(ознакомительный фрагмент)

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УКРАИНСКОЙ ССР
СКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. А. М. ГОРЬКОГО

Г. Г. БАРАНОВСКАЯ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬШОГО ПОРЯДКА АЛЬТЕРНИРУЮЩИМ МЕТОДОМ

(003—дифференциальные и интегральные уравнения)

Автореферат

диссертации на соискание уч чой степени
кандидата физико-матема ических
наук

Киев — 1968

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УКРАИНСКОЙ ССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ А.М.ГОРЬКОГО

Г.Г.БАРАНОВСКАЯ

На правах рукописи

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬШОГО ПОРЯДКА АЛЬТЕРНИРУЮЩИМ МЕТОДОМ

(003 - дифференциальные и интегральные уравнения)

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1968

Работа выполнена на кафедре математики Киевского Государственного педагогического института им. А.М.Горького.

Научный руководитель - доктор физико-математических наук В.Н.ОСТАПЕНКО.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук В.В.ИВАНОВ,
кандидат физико-математических наук Е.И.ФИЛИППОВИЧ.

Внешняя рецензия - Киевский государственный университет имени Т.Г.Шевченко.

Автореферат разослан "29" октября 1968 г.

Защита состоится "____" ________________ 1968 г.
на заседании Ученого совета Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького (г.Киев-30, Бульвар Шевченко, 22/24).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Ученый секретарь Совета

К численному решению алгебраических и дифференциальных систем с большим числом неизвестных сводятся многие задачи прикладной математики, механики и физики, в частности конечноразностные методы решения краевых задач для уравнений в частных производных, особенно эллиптического типа, расчет обширного класса инженерных сооружений, так называемых стержневых систем, задачи анализа электрических и механических цепей, экономики, геодезии и многие другие.

Серьезным препятствием к решению указанных систем известными численными методами служит то, что программы, реализующие их, обычно требуют размещения всей матрицы коэффициентов и столбца свободных членов в оперативной памяти вычислительной машины. Тем самым сравнительно небольшой объем быстродействующей памяти ограничивает порядок решаемых систем.

Поэтому возникает необходимость в разработке методов численного решения систем уравнений с большим числом неизвестных, которые позволили бы наиболее рационально использовать как внутреннюю, так и внешнюю память машины и тем самым давали бы существенное сокращение времени счета задачи.

В ряде работ [1-3] рассматриваются клеточные модификации некоторых известных методов решения систем алгебраических уравнений: метода Гаусса-Зейделя, методов квадратного корня, Жордана, окаймления, ортогонализации, предполагающие размещение матрицы коэффициентов во внешнем накопителе и позволяющие оперировать в быстродействующей памяти лишь с отдельными клетками исходной матрицы.

Системы конечноразностных уравнений с положительно определенной матрицей эффективно решаются методами блочной итерации [4, 5], которые позволяют решать на каждом шаге системы конечноразностных уравнений более низкого порядка.

Ряд методов решения разностных уравнений для самосопряженных эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, которые дают возможность хранить в процессе счета на ЭЦВМ только часть информации об узлах сеточной области, рассмотрены в [6].

В настоящей диссертации рассматривается численное решение линейных алгебраических и дифференциальных уравнений с большим числом неизвестных альтернирующим методом, позволяющим решать системы в известном смысле "по частям": решая подсистемы сравнительно небольшого порядка, путем последовательных поправок получаем искомое решение исходной системы. Порядок подсистем, на которые условно разбивается исходная система уравнений, выбирается произвольно в зависимости от емкости оперативной памяти конкретной ЦВМ.

В работе исследуются условия сходимости полученного итерационного процесса, скорость сходимости, зависимость скорости сходимости от способа разбиения исходной системы уравнений на подсистемы, а также устанавливается целесообразность применения альтернирующего метода с точки зрения сокращения числа арифметических операций и времени счета задачи.

Рассматриваемый метод является обобщением на численное решение систем уравнений большого порядка известного альтернирующего алгоритма Шварца [7], который был предложен первоначально для решения краевых задач и обобщенный затем на численное решение конечноразностных уравнений [8, 9, 10].

Диссертация состоит из введения, трех глав, объединяющих двенадцать параграфов, приложения и списка цитированной литературы (содержащего 122 наименования).

Во введении содержится постановка задачи и приводится обзор литературы по существующим методам решения систем уравнений большого порядка и обзор литературы по применению алгорифма Шварца для решения многих возникающих проблем.

В первой главе дается описание вычислительной схемы и исследуются условия сходимости альтернирующего процесса для систем линейных алгебраических уравнений.

В первом параграфе данной главы рассматривается решение альтернирующим методом систем конечноразностных уравнений.

В результате применения альтернирующего метода к решению системы разностных уравнений

$$AU = F \tag{I}$$

для сеточной области D_h, содержащей mn узлов, получаем итерационный процесс, на каждом шаге которого решаются последовательно два взаимоперекрывающиеся подсистемы:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{k,k-1} & A_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{(N)} \\ U_2^{(N)} \\ \vdots \\ U_k^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k - U_{k+1}^{(N-1)} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} A_{r+1,r+1} & A_{r+1,r+2} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{r+2,r+1} & A_{r+2,r+2} & A_{r+2,r+3} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{r+1}^{(N)} \\ U_{r+2}^{(N)} \\ \vdots \\ U_n^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{r+1} - U_r^{(N)} \\ f_{r+2} \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$(N = 1, 2, 3, \ldots),$$

где система (2) содержит разностные уравнения, записанные для первых k столбцов области D_h, а система (3) - для столбцов области D_h от $r+1$ -го по n, $r \leq k \leq n$. r и k выбираем таким образом, чтобы подсистему (2) или (3) можно было разместить в ОП машины и решать каким-либо известным методом.

Полученный итерационный процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой равен q^2, где

$$q < \frac{r}{k} . \tag{4}$$

Отсюда следует, что скорость сходимости альтернирующего процесса будет тем больше, чем больше перекрываются подсистемы (2) и (3).

Дается описание вычислительной схемы процесса для случая любого числа M взаимоперекрывающихся подсистем и устанавливается, что скорость сходимости убывает при увеличении M. На каждом шаге альтернирующего итерационного процесса последовательно решаются краевые задачи для сеточных областей, которые содержат только $k \cdot m$ узлов (вместо $n \cdot m$ узлов без применения метода). Кроме того, промежуточные результаты запоминаются не для всех столбцов сетки, а только для $M+1$-го столбцов (учитывая нулевой и $n+1$ -й), что дает значительную экономию ОП машины.

Приводятся также результаты Алексидзе [9] по исследованию времени решения задачи Дирихле альтернирующим методом через скоростные характеристики вычислительной машины.

Если в системах (2) и (3) положить $r = k$, то получим k - строчечный метод блочной итерации [5, 6], при $k = n$ исходная система (I) решается за один шаг итерационного процесса.

В § 2 рассматривается вычислительная схема альтернирующего метода для системы алгебраических уравнений n-го порядка:

$$Ax = F . \tag{5}$$

Исходную систему уравнений разбиваем на M взаимоперекрывающихся подсистем порядка $k \leq n$, причем каждая последующая подсистема получается сдвигом предыдущей на r уравнений вниз, $r \leq k$.

Будем подразумевать под записью

$$A_1 = A[1:n;\ 1:m], \quad x_s = x[i,j]$$

соответственно матрицу A_1, которая содержит строки матрицы A от первой по n и столбцы от первого по m-й и вектор X_s, составленный из компонент вектора X от i-й по j-ю.

На каждом шаге альтернирующего процесса необходимо решить M подсистем k-го порядка:

$$A_p X_p^{(N)} = F_p - L_{2p} X_{\beta p}^{(N)} - L_{1p} X_{\alpha p}^{(N-1)}, \tag{6}$$

$$p = 0, 1, \ldots, \frac{n-k}{r} = M-1, \ (N = 1, 2, 3, \ldots),$$

где

$$A_p = A[pr+1 : pr+k;\ pr+1 : pr+k],$$

$$X_p = X[pr+1 : pr+k], \quad F_p = F[pr+1 : pr+k],$$

$$X_{\beta p} = X[1 : pr], \quad X_{\alpha p} = X[pr+k+1 : n],$$

$$L_{1p} = A[pr+1 : pr+k;\ pr+k+1 : n],$$

$$L_{2p} = A[pr+1 : pr+k;\ 1 : pr],$$

при этом

$$X_{\beta 0},\ L_{20},\ X_{\alpha, M-1},\ L_{1, M-1} \ -$$

суть соответственно нулевые вектора и матрицы.

При $r = k$ получим клеточный метод Гаусса-Зейделя. Если положить $M = 2$, то из (6) легко определить значения векторов X_α и X_β:

$$X_\beta^{(N)} = M \cdot X_\alpha^{(N-1)} + C_1,$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., ФМ, 1960.

2. Волович В.М. О решении систем линейных алгебраических уравнений клеточными методами. Сб.работ Вычислительного Центра МГУ. Вып. 3, 1965.

3. Тан Чжень.О клеточном методе ортогонализации решения систем совместных линейных алгебраических уравнений с большим числом неизвестных. Ж."Выч. мат. и мат. физики", 1961, т. I, № I.

4. Саульев В.К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., ФМ, 1960.

5. Шаманский В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Ч. I, Изд-во АН УССР, Киев, 1963.

6. Молчанов И.Н. О методах численного решения краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа, позволяющих экономить память ЭЦВМ. Автореферат диссертации. Киев, 1964.

7. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л., ФМ, 1952.

8. Бабушка Иво. Об алгоритме Шварца в теории дифференциальных уравнений математической физики. - Чехословацкий математический журнал, 1958, т. 8, № 3, стр. 328-343.

9. Алексидзе М.А. О целесообразности применения альтернирующего метода Шварца на ЭЦВМ. ДАН СССР, 1958, т.120, № 2.

10. Диденко В.И., Ляшенко И.Н. О численном решении краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. УМЖ, 1964, т. 16, № 5.

11. Коваленко Г.Г. Застосування альтернуючого методу Шварца до розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. ДАН УРСР, 1967, сер. А, № 5, стор. 410-415.

12. Коваленко Г.Г. О сходимости альтернирующего метода Шварца при расчете электрических цепей. Республиканский межведомственный сборник "Анализ электрических цепей и

электромагнитных систем". Киев, "Наукова думка", 1967.

13. Коваленко Г.Г. Наближений метод розрахунку лінійних электричних схем. Матеріали третьої республіканської конференції молодих математиків України. Киев, 1968, т. I.

14. Коваленко Г.Г. О применении альтернирующего метода Шварца в анализе электрических цепей. Сб. "Методы расчета цепей и полей на ЭЦВМ". Киев, "Наукова думка", вып. I, 1968.

15. Коваленко Г.Г. Розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь альтернуючим методом. ДАН УРСР, сер. А, № 7, 1968.