

(ознакомительный фрагмент)

Государственное научное учреждение
“Институт математики Национальной академии наук Беларуси”

УДК 517.926.4

Батан Сергей Николаевич

**ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ
ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
С ПЕРРОНОВСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ
И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ**

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск - 2003

Работа выполнена в учреждении образования “Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова”

Научный руководитель:

академик НАН Беларуси, доктор физ.-мат. наук, профессор
Изобов Н. А. (Государственное научное учреждение “Институт математики Национальной академии наук Беларуси”, отдел дифференциальных уравнений)

Официальные оппоненты:

доктор физ.-мат. наук, профессор Лаптинский В. Н. (Государственное научное учреждение “Институт прикладной оптики Национальной академии наук Беларуси”, лаборатория теоретической оптики)

кандидат физ.-мат. наук, доцент Леваков А. А. (Учреждение образования “Белорусский государственный университет”, факультет прикладной математики и информатики)

Оппонирующая орган:

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко

Защита состоится 23 мая 2003 г. в 17⁰⁰ на заседании совета по защите диссертаций Д 01.02.02 при Институте математики Национальной академии наук Беларуси по адресу: 220072, Минск, ул. Сурганова, 11. Телефон ученого секретаря совета: 284-19-63.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики Национальной академии наук Беларуси

Автореферат разослан “10” апреля 2003 г.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций,
доктор физ.-мат. наук, профессор



П. П. Матус

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена исследованию поведения характеристических показателей линейной дифференциальной системы при различных экспоненциально убывающих возмущениях.

Актуальность темы диссертации. Теория характеристических показателей Ляпунова и ее различных приложений построена в работах В. М. Миллионщикова, Б. Ф. Былова, Р. Э. Винограда, Д. М. Гробмана, К. П. Персидского, Ю. С. Богданова, В. А. Плисса, Н. А. Изובה, М. И. Рахимбердиева, Н. Х. Розова, Е. Л. Тонкова, Дж. Лилло, И. Н. Сергеева, С. А. Мазаника, Р. А. Прохоровой, Л. Я. Адриановой, Е. А. Барабанова, Е. К. Макарова, В. Г. Агафонова, В. В. Быкова, К. Е. Ширяева, А. Н. Ветохина и многих других. Трудно переоценить роль характеристического показателя Ляпунова в асимптотической теории и теории устойчивости обыкновенных дифференциальных систем. Основной задачей теории показателей является вычисление или оценка отклонений характеристических показателей возмущенной системы с различными линейными или более высокого порядка малости нелинейными возмущениями от соответствующих показателей системы линейного приближения. Наиболее важными для приложений являются классические возмущения линейных систем: достаточно малые линейные, линейные экспоненциально убывающие, нелинейные высшего порядка малости.

Методы теории показателей Ляпунова, в частности, метод поворотов В. М. Миллионщикова^{1,2} для изучения некоторых свойств линейных систем с экспоненциально убывающими возмущениями были использованы Н. А. Изобовым, Р. А. Прохоровой, Е. А. Барабановым, А. В. Филиповым, О. П. Степанович, А. В. Конюхом, С. Г. Красовским и другими. Однако оставались открытыми следующие вопросы: изучение устойчивости характеристических показателей линейной n -мерной системы при перроновских возмущениях; оценка сверху и снизу характеристических показателей линейной системы при специальных экспоненциально убывающих возмущениях.

Ответы на некоторые из них и содержит настоящая диссертация.

Связь работы с крупными научными программами, темами. Диссертационная работа выполнялась в рамках Республиканских

¹ Миллионщиков В. М. К теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Мат. заметки. — 1968. — Т. 4, вып. 4. — С. 483 — 490.

² Миллионщиков В. М. Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем // Сиб. мат. журн. — 1969. — Т. 10, № 1. — С. 99 — 104.

комплексных программ:

— Математические структуры-13. Развитие асимптотических методов исследования дифференциальных систем (1994 — 1995 гг., постановление Президиума АН Беларуси № 1 от 28 января 1994 г.);

— Математические структуры-12. Асимптотическое исследование дифференциальных систем (1996 — 2000 гг., постановление Президиума АН Беларуси № 88 от 23 ноября 1995 г.);

— Математические структуры-12. Показатели Ляпунова и устойчивость дифференциальных систем (2001 — 2005 гг., постановление Президиума НАН Беларуси № 94 от 5 июля 2001 г.).

Цель и задачи исследования. Цель диссертации состоит: в установлении неустойчивости характеристических показателей линейной n -мерной системы при перроновских возмущениях; в получении оценок характеристических показателей линейных дифференциальных систем при экспоненциально убывающих возмущениях.

Объект и предмет исследования. Объект исследования — линейные системы с экспоненциально убывающими возмущениями. Предметом исследования являются свойства решений и совокупности характеристических показателей таких систем.

Методология и методы проведенного исследования. В работе используются методы теории показателей Ляпунова, в частности, метод поворотов В. М. Миллионщикова.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Полученные в диссертации результаты являются новыми и приоритетными в теории характеристических показателей линейных дифференциальных систем с перроновскими возмущениями и их обобщениями. В ней:

— Установлена неустойчивость характеристических показателей линейных дифференциальных систем третьего и более высокого порядков при перроновских возмущениях;

— Доказана достижимость полученных ранее³ оценок характеристических показателей n -мерных линейных систем с экспоненциально убывающими возмущениями, содержащими класс гробмановских возмущений, а в двумерном случае — и класс перроновских возмущений;

— Получены оценки снизу характеристических показателей линейной дифференциальной системы произвольного порядка с возмущения-

³ Изобов Н. А. Об устойчивости по первому приближению // Дифференц. уравнения. — 1966. — Т. 2, № 7. — С. 898 — 907.

ми⁴, промежуточными между гробмановскими и перроновскими возмущениями и совпадающими с последними в двумерном случае.

Практическая значимость полученных результатов. Работа имеет теоретический характер, ее результаты могут быть использованы в асимптотической теории дифференциальных систем, теории устойчивости и теории показателей Ляпунова. Они также могут найти применение при чтении спецкурсов по теории линейных дифференциальных систем.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту

— Доказательство неустойчивости характеристических показателей линейных дифференциальных систем третьего и более высокого порядков при перроновских возмущениях.

— Доказательство достижимости полученных ранее оценок характеристических показателей n -мерных линейных систем с экспоненциально убывающими возмущениями, содержащими класс гробмановских возмущений, а в двумерном случае — и класс перроновских возмущений.

— Получение оценок снизу характеристических показателей линейной дифференциальной системы произвольного порядка с возмущениями, промежуточными между гробмановскими и перроновскими возмущениями и совпадающими с последними в двумерном случае.

Личный вклад соискателя. Результаты, приведенные в диссертации, получены лично соискателем. Научному руководителю принадлежат общие идеи построения линейной системы с неустойчивыми относительно перроновских возмущений характеристическими показателями, доказательства достижимости установленных им ранее оценок и получения новых оценок снизу характеристических показателей линейных систем со специальными экспоненциально убывающими возмущениями, в двумерном случае содержащими класс перроновских возмущений.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на международных математических конференциях “Вторые республиканские научные чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям, посвященные 75-летию Ю. С. Богданова” (Минск–1995); “Еругинские чтения-IV” (Витебск–1997); “VIII белорусская математическая конференция” (Минск–2000);

⁴ Прохорова Р. А. Оценка скачка старшего показателя линейной системы при экспоненциальных возмущениях // Дифференц. уравнения. — 1976. — Т. 12, № 3. — С. 475 — 483.

на семинарах по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова (1996 и 2001 гг.); на семинарах отдела дифференциальных уравнений Института математики НАН Беларуси.

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в 8 печатных работах, среди которых 3 статьи, 2 аннотации, опубликованные в журнале “Дифференциальные уравнения”, и 3 тезиса выступлений на математических конференциях (две из работ написаны без соавторов). Общее количество опубликованных материалов — 24 страницы.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения, списка использованных источников. Полный объем диссертации — 83 страницы машинописного текста, из которых 5 страниц занимает список использованных источников, состоящий из 43 пунктов.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Первая глава диссертации содержит краткий обзор результатов по теории характеристических показателей линейных дифференциальных систем с экспоненциально убывающими возмущениями.

Рассматриваем линейные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (1_A)$$

с кусочно-непрерывными ограниченными коэффициентами, характеристическими показателями

$$\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A),$$

составляющими характеристическую совокупность $\lambda(A) \in \mathbb{R}^n$, и коэффициентами неустойчивости Ляпунова $\sigma_{\text{Л}}(A)$, Д. М. Гробмана $\sigma_{\text{Г}}(A)$ и Перрона $\sigma_{\text{П}}(A)$, связанными неравенствами

$$\sigma_{\text{Л}}(A) \geq \sigma_{\text{Г}}(A) \geq \sigma_{\text{П}}(A) \geq 0,$$

а также введенными Н. А. Изобовым и Р. А. Прохоровой величинами неустойчивости $\sigma_0(A)$ и $\sigma_{\text{Р}}(A)$.

Во второй главе установлена, вообще говоря, одновременная неустойчивость всех характеристических показателей n -мерных, $n \geq 3$,

линейных систем при перроновских возмущениях, т. е. доказано существование линейной системы (1_A) произвольного порядка $n \geq 3$ и перроновского возмущения Q таких, что неравенства $\lambda_i(A + Q) \neq \lambda_i(A)$ выполнены при всех $i = 1, \dots, n$.

Теорема 2.1 [1,4,6]. *Для любых чисел $\gamma > 0$, $\sigma_0 > 0$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_1 + \sigma_0$ и $\sigma \in (\sigma_0, \sigma_0 + \min_k \{\lambda_{k+1} - \lambda_k\})$ существуют линейная трехмерная система (1_A) с бесконечно дифференцируемыми ограниченными коэффициентами, характеристическими показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = 1, 2, 3$, и коэффициентом неправильности Перрона $\sigma_{\Pi}(A) = \sigma_0$, а также перроновское бесконечно дифференцируемое возмущение $Q(\cdot)$ третьего порядка с показателем Ляпунова $\lambda[Q] = -\sigma$ такие, что возмущенная система (1_{A+Q}) имеет характеристические показатели*

$$\lambda_1(A + Q) = \lambda_1 + \min\{0, \lambda_2 - \lambda_1 + \sigma - \sigma_0 - \gamma\},$$

$$\lambda_2(A + Q) = \lambda_1 + \max\{0, \lambda_2 - \lambda_1 + \sigma - \sigma_0 - \gamma\},$$

$$\lambda_3(A + Q) = \lambda_3 + \gamma.$$

При доказательстве теоремы 2.1 получено более общее

Утверждение 2.1 [1]. *Для любых чисел $\gamma > 0$, $\sigma_0 > 0$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_1 + \sigma_0$ и $\sigma \in (\sigma_0, \sigma_0 + \min_k \{\lambda_{k+1} - \lambda_k\})$ существуют линейная трехмерная система (1_A) с бесконечно дифференцируемыми ограниченными коэффициентами, характеристическими показателями $\lambda_i(A) = \lambda_i$, $i = 1, 2, 3$, и коэффициентом неправильности Перрона $\sigma_{\Pi}(A) = \sigma_0$, а также для любого β_0 , удовлетворяющего условию $-\gamma - \psi + \max\{0, \theta(\theta\gamma - \psi)\} < \beta_0 + \sigma \leq 0$ с величиной $-\psi \equiv \sigma - \sigma_0 + \max_k \{\lambda_k - \lambda_{k+1}\} < 0$ и параметром $\theta \in (1, 1 + \psi/\gamma)$, перроновское бесконечно дифференцируемое возмущение $Q_{\beta_0}(\cdot)$ третьего порядка с показателем Ляпунова $\lambda[Q_{\beta_0}] \leq -\sigma$ такие, что возмущенная система (1_{A+Q}) имеет характеристические показатели*

$$\lambda_1(A + Q) = \lambda_1 + \min\{0, \lambda_2 - \lambda_1 - \sigma_0 - \gamma - \beta_0\},$$

$$\lambda_2(A + Q) = \lambda_1 + \max\{0, \lambda_2 - \lambda_1 - \sigma_0 - \gamma - \beta_0\},$$

$$\lambda_3(A + Q) = \lambda_3 + \gamma.$$

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи

1. Изобов Н. А., Батан С. Н. О неустойчивости характеристических показателей линейных дифференциальных систем при перроновских возмущениях // Дифференц. уравнения. — 1996. — Т. 32, № 10. — С. 1341—1347.
2. Izobov N. A., Batan S. N. On exactness of upper estimates of the characteristic exponent of a linear system with exponentially decreasing perturbations // Mem. differential equations math. phys. — 1997. — N 11. — P. 174—177.
3. Изобов Н. А., Батан С. Н. Об оценках снизу характеристических показателей линейной системы с обобщенными перроновскими возмущениями // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, № 12. — С. 1593—1598.

Журнальные аннотации

4. Батан С. Н., Изобов Н. А. О характеристических показателях линейных дифференциальных систем с перроновскими возмущениями // Дифференц. уравнения. — 1996. — Т. 32, № 6. — С. 858.
5. Изобов Н. А., Батан С. Н. О характеристических показателях линейной дифференциальной системы с обобщенными перроновскими возмущениями // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, № 11. — С. 1577—1578.

Тезисы

6. Батан С. Н., Изобов Н. А. О неустойчивости старшего показателя линейной системы при перроновских возмущениях // Вторые республиканские научные чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям, посвященные 75-летию Ю. С. Богданова: Тез. докл. конф., Минск, 5—9 декабря 1995 г. / БГУ. — Минск, 1995. — С. 11.

7. Батан С. Н. О достижимости оценок характеристических показателей линейных систем со специальными экспоненциально убывающими возмущениями // Еругинские чтения IV: Тез. докл. конф., Витебск, 20 – 22 мая 1997 г. / Витебский государственный университет. — Витебск, 1997. — С. 32 – 33.
8. Батан С. Н. О характеристических показателях линейных дифференциальных систем при экспоненциально убывающих возмущениях // VIII белорусская математическая конференция: Тез. докл. конф., Минск, 19 — 24 июня 2000 г. / ИМ НАНБ. — Минск, 2000. — С. 91.

РЕЗЮМЕ

Батан Сергей Николаевич

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПЕРРОНОВСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

Ключевые слова: характеристический показатель Ляпунова, экспоненциально убывающие возмущения, коэффициент неправильности.

Объект исследования — линейные системы с экспоненциально убывающими возмущениями. Предметом исследования являются свойства решений и совокупности характеристических показателей таких систем.

Цель диссертации состоит в установлении неустойчивости характеристических показателей линейной n -мерной системы при перроновских возмущениях; получении оценок характеристических показателей линейных дифференциальных систем при экспоненциально убывающих возмущениях.

В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Установлена неустойчивость характеристических показателей линейных трехмерных и более высокого порядка систем при перроновских возмущениях.

2. Доказана достижимость полученных ранее оценок характеристических показателей n -мерных линейных систем с экспоненциально убывающими возмущениями, содержащими класс гробмановских возмущений, а в двумерном случае — и класс перроновских возмущений.

3. Получены оценки снизу характеристических показателей линейной системы с экспоненциально убывающими возмущениями Р. А. Прохоровой, совпадающими в двумерном случае с перроновскими возмущениями.

Работа имеет теоретический характер, ее результаты могут быть использованы в асимптотической теории дифференциальных систем, теории устойчивости и теории показателей Ляпунова.

РЭЗЮМЕ

Батан Сяргей Мікалаевіч

ХАРАКТАРЫСТЫЧНЫЯ ПАКАЗЧЫКІ
ЛІНЕЙНЫХ СІСТЭМ
З ПЯРОНАЎСКІМІ ЎЗРУШЭННЯМІ
І ІХ АБАГУЛЬНЕННЯМІ

Ключавыя словы: характарыстычныя паказчыкі Ляпунова, экспаненцыяльна ўбываючыя ўзрушэнні, каэфіцыент няправільнасці.

Аб'ект даследавання — лінейныя сістэмы з экспаненцыяльна ўбываючымі ўзрушэннямі. Прадметам даследавання з'яўляюцца ўласцівасці рашэнняў і сукупнасці характарыстычных паказчыкаў такіх сістэм.

Мэта дысертацыі — устанаўленне няўстойлівасці характарыстычных паказчыкаў лінейнай n -мернай сістэмы пры пяронаўскіх ўзрушэннях; знаходжанне ацэнак характарыстычных паказчыкаў лінейных дыферэнцыяльных сістэм пры экспаненцыяльна ўбываючых узрушэннях.

У дысертацыйнай рабоце атрыманы наступныя новыя вынікі:

1. Устаноўлена няўстойлівасць характарыстычных паказчыкаў лінейных трохмерных і больш высокага парадку сістэм пры пяронаўскіх узрушэннях.

2. Даказана дасягальнасць атрыманых раней ацэнак характарыстычных паказчыкаў n -мерных лінейных сістэм з экспаненцыяльна ўбываючымі ўзрушэннямі, якія змяшчаюць клас гробманаўскіх узрушэнняў, а ў двумерным выпадку — і клас пяронаўскіх узрушэнняў.

3. Атрыманы ацэнкі знізу характарыстычных паказчыкаў лінейнай сістэмы з экспаненцыяльна спадаючымі ўзрушэннямі Р. А. Прохаравай, якія супадаюць у двумерным выпадку з пяронаўскімі ўзрушэннямі.

Работа мае тэарэтычны характар, яе вынікі могуць быць выкарыстаны ў асімптатычнай тэорыі дыферэнцыяльных сістэм, тэорыі ўстойлівасці і тэорыі паказчыкаў Ляпунова.

SUMMARY

Batan Sergei Nikolaevich

**CHARACTERISTIC EXPONENTS
OF LINEAR SYSTEMS
WITH PERRON PERTURBATIONS
AND THEIR GENERALIZATIONS**

Key words: characteristic Lyapunov exponent, exponentially decreasing perturbations, coefficients of irregularity.

The object of the research is linear systems with exponentially decreasing perturbations. The subject of the research is properties of the solutions and set of characteristic exponents of such systems.

The purpose of the thesis is to prove instability of characteristic exponents of n -dimensional linear systems under exponentially decreasing perturbations.

The following new results were reached through the research:

1. The instability of characteristic exponents of three-dimensional systems and the systems of higher order under Perron perturbations was established.

2. It is proved that it is possible to attain earlier estimates of characteristic exponents of n -dimensional linear systems with exponentially decreasing perturbations which contain Grobman perturbations and Perron perturbations in a two-dimensional case.

3. It is obtained the estimations from below of characteristic exponents of linear systems with exponentially decreasing perturbations by R. A. Prohorova that coincide with Perron perturbations in a two-dimensional case.

The thesis is of theoretical type. The results of the work may be used in asymptotic theory of differential systems, stability theory and theory of Lyapunov exponents.

