_i) = \mathrm{Fitset}\{S \leq G : S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}$ сопряжен с $X^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}}$, $X \in \mathscr{F}\} \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \mathrm{Supp}(f)$.*

Доказательство. (1) Пусть $\mathscr{F} = LFS_\sigma(\varphi)$ для внутренней H_σ-функции φ. Определим множество подгрупп группы G следующим образом: $f_1(\sigma_i) = \{S \leq G : S$ сопряжена с $X^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}}, X \in \mathscr{F}\}$. Пусть $f(\sigma_i) = \mathrm{Fitset}\, f_1(\sigma_i)$. Ввиду $X \in \mathscr{F}$ получаем $X^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}} \in \mathscr{F}$. По утверждению (2) леммы 3.3 $X \in \varphi(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}$. Следовательно, $X^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}} \in \varphi(\sigma_i)$. Так как подгруппа S сопряжена с $X^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}} \in \varphi(\sigma_i)$, то $S \in \varphi(\sigma_i)$. Значит, $f_1(\sigma_i) \subseteq \varphi(\sigma_i)$ и $\mathrm{Fitset}\, f_1(\sigma_i) = f(\sigma_i) \subseteq \mathrm{Fitset}\, \varphi(\sigma_i) = \varphi(\sigma_i)$. Стало быть, $LFS_\sigma(f) \subseteq \mathscr{F}$.

Докажем обратное включение. Пусть $S \leq G$ и $S \in \mathscr{F}$. Поскольку $\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$-корадикал $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}}$ сопряжен с $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}}$, по определению функции f имеем $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in \{S \leq G : S$ сопряжена с $X^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}}\} \subseteq f(\sigma_i)$. Следовательно, $S \in f(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ для всех $\sigma_i \in \mathrm{Supp}(f)$. По утверждению (2) леммы 3.3 $S \in LFS_\sigma(f)$. Значит, $\mathscr{F} \subseteq LFS_\sigma(f)$ и $\mathscr{F} = LFS_\sigma(f)$. Утверждение (1) доказано.

(2) По утверждению (2) леммы 3.5 $\mathscr{F} = LFS_\sigma(\varphi)$ для полной внутренней H_σ-функции φ множества Фиттинга $\mathscr{F}$ группы G, т. е.
$$\mathscr{F} = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{E}_\Pi}(G) \cap \Big(\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \varphi(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}\Big).$$

Пусть $\varphi_1(\sigma_i) = \{S \leq G : S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}$ сопряжен с $X^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}}, X \in \mathscr{F}\}$. Если $S \in \varphi_1(\sigma_i)$, то $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}$ сопряжен с $X^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}}$ для некоторой подгруппы $X \in \mathscr{F}$. Поскольку $X \in \mathscr{F}$, по утверждению (2) леммы 3.3 следует $X \in \varphi(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}$. Тогда $X/X_{\varphi(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}$. Значит, $X^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}} \in \varphi(\sigma_i)$. Ввиду сопряженности $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}$ с $X^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}}$ имеем $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in \varphi(\sigma_i)$. Следовательно, $S \in \varphi(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i} = \varphi(\sigma_i)$ и $\varphi_1(\sigma_i) \subseteq \varphi(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \mathrm{Supp}(\varphi)$. Значит, $\mathrm{Fitset}\, \varphi_1(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq \mathrm{Fitset}\, \varphi(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Итак, $f \leq \varphi$ для любой полной H_σ-функции φ множества Фитинга $\mathscr{F}$ группы G. В частности, справедливо включение $LFS_\sigma(f) \subseteq \mathscr{F}$.

Обратно, пусть S — $\mathscr{F}$-подгруппа группы G. Ввиду леммы 2.6 справедливо равенство $(S^{\mathfrak{E}_{\sigma'_i}})^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}} = S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}}$. Следовательно, $S^{\mathfrak{E}_{\sigma'_i}} \in \varphi_1(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i)$. По лемме 2.5 $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}} \leq S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}}$. Тогда $S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}} \in f(\sigma_i)$ и $S \in f(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathscr{F})$. Ввиду утверждения (2) леммы 3.3 $S \in LFS_\sigma(f)$. Следовательно, $\mathscr{F} \subseteq LFS_\sigma(f)$ и $\mathscr{F} = LFS_\sigma(f)$.

Пусть $\{f_i : i \in I\}$ — множество всех полных H_σ-функций. Тогда $\psi = \bigcap_{i\in I} f_i$ — минимальная полная H_σ-функция. Поскольку по утверждению (2) леммы 3.5 любое σ-локальное множество Фиттинга группы G определяется полной внутренней H_σ-функцией, среди множества всех полных H_σ-функций $\mathscr{F}$ существует хотя бы одна полная внутренняя H_σ-функция. Следовательно, $\psi = \bigcap_{i\in I} f_i$ — минимальная полная внутренняя H_σ-функция $\mathscr{F}$ и $\psi = f$. Утверждение (2) доказано.

Лемма доказана.

Следующее утверждение вытекает непосредственно из леммы 3.6.

Следствие 3.7. *Пусть $\mathscr{F} = LFS_\sigma(\underline{f})$, $\mathscr{H} = LFS_\sigma(\underline{h})$, где $\underline{f}$ и $\underline{h}$ — минимальные H_σ-функции множеств Фиттинга $\mathscr{F}$ и $\mathscr{H}$ группы G соответственно. Тогда $\underline{f} \leq \underline{h}$ в том и только том случае, если $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{H}$.*

Если f и h — H_σ-функции, то символом $f \vee_\sigma h$ будем обозначать H_σ-функцию такую, что $(f \vee_\sigma h)(\sigma_i) = f(\sigma_i) \vee_\sigma h(\sigma_i)$ для каждого i, и символом $f \wedge h$ — H_σ-функцию такую, что $(f \cap h)(\sigma_i) = f(\sigma_i) \cap h(\sigma_i)$ для каждого i.

Заметим, что множество всех σ-локальных множеств Фиттинга группы G образует решетку по включению относительно операций $\wedge_\sigma$ и $\vee_\sigma$, которые определяются для любых σ-локальных множеств Фиттинга $\mathscr{F}$ и $\mathscr{H}$ группы G следующим образом: $\mathscr{F} \wedge_\sigma \mathscr{H} = \mathscr{F} \cap \mathscr{H}$ и $\mathscr{F} \vee_\sigma \mathscr{H} = \mathrm{Fitset}(\mathscr{F} \cup \mathscr{H})$.

Лемма 3.8. *Пусть $\mathscr{F} = LFS_\sigma(f)$ — σ-локальное множество Фиттинга группы G, $\Pi = \sigma(\mathscr{F})$, m — H_σ-функция такая, что*

$$m(\sigma_i) = \mathrm{Fitset}\{S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_{i'}}} : S \leq G,\ S \in \mathscr{F}\}$$

для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $m(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Тогда

(1) $\mathscr{F} = LFS_\sigma(m)$;

(2) $m(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_i) \cap \mathscr{F}$ для каждой H_σ-функции h множества Фиттинга $\mathscr{F}$ группы G и для каждого σ_i.

Доказательство. Пусть

$$\mathscr{F}(\sigma_i) = \{S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_{i'}}} : S \leq G,\ S \in \mathscr{F}\}$$

для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $\mathscr{M} = LFS_\sigma(m)$. Тогда $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{M}$. С другой стороны, $\mathscr{F}(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i)$ и поэтому $m(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$. Кроме того, имеет место $m(\sigma_i) = \varnothing \subseteq f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Следовательно, $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{F}$ и поэтому $\mathscr{M} = \mathscr{F}$.

Лемма доказана.

4. О признаках дистрибутивности и модулярности

В данном разделе определим семейства множеств Фиттинга группы G, для которых справедливы дистрибутивное и модулярное равенства.

Лемма 4.1. *Если $\mathscr{F}$ и $\mathscr{H}$ — множества Фиттинга группы G, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — радикальные гомоморфы такие, что $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y} = (1)$ и $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{H} \odot \mathfrak{X}$ и $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{F} \odot \mathfrak{Y}$, то $\mathscr{F} \vee \mathscr{H} = \{S \leq G : S = S_{\mathscr{F}} S_{\mathscr{H}}\}$.*

Доказательство. По лемме 2.3 $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F} \odot \mathfrak{Y}$, и по условию $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{H} \odot \mathfrak{X}$. Следовательно, $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{H} \odot \mathfrak{X} \cap \mathscr{F} \odot \mathfrak{Y}$. Аналогично $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{H} \odot \mathfrak{X}$ и $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{F} \odot \mathfrak{Y}$. Поэтому имеет место включение $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{H} \odot \mathfrak{X} \cap \mathscr{F} \odot \mathfrak{Y}$.

Итак, $\mathscr{F}$ и $\mathscr{H}$ — множества Фиттинга группы G из $\mathscr{H} \odot \mathfrak{X} \cap \mathscr{F} \odot \mathfrak{Y}$. Поскольку по определению решеточного объединения $\mathscr{F} \vee \mathscr{H}$ — это наименьшее множество Фиттинга G, содержащее $\mathscr{F}$ и $\mathscr{H}$, то

$$\mathscr{F} \vee \mathscr{H} \subseteq \mathscr{H} \odot \mathfrak{X} \cap \mathscr{F} \odot \mathfrak{Y}. \tag{4.1}$$

Докажем справедливость обратного включения: $\mathscr{H} \odot \mathfrak{X} \cap \mathscr{F} \odot \mathfrak{Y} \subseteq \mathscr{F} \vee \mathscr{H}$. Пусть $\mathscr{M} = \{S \leq G : S_{\mathscr{F}} S_{\mathscr{H}}\}$ и $\mathscr{N} = \mathscr{H} \odot \mathfrak{X} \cap \mathscr{F} \odot \mathfrak{Y}$. Покажем, что справедливо равенство

$$\mathscr{M} = \mathscr{N}. \tag{4.2}$$

Пусть $S \in \mathscr{N}$. Тогда $S \in \mathscr{H} \odot \mathfrak{X}$ и $S \in \mathscr{F} \odot \mathfrak{Y}$. Следовательно, $S/S_{\mathscr{F}} \in \mathfrak{Y}$. Поскольку $\mathfrak{Y}$ — гомоморф, $S/S_{\mathscr{F}}/S_{\mathscr{F}}S_{\mathscr{H}}/S_{\mathscr{F}} \in \mathfrak{Y}$. Ввиду изоморфизма $S/S_{\mathscr{F}}/S_{\mathscr{F}}S_{\mathscr{H}}/S_{\mathscr{F}} \cong S/S_{\mathscr{F}}S_{\mathscr{H}}$ и $S/S_{\mathscr{F}}S_{\mathscr{H}} \in \mathfrak{Y}$. Аналогично из $S \in \mathscr{H} \odot \mathfrak{X}$ получаем $S/S_{\mathscr{H}} \in \mathfrak{X}$, $S/S_{\mathscr{H}}/S_{\mathscr{F}}S_{\mathscr{H}}/S_{\mathscr{H}} \in \mathfrak{X}$ и $S/S_{\mathscr{F}}S_{\mathscr{H}} \in \mathfrak{X}$. Следовательно, $S/S_{\mathscr{F}}S_{\mathscr{H}} \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$. Поскольку $S/S_{\mathscr{F}}S_{\mathscr{H}}$ — единичная группа, $S = S_{\mathscr{F}}S_{\mathscr{H}}$. Значит, $S \in \mathscr{M}$ и справедливо включение $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{M}$. Обратно, пусть $S \in \mathscr{M}$. Тогда $S = S_{\mathscr{F}}S_{\mathscr{H}}$. По условию теоремы $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{H} \odot \mathfrak{X}$ и поэтому $S_{\mathscr{F}} \subseteq S_{\mathscr{H} \odot \mathfrak{X}}$. Значит, $S \subseteq S_{\mathscr{H} \odot \mathfrak{X}} S_{\mathscr{H}} = S_{\mathscr{H} \odot \mathfrak{X}}$. Следовательно, $S = S_{\mathscr{H} \odot \mathfrak{X}}$, т. е. $S \in \mathscr{H} \odot \mathfrak{X}$. Аналогично $S \in \mathscr{F} \odot \mathfrak{Y}$ и $S \in \mathscr{H} \odot \mathfrak{X} \cap \mathscr{F} \odot \mathfrak{Y}$, и равенство (4.2) доказано.

Далее покажем, что $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{F} \vee \mathscr{H}$. Пусть $S \in \mathscr{M}$. Тогда $S = S_{\mathscr{F}}S_{\mathscr{H}}$. По определению $\mathscr{F}$-радикала $S_{\mathscr{F}} \in \mathscr{F} \subseteq \mathscr{F} \vee \mathscr{H}$. Аналогично $S_{\mathscr{H}} \in \mathscr{H} \subseteq \mathscr{F} \vee \mathscr{H}$. По определению множества Фиттинга $S_{\mathscr{F}}S_{\mathscr{H}} \in \mathscr{F} \vee \mathscr{H}$. Поскольку $S = S_{\mathscr{F}}S_{\mathscr{H}}$, то $S \in \mathscr{F} \vee \mathscr{H}$. Таким образом, $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{F} \vee \mathscr{H}$. Учитывая (4.2), получаем включение

$$\mathscr{H} \odot \mathfrak{X} \cap \mathscr{F} \odot \mathfrak{Y} \subseteq \mathscr{F} \vee \mathscr{H}. \tag{4.3}$$

Теперь ввиду (4.1), (4.3) и (4.2) $\mathscr{H} \odot \mathfrak{X} \cap \mathscr{F} \odot \mathfrak{Y} = \mathscr{F} \vee \mathscr{H}$ и $\mathscr{F} \vee \mathscr{H} = \{S \leq G : S = S_{\mathscr{F}}S_{\mathscr{H}}\}$.

Лемма доказана.

Определим семейство множеств Фиттинга группы G, для которых выполняется дистрибутивное равенство.

Теорема 4.2. *Если $\mathscr{F}$, $\mathscr{H}$, $\mathscr{M}$ — множества Фиттинга группы G и $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{H} \odot \mathfrak{E}_{\pi}$, $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{F} \odot \mathfrak{E}_{\pi'}$ для некоторого множества простых чисел π, то*

$$\mathscr{M} \cap (\mathscr{F} \vee \mathscr{H}) = (\mathscr{M} \cap \mathscr{F}) \vee (\mathscr{M} \cap \mathscr{H}).$$

Доказательство. Очевидно, что $(\mathscr{M} \cap \mathscr{F}) \vee (\mathscr{M} \cap \mathscr{H}) \subseteq \mathscr{M} \cap (\mathscr{F} \vee \mathscr{H})$.

Покажем, что $\mathscr{M} \cap (\mathscr{F} \vee \mathscr{H}) \subseteq (\mathscr{M} \cap \mathscr{F}) \vee (\mathscr{M} \cap \mathscr{H})$. Пусть $S \leq G$ и $S \in \mathscr{M} \cap (\mathscr{F} \vee \mathscr{H})$. Следовательно, $S \in \mathscr{M}$ и $S \in \mathscr{F} \vee \mathscr{H}$. Тогда по лемме 4.1 ввиду $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{H} \odot \mathfrak{E}_{\pi}$ и $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{F} \odot \mathfrak{E}_{\pi'}$ получаем $S = S_{\mathscr{F}}S_{\mathscr{H}}$. Из $S \in \mathscr{M}$ и $S = S_{\mathscr{F}}S_{\mathscr{H}}$ следует $S_{\mathscr{F}} \in \mathscr{M}$ и $S_{\mathscr{H}} \in \mathscr{M}$. Тогда $S_{\mathscr{F} \cap \mathscr{M}} \in \mathscr{M}$ и $S_{\mathscr{H} \cap \mathscr{M}} \in \mathscr{M}$. Значит, $S = S_{\mathscr{F} \cap \mathscr{M}} S_{\mathscr{H} \cap \mathscr{M}}$. Отсюда $S \in (\mathscr{M} \cap \mathscr{F}) \vee (\mathscr{M} \cap \mathscr{H})$. Итак, справедливо включение $\mathscr{M} \cap (\mathscr{F} \vee \mathscr{H}) \subseteq (\mathscr{M} \cap \mathscr{F}) \vee (\mathscr{M} \cap \mathscr{H})$. Следовательно, $\mathscr{M} \cap (\mathscr{F} \vee \mathscr{H}) = (\mathscr{M} \cap \mathscr{F}) \vee (\mathscr{M} \cap \mathscr{H})$.

Теорема доказана.

Лемма 4.3. *Пусть $\{\mathscr{F}_i = LFS_\sigma(f_i),\ i \in I\}$ — множество σ-локальных множеств Фиттинга группы G и $\mathscr{F} = \bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i$ для всех $i \in I$. Тогда $\mathscr{F} = LFS_\sigma\big(\bigcap_{i\in I} f_i\big)$ является σ-локальным множеством Фиттинга группы G.*

Доказательство. Пусть $\Pi_i = \sigma(\mathscr{F}_i)$ для всех $i \in I$. Тогда

$$\bigcap_{i\in I}\Pi_i = \bigcap_{i\in I}\sigma(\mathscr{F}_i) = \sigma\Big(\bigcap_{i\in I}\mathscr{F}_i\Big) = \sigma(\mathscr{F}).$$

Пусть $S \in \mathscr{F}$. Тогда

$$S \in \mathscr{F}_i = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{E}_{\Pi_i}}(G) \cap \Big(\bigcap_{\sigma_j\in\Pi_i} f_i(\sigma_j) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_j'}\Big)$$

для всех $j \in J$ и $i \in I$. Значит, $S \in \mathscr{F}_i = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{E}_{\Pi_i}}(G)$ и $S \in f_i(\sigma_j) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$ для всех $j \in J$ и $i \in I$. Из $S \in \mathscr{F}_i = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{E}_{\Pi_i}}(G)$ следует $S \in \mathscr{F}_i = \bigcap_{i\in I}\mathrm{Tr}_{\mathfrak{F}_i}(G)$. Тогда

$$S \in \mathrm{Tr}_{\bigcap_{i\in I}\mathfrak{E}_{\Pi_i}}(G) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{E}_\Pi}(G).$$

Поскольку $S \in f_i(\sigma_j) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$, имеем $S/S_{f_i(\sigma_j)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$. Так как класс $\mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$ — формация, то $S/\bigcap_{i\in I} S_{f_i(\sigma_j)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$. Тогда $S/S_{\bigcap_{i\in I} f_i(\sigma_j)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$. Следовательно, $S \in \bigcap_{i\in I} f_i(\sigma_j) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$. Таким образом,

$$S \in \mathrm{Tr}_{\mathfrak{E}_\Pi}(G) \cap \Big(\bigcap_{j\in J}\bigcap_{i\in I} f_i(\sigma_j) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_j}\mathfrak{E}_{\sigma_j'}\Big).$$

Значит, $S \in LFS_\sigma\big(\bigcap_{i\in I} f_i\big)$ и $\mathscr{F} \subseteq LFS_\sigma\big(\bigcap_{i\in I} f_i\big)$ — σ-локальное множество Фиттинга группы G. Обратное включение очевидно.

Лемма доказана.

Напомним, что если $\mathscr{X}$ — любая совокупность подгрупп группы G, то символом $\mathscr{X}(\sigma_i)$ обозначаем множество $\{S \leq G : S^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in \mathscr{X}\}$.

Лемма 4.4. *Пусть $\mathscr{F}_1 = LFS_\sigma(f_1)$ и $\mathscr{F}_2 = LFS_\sigma(f_2)$ — σ-локальные множества Фиттинга группы G, где f_1 и f_2 — внутренние H_σ-функции, и $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \vee_\sigma \mathscr{F}_2$. Тогда $\mathscr{F} = LFS_\sigma(f_1 \vee_\sigma f_2)$ является σ-локальным множеством Фиттинга группы G.*

Доказательство. Пусть h_j — минимальная H_σ-функция множества Фиттинга $\mathscr{F}_j$ группы G и p_j — минимальная полная внутренняя H_σ-функция множества Фиттинга $\mathscr{F}_j$ группы G для $j \in \{1, 2\}$. Для любого $i \in I$ ввиду леммы 3.8 имеем $h_j(\sigma_i) \subseteq f_j(\sigma_i) \subseteq p_j(\sigma_i)$. Более того,

$$\begin{aligned} h(\sigma_i) &= \mathrm{Fitset}((\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2)(\sigma_i)) = \mathrm{Fitset}(\mathscr{F}_1(\sigma_i) \cup \mathscr{F}_2(\sigma_i)) = \mathrm{Fitset}(h_1(\sigma_i) \cup h_2(\sigma_i)) \\ &\subseteq f(\sigma_i) \subseteq \mathrm{Fitset}(h_1(\sigma_i) \cup h_2(\sigma_i)) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq h(\sigma_i) \odot \mathfrak{E}_{\sigma_i} = p(\sigma_i). \end{aligned}$$

Значит, $h(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i) \subseteq p(\sigma_i)$ для всех $i \in I$ и $\mathscr{F} = LFS_\sigma(f)$.

Лемма доказана.

Если $\mathscr{X}$ — совокупность подгрупп группы G, то операцию замыкания S_n на $\mathscr{X}$ определяют следующим образом: $S_n(\mathscr{X}) = \{S \leq G : S \trianglelefteq\trianglelefteq H$ для некоторой подгруппы $H \in \mathscr{X}\}$ (см. [17, с. 171]).

Следующая теорема определяет семейство σ-локальных множеств Фиттинга группы G, для которых выполняется модулярное равенство.

Теорема 4.5. *Пусть $\mathscr{F} = LFS_\sigma(f)$, $\mathscr{H} = LFS_\sigma(h)$, $\mathscr{M} = LFS_\sigma(m)$ — σ-локальные множества Фиттинга группы G и f, h, m — минимальные H_σ-функции множеств Фиттинга $\mathscr{F}$, $\mathscr{H}$, $\mathscr{M}$ группы G соответственно, причем $f \le m$. Если H_σ-функции f и h таковы, что $f(\sigma_i) \vee h(\sigma_i) = S_n\{S \le G : S = S_{f(\sigma_i)}S_{h(\sigma_i)}\}$ для всех σ_i таких, что $f(\sigma_i)$ и $h(\sigma_i)$ — непустые множества Фиттинга группы G, то $(\mathscr{F} \vee_\sigma \mathscr{H}) \cap \mathscr{M} = \mathscr{F} \vee_\sigma (\mathscr{H} \cap \mathscr{M})$.*

Доказательство. Покажем вначале, что для минимальных H_σ-функций f, h и m выполняется $(f(\sigma_i) \vee_\sigma h(\sigma_i)) \cap m(\sigma_i) = f(\sigma_i) \vee_\sigma (h(\sigma_i) \cap m(\sigma_i))$ для всех σ_i.

Так как $f \le m$ и $f \le f \vee_\sigma h$, то $f \le (f \vee_\sigma h) \cap m$. Кроме того, $h \cap m \le f \vee_\sigma h$ и $h \cap m \le m$. Следовательно, $h \cap m \le (f \vee_\sigma h) \cap m$ и

$$f \vee_\sigma (h \cap m) \le (f \vee_\sigma h) \cap m. \tag{4.4}$$

Проверим справедливость обратного вложения H_σ-функций:

$$(f \vee_\sigma h) \cap m \le f \vee_\sigma (h \cap f). \tag{4.5}$$

Если $m(\sigma_i) = \varnothing$, то вложение (4.5) тривиально. Рассмотрим отдельно случаи, когда $f(\sigma_i)$ или $h(\sigma_i)$ пуст. Пусть $f(\sigma_i) = \varnothing$. В этом случае, очевидно, $(f(\sigma_i) \vee_\sigma h(\sigma_i)) \cap m(\sigma_i) = h(\sigma_i) \cap m(\sigma_i)$ и для H_σ-функций f, h и m справедливо $(f(\sigma_i) \vee_\sigma h(\sigma_i)) \cap m(\sigma_i) = f(\sigma_i) \vee_\sigma (h(\sigma_i) \cap m(\sigma_i))$.

Предположим, что $h(\sigma_i) = \varnothing$. Тогда ввиду вложения $h \le m$ имеем

$$(f(\sigma_i) \vee_\sigma h(\sigma_i)) \cap m(\sigma_i) = f(\sigma_i) \vee_\sigma (h(\sigma_i) \cap m(\sigma_i)) = f(\sigma_i).$$

Таким образом, остается рассмотреть случай, когда ни одно из множеств Фиттинга $f(\sigma_i)$, $h(\sigma_i)$ и $m(\sigma_i)$ не является пустым. Пусть K — подгруппа из $(f(\sigma_i) \vee_\sigma h(\sigma_i)) \cap m(\sigma_i)$. Поскольку $K \in f(\sigma_i) \vee_\sigma h(\sigma_i)$, по условию существуют подгруппа $S = S_{m(\sigma_i)}S_{h(\sigma_i)}$ и изоморфизм ψ такие, что $K \cong \psi(K) \trianglelefteq\trianglelefteq S$. Отождествляя K с ее изоморфным образом, получаем

$$\begin{aligned} K \trianglelefteq\trianglelefteq S_{m(\sigma_i)} = S \cap S_{m(\sigma_i)} &= S_{f(\sigma_i)}S_{h(\sigma_i)} \cap S_{m(\sigma_i)} \\ &= S_{f(\sigma_i)}(S_{h(\sigma_i)} \cap S_{m(\sigma_i)}) = S_{f(\sigma_i)}S_{h(\sigma_i)m(\sigma_i)}. \end{aligned}$$

Следовательно, $K \in f(\sigma_i) \vee_\sigma (h(\sigma_i) \cap m(\sigma_i))$ и вложение H_σ-функций (4.5) доказано. Из (4.4) и (4.5) получаем

$$(f \vee_\sigma h) \cap m = f \vee_\sigma (h \cap m). \tag{4.6}$$

Докажем теперь справедливость равенства

$$(\mathscr{F} \vee_\sigma \mathscr{H}) \cap \mathscr{M} = \mathscr{F} \vee_\sigma (\mathscr{H} \cap \mathscr{M}).$$

Поскольку H_σ-функции f и m множеств Фиттинга $\mathscr{F}$ и $\mathscr{M}$ внутренние, по следствию 3.7 из вложения $f \le m$ следует, что $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{M}$.

Ввиду леммы 4.4 $f \vee_\sigma h$ — H_σ-функция множества $\mathscr{F} \vee_\sigma \mathscr{H}$. Следовательно, по лемме 4.3 $(f \vee_\sigma h) \cap m$ — H_σ-функция множества $(\mathscr{F} \vee_\sigma \mathscr{H}) \cap \mathscr{M}$.

Аналогично по лемме 4.3 $h \cap m$ — H_σ-функция множества $\mathscr{H} \cap \mathscr{M}$ и тогда по лемме 4.4 H_σ-функция $f \vee_\sigma (h \cap f)$ определяет множество Фиттинга $\mathscr{F} \vee_\sigma (\mathscr{H} \cap \mathscr{M})$. Следовательно, ввиду (4.6) $(\mathscr{F} \vee_\sigma \mathscr{H}) \cap \mathscr{M} = \mathscr{F} \vee_\sigma (\mathscr{H} \cap \mathscr{M})$.

Теорема доказана.

Замечание 4.6. Следуя концепции кратной локализации А. Н. Скибы (см. [16]), легко получить обобщение результата о признаке модулярности семейств

σ-локальных множеств Фиттинга группы G. Каждое рассматриваемое множество Фиттинга группы G будем называть 0-*кратно σ-локальным*, и если $n \geq 1$, то множество Фиттинга $\mathscr{F}$ группы G назовем *n-кратно σ-локальным*, если либо $\mathscr{F} = \{1\}$, либо $\mathscr{F}$ имеет H_σ-функцию f такую, что всякое ее непустое значение $(n-1)$-кратно σ-локально.

Для любых двух множеств Фиттинга $\mathscr{F}$ и $\mathscr{H}$ группы G положим $\mathscr{F} \vee_\sigma^n \mathscr{H} = l_\sigma^n \operatorname{Fitset}(\mathscr{F} \cup \mathscr{H})$, где символом $l_\sigma^n \operatorname{Fitset}(\mathscr{F} \cup \mathscr{H})$ обозначим n-кратно σ-локальное множество Фиттинга группы G, порожденное $\mathscr{F} \cup \mathscr{H}$. Если f и h — H_σ-функции, то $f \vee_\sigma^n h$ — n-кратно локальная H_σ-функция такая, что $\big(f \vee_\sigma^n h\big)(\sigma_i) = f(\sigma_i) \vee_\sigma^n h(\sigma_i)$ для всех i и $f \cap h$ — n-кратно локальная H_σ-функция такая, что $(f \cap h)(\sigma_i) = f(\sigma_i) \cap h(\sigma_i)$ для всех σ_i.

Легко видеть, следуя доказательству теоремы 4.5 и используя индукцию по n, что эта теорема верна для случая n-кратно σ-локальных множеств Фиттинга группы G.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: de Gruyter, 1992.
2. *Anderson W.* Injectors in finite solvable groups // J. Algebra. 1975. V. 36. P. 333–338.
3. *Шеметков Л. А.* О подгруппах π-разрешимых групп // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1975. С. 207–212.
4. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997.
5. *Воробьев Н. Т.* О предположении Хоукса для радикальных классов // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1296–1302.
6. *Guo W., Zhang L., Vorob'ev N. T.* On σ-local Fitting classes // J. Algebra. 2020. V. 542, N 15. P. 116–129.
7. *Коуровская тетрадь* (нерешенные вопросы теории групп). 18-е изд., доп. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2014.
8. *Воробьев Н. Н., Скиба А. Н.* О дистрибутивности решетки разрешимых тотально локальных классов Фиттинга // Мат. заметки. 2000. Т. 67, № 5. С. 662–673.
9. *Reifferscheid S.* On the theory of Fitting classes of finite soluble groups: Dissertation. Tübingen, 2001.
10. *Lausch H.* On normal Fitting classes // Math. Z. 1973. V. 130, N 1. P. 67–72.
11. *Воробьев Н. Т., Марцинкевич А. В.* Конечные π-группы с нормальными инъекторами // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 4. С. 790–797.
12. *Воробьев Н. Т., Ланцетова Е. Д.* О свойствах дистрибутивности и модулярности решеток классов Фиттинга // Мат. заметки. 2021. Т. 110, № 5. С. 658–671.
13. *Skiba A. N.* On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets // J. Algebra. 2020. V. 550, N 5. P. 69–85.
14. *Yang N., Guo W., Vorob'ev N. T.* On $\mathscr{F}$-injectors of Fitting set of a finite group // Commun. Algebra. 2018. V. 46, N 1. P. 217–229.
15. *Skiba A. N.* On one generalization of the local formations // PFMT. 2018. V. 34, N 1. P. 79–82.
16. *Skiba A. N.* Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups // J. Algebra. 2018. V. 495. P. 114–129.
17. *Pense J.* Fittingmengen und Lockettabschnitte // J. Algebra. 1990. V. 133. P. 168–181.

Поступила в редакцию 3 октября 2021 г.
После доработки 1 августа 2022 г.
Принята к публикации 15 августа 2022 г.

Воробьев Николай Тимофеевич (ORCID 0000-0001-8776-7287),
Волкова Екатерина Дмитриевна (ORCID 0000-0001-7441-3826)
Витебский государственный университет имени П. М. Машерова,
Московский пр., 33, Витебск 210038, Беларусь
`ntvorobyov@mail.ru`, `ekaterina.lancetova@gmail.com`