Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»
Кафедра математики

СИСТЕМЫ
ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методические рекомендации

Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2023

УДК 512.644(075.8)
ББК 22.143я73
С40

Печатается по решению научно-методического совета учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова». Протокол № 4 от 27.12.2022.

Составитель: доцент кафедры математики ВГУ имени П.М. Машерова, кандидат физико-математических наук, доцент **А.П. Мехович**

Р е ц е н з е н т :
заведующий кафедрой математики ВГУ имени П.М. Машерова,
кандидат физико-математических наук *Т.Б. Караулова*

С40 **Системы линейных уравнений :** методические рекомендации / сост. А.П. Мехович. – Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2023. – 46 с.

В методических рекомендациях рассматриваются теоретические аспекты систем линейных уравнений и методы их решений. Теоретический материал сопровождается рассмотрением примеров. В заключение предложены задачи для самостоятельного решения.

Данное учебное издание адресовано студентам факультета математики и информационных технологий и может быть успешно использовано для подготовки к практическим занятиям, а также для организации самостоятельной работы по дисциплинам «Алгебра», «Алгебра и теория чисел», «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Высшая математика».

УДК 512.644(075.8)
ББК 22.143 я73

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 4

§1. Основные понятия 5
§2. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса 6
§3. Системы линейных однородных уравнений 16
§4. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера. 23
§5. Матричный способ решения систем линейных уравнений 25
§6. Теорема Кронекера-Капелли 27
§7. Задачи 37

ЛИТЕРАТУРА 45

ПРЕДИСЛОВИЕ

Миллионы людей занимаются математическими расчетами, иногда в силу влечения к таинствам математики и ее внутренней красоте, а чаще в силу профессиональной или иной необходимости, не говоря уже об учебе.

Многие теоретические и практические вопросы приводят не к одному уравнению, а к целой системе уравнений с несколькими неизвестными. Особенно важен случай системы линейных алгебраических уравнений. На практике часто имеют дело с заведомо малыми величинами, старшими степенями которых можно пренебречь, так что уравнения с такими величинами сводятся в первом приближении к линейным.

Идею общего метода решения систем линейных уравнений высказал Лейбниц в 1693 году. Она была реализована швейцарским математиком Крамером в 1752 году. Он сформулировал и обосновал правило, носящее теперь его имя, которое позволяет решать системы n линейных уравнений с n неизвестными и буквенными коэффициентами. Крамер, фактически, заложил основы теории определителей, хотя и не предложил для них удобного обозначения (это сделал в 1841 году А. Кэли).

Коэффициенты системы линейных уравнений и свободные члены удобно сводить в таблицы, называемые матрицами системы. Матричный метод решения систем линейных уравнений впервые описан в древнекитайском трактате «Девять книг о математическом искусстве» (II век до н.э.). Система линейных уравнений в этом трактате записывается в виде матрицы, столбцы которой составлены из коэффициентов при неизвестных и свободных членов, и решается методом исключения, впоследствии заново сформулированным Гауссом в 1849 году.

Исследования Вейерштрасса и Фробениуса далеко продвинули теорию матриц, обогатив ее новыми понятиями и задачами. Фробениус, в частности, ввел понятие ранга матрицы (1877 г.). Используя это понятие, Кронекер (1883-91 гг.) и Капелли (1892 г.) дали исчерпывающий ответ на вопрос о том, при каких условиях система m линейных уравнений с n неизвестными имеет решение. Тем самым в конце XIX века было завершено построение общей теории систем линейных уравнений.

В методических рекомендациях рассматриваются теоретические аспекты систем линейных уравнений и методы их решений. Теоретический материал сопровождается рассмотрением примеров. В заключение читателю предложены задачи для самостоятельного решения.

Адресовано студентам факультета математики и информационных технологий ВГУ имени П.М. Машерова и может быть успешно использовано для подготовки к практическим занятиям, а также для организации самостоятельной работы по дисциплинам «Алгебра», «Алгебра и теория чисел», «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Высшая математика».

§ 1. Основные понятия

Системой m линейных уравнений с n неизвестными над полем **P** называется совокупность уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Элементы a_{ij} поля **P** называются ***коэффициентами***, элементы b_i поля **P** называются ***свободными членами*** системы.

Решением системы (1) называется совокупность таких значений неизвестных $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, …, $x_n = \alpha_n$ поля **P**, которые удовлетворяют всем уравнениям (1).

Если система (1) имеет по меньшей мере одно решение, то она называется ***совместной***, а если не имеет решений, то ***несовместной***.

Совместная система линейных уравнений называется ***определенной***, если она имеет только одно решение, и ***неопределенной***, если она имеет бесконечное множество решений.

Две системы линейных уравнений с одними и теми же неизвестными называются ***равносильными***, если каждое решение одной системы является решением и другой или если обе они несовместны (число уравнений в этих двух системах может быть различным).

Составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

из коэффициентов системы (1) и матрицу

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

получающуюся путем присоединения к A столбца из свободных членов. Первая матрица A называется ***матрицей системы*** (1), а вторая матрица B – ***расширенной матрицей системы*** (1).

Линейное уравнение называется ***однородным***, если в нем свободный член равен нулю. Система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

в которой все уравнения однородные, называется ***однородной системой линейных уравнений.***

§2. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Рассмотрим один из распространенных методов решения системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

известный под названием ***метода Гаусса*** или метода последовательного исключения неизвестных. Сущность метода Гаусса заключается в том, что расширенную матрицу B приводят к ступенчатому виду B_1 и вместо системы линейных уравнений (1) рассматривают систему с расширенной матрицей B_1, т.е. так называемую ступенчатую систему линейных уравнений. Ниже покажем, что эта ступенчатая система равносильна первоначальной системе (1), и ее решение находится несравненно легче.

Подвергая расширенную матрицу B тому или иному элементарному преобразованию строк, мы будем подвергать аналогичному преобразованию и уравнения системы (1). Так, если мы умножаем i-ю строку матрицы B на число $c \neq 0$, то умножим на это число и i-е уравнение системы; если в матрице B переставляются i-я и j-я строки, то в системе (1) будут соответственно переставляться i-е и j-е уравнения; если к i-й строке матрицы B прибавляется ее j-я строка, умноженная на некоторое число κ, то к i-му уравнению системы (1) будет прибавляться почленно ее j-е уравнение, умноженное на то же самое число k. При выбрасывании нулевой строки матрицы B из системы (1) будет выбрасываться уравнение типа $0 \cdot x = 0$, т.е. уравнение, у которого все коэффициенты при неизвестных и свободный член равны нулю.

Покажем теперь, что *при каждом элементарном преобразовании строк матрицы В и при выбрасывании нулевой строки получается система линейных уравнений, равносильная первоначальной системе* (1).

Доказательство. 1) Поменяем в расширенной матрице B две какие-нибудь строки. Тогда в системе (1) мы поменяем местами два соответствующих уравнения, и совершенно очевидно, что такое преобразование данную систему (1) переведет в равносильную систему.

2) Умножим i-ю строку расширенной матрицы B на число $c \neq 0$. Тогда обе части i-го уравнения $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$ системы (1) умножатся на число $c \neq 0$, и получаем систему линейных уравнений, отличающуюся от первоначальной системы (1) только i-м уравнением $ca_{i1}x_1 + ca_{i2}x_2 + \ldots + ca_{in}x_n = cb_i$.

Таким образом, если $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, …, $x_n = \alpha_n$ – решение системы (1), то эти значения $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ неизвестных будут удовлетворять всем уравнениям системы (1), и в частности будет $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n = b_i$. Умножая обе части этого равенства на c, получаем $ca_{i1}\alpha_1 + ca_{i2}\alpha_2 + \ldots + ca_{in}\alpha_n = cb_i$, т.е. значения $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ неизвестных x_1, x_2, …, x_n удовлетворяют i-му уравнению преобразованной системы; они удовлетворяют также и остальным уравнениям преобразованной системы, поскольку эти уравнения в преобразованной системе те же, что и в первоначальной. Отсюда видим, что всякое решение первоначальной системы (1) является решением преобразованной системы.

В свою очередь, подвергая преобразованную систему линейных уравнений элементарному преобразованию того же типа, а именно, умножая обе части ее i-го уравнения на число $\frac{1}{c}$, получим систему (1). Таким образом, аналогично предыдущему получается, что всякое решение преобразованной системы является решением и первоначальной системы (1).

3) Прибавим к i-й строке расширенной матрицы B ее j-ю строку, умноженную на некоторое число k. Тогда к i-му уравнению $a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n=b_i$ системы (1) будет прибавляться почленно ее j-е уравнение $a_{j1}x_1+\cdots+a_{jn}x_n=b_j$ умноженное на число k. В преобразованной таким образом системе все уравнения, кроме i-го, будут теми же, что и в первоначальной системе (1), а i-е уравнение будет выглядеть так

$$\left(a_{i1}+ka_{j1}\right)x_1+\cdots+\left(a_{in}+ka_{jn}\right)x_n=b_i+kb_j.$$

Если теперь $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$, …, $x_n=\alpha_n$ – решение системы (1), то

$$a_{i1}\alpha_1+\cdots+a_{in}\alpha_n=b_i \tag{2}$$

$$a_{j1}\alpha_1+\cdots+a_{jn}\alpha_n=b_j \tag{3}$$

и прибавляя почленно к равенству (2) равенство (3), умноженное на k, получаем:

$$\left(a_{i1}+ka_{j1}\right)\alpha_1+\cdots+\left(a_{in}+ka_{jn}\right)\alpha_n=b_i+kb_j,$$

т.е. значения $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ неизвестных $x_1,\dots,x_n$ удовлетворяют и i-му уравнению преобразованной системы. Отсюда следует, что всякое решение системы (1) является решением и преобразованной системы.

Обратно, всякое решение преобразованной системы является решением системы (1), так как, прибавляя к i-му уравнению преобразованной системы ее j-е уравнение, умноженное на – k, получим систему (1). Таким образом, и при таком элементарном преобразовании система линейных уравнений (1) переходит в равносильную систему.

4) Пусть в расширенной матрице B имеется нулевая строка. Выбросим ее. Тогда в системе (1) будет выбрасываться уравнение типа $0\cdot x=0$. Такое уравнение, очевидно, удовлетворяется любыми значениями неизвестных $x_1,\dots,x_n$ и потому это уравнение можно отбросить, не нарушая равносильности системы.

Из только что доказанного следует, что ступенчатая система линейных уравнений, получающаяся в процессе приведения расширенной матрицы B к ступенчатому виду, равносильна первоначальной системе (1).

Покажем далее, что *ступенчатая система линейных уравнений несовместна, если последняя строка ее матрицы A_1 из коэффициентов является нулевой.*

Действительно, в этом случае последняя строка расширенной матрицы B_1 ступенчатой системы имеет вид 0 0 … 0 b, где $b \neq 0$, т.е. последнее уравнение ступенчатой системы будет типа $0 \cdot x = b$ (все коэффициенты при неизвестных равны нулю, а свободный член отличен от нуля). При любых значениях неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ левая часть такого уравнения будет равна нулю, а правая часть отлична от нуля. Следовательно, никакой набор значений неизвестных не может удовлетворять этому уравнению, а потому ступенчатая система линейных уравнений несовместна.

Рассмотрим теперь случай, когда последняя строка матрицы A_1 из коэффициентов ступенчатой системы ненулевая. Оказывается, что *в этом случае ступенчатая система линейных уравнений уже совместна, причем она является определенной в том и только в том случае, когда число строк ее расширенной матрицы B_1 равно числу n неизвестных.*

Доказательство.

1) Пусть число строк матрицы B равно числу n неизвестных. Тогда ступенчатая система линейных уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n = b''_3, \\ \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}, \end{cases} \tag{4}$$

где $a_{11} \neq 0$, $a'_{22} \neq 0$, $a''_{33} \neq 0, \ldots, a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$ (так называемый треугольный вид).

Из последнего уравнения системы (4) получаем для неизвестного x_n, единственное значение: $x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} = \alpha_n$. Подставляя значение α_n в предпоследнее уравнение системы (4), получаем и для неизвестного x_{n-1} единственное значение α_{n-1} и т. д. Действуя так, дойдем до первого уравнения системы (4) и, подставляя в это уравнение найденные ранее значения $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ неизвестных, $x_2, \ldots, x_n$ найдем для x_1, единственное значение α_1. Отсюда видим, что ступенчатая система (4) имеет единственное решение $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_n = \alpha_n$.

2) Число строк матрицы B_1 меньше n числа неизвестных. Тогда ступенчатая система линейных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} a_{1k_1}x_1 + \cdots + a_{1k_2}x_2 + \cdots + a_{1k_j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{2k_2}x_{k_2} + \cdots + a'_{2k_j}x_{k_j} + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_1, \\ \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ \qquad\qquad a_{jk_j}^{(j-1)}x_{k_j} + \cdots + a_{jn}^{(j-1)}x_n = b_j^{(j-1)} \quad , \end{cases} \tag{5}$$

где $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_j \leq n$, $a_{1k_1} \neq 0, a'_{2k_2} \neq 0, \ldots, a_{jk_j}^{(j-1)} \neq 0$.

Неизвестные $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_i}$, называют ***главными***, а остальные неизвестные ***свободными***. Возьмем для свободных неизвестных произвольные числовые значения. Тогда поднимаясь по системе (5) снизу-вверх, мы, как и выше, получим однозначно определенные значения для главных неизвестных. Так как для свободных неизвестных значения можно выбрать бесконечным множеством различных способов, то, таким образом, получается бесконечное множество решений системы (5), т.е. система (5) оказывается неопределенной.

Мы знаем, что система линейных уравнений (1) равносильна ступенчатой системе, получающейся в процессе приведения расширенной матрицы B к ступенчатому виду B_1. *Следовательно, система* (1) *тогда и только тогда совместна, когда последняя строка матрицы A_1, ступенчатой системы является ненулевой. А в случае совместности система* (1) *тогда и только тогда является определенной, когда число строк матрицы ступенчатого вида B_1 равно числу n неизвестных.*

Впрочем, решение определенной системы можно получить еще более элегантным способом. А именно, всегда можно в этом случае ступенчатую матрицу B_1 подвергнуть дальнейшим элементарным преобразованиям так, чтобы до вертикальной черты получилась матрица, у которой элементы главной диагонали равны 1, а остальные элементы равны нулю

$$E = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 0 \ldots 0 \\ 0\ 1\ 0 \ldots 0 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ 0\ 0\ 0 \ldots 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно сообразить, что тогда в столбце, стоящем за вертикальной чертой, появится решение данной системы. Указанный способ решения системы называется методом ***Жордана-Гаусса*** или методом полного исключения неизвестных.

Пример 1. Решите методом Жордана-Гаусса систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = -2, \\ -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 13. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы и будем проводить элементарные преобразования ее строк. Для большого удобства мы свободные члены будем отделять вертикальной чертой

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -4 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & -7 & -5 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -4 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 13 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-8&-7&-5&5\\0&19&17&11&-12\\0&-19&-18&-12&12\\0&25&19&18&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-8&-7&-5&5\\0&19&17&11&-12\\0&0&-1&-1&0\\0&25&19&18&-2\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-8&0&2&5\\0&19&0&-6&-12\\0&0&-1&-1&0\\0&25&0&-1&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-8&0&2&5\\0&-131&0&0&0\\0&0&-1&-1&0\\0&25&0&-1&-2\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-8&0&2&5\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&25&0&-1&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&2&5\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&-1&-2\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-2\\0&0&0&-1&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-2\\0&0&0&1&2\end{array}\right)=B_1.$$

Матрица B приведена к ступенчатому виду B_1, ее ранг равен 4. Одновременно к ступенчатому виду A_1 приведена и матрица системы A:

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Система, соответствующая матрице B_1, имеет вид:

$$\begin{cases}x_1 & & & &=1,\\ & x_2 & & &=0,\\ & & x_3 & &=-2,\\ & & & x_4&=2.\end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих метод Гаусса.

Пример 2. Решите систему

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\x_1+x_2+2x_3+x_4=0,\\x_1+x_2-x_3+x_4=3.\end{cases}$$

Составляем расширенную матрицу системы и приводим ее к ступенчатому виду. Для большого удобства мы свободные члены будем отделять вертикальной чертой

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\1&1&2&1&0\\1&1&-1&1&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&0&1&0&-1\\0&0&-2&0&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Отбрасывая нулевую строку, получаем ступенчатый вид B_1 матрицы B

$$B_1=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&0&1&0&-1\end{array}\right).$$

Следовательно, данная система является совместной, а именно неопределенной. Главными неизвестными являются x_1 и x_3, а неизвестные x_2 и x_4 – свободными.

Составляем ступенчатую систему линейных уравнений, равносильную первоначальной системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ \qquad\qquad x_3 \quad = -1. \end{cases}$$

Подставляем в первое уравнение ступенчатой системы значение –1 неизвестного x_3 из ее второго уравнения и выражаем x_1 через свободные неизвестные: $x_1 = 2 - x_2 - x_4$.Таким образом,

$$x_1 = 2 - x_2 - x_4, x_3 = -1. \qquad (6)$$

Этим можно ограничиться, так как, давая свободным неизвестным x_2 н x_4 произвольные значения, будем иметь всевозможные решения данной системы.

Попутно заметим, что ***общим решением*** неопределенной системы линейных уравнений называется такая равносильная система, в которой какие-то неизвестные $x_{k_1}, \dots, x_{k_s}$ выражаются через остальные неизвестные. Эти неизвестные $x_{k_1}, \dots, x_{k_s}$обычно называются ***главными***, а остальные неизвестные ***свободными***. Таким образом, равенства (6) представляют собой общее решение системы уравнений примера 2.

Ответ: $x_1 = 2 - x_2 - x_4, x_3 = -1, x_2, \ x_4$ – свободные неизвестные.

Пример 3. Решите систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Составляем расширенную матрицу и приводим ее к ступенчатому виду. Ход вычисления ясен из самой записи

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right); \ B_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Получился ступенчатый вид, у которого число строк равно 3, т.е. числу неизвестных. Следовательно, данная система является определенной. Составляем ступенчатую (здесь треугольную) систему линейных уравнений с расширенной матрицей B_1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ \qquad x_2 + 4x_3 = 5, \\ \qquad\qquad x_3 = 1. \end{cases}$$

Двигаясь снизу вверх последовательно, находим, что $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

Пример 4. Решите систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Составляем расширенную матрицу и подвергаем ее строки следующим преобразованиям:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right);$$

$$B_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Элементы матрицы B_1 ступенчатого вида, расположенные левее вертикальной черты, образуют матрицу

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с нулевой строкой. Следовательно, данная система несовместна.

Ответ: система несовместна.

Пример 5. Решите над полем **Q** систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$$

Пользуясь элементарными преобразованиями, приведем систему к ступенчатому виду. Для этого первое уравнение умножим на (–1) и прибавим ко второму. Затем первое уравнение умножим на (–3) и прибавим к третьему. И, наконец, первое уравнение умножим на (–2) и прибавим к четвертому:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_2 - 10x_3 + 17x_4 = -2, \\ -x_2 + 10x_3 - 17x_4 = 2, \\ -x_2 + 10x_3 - 17x_4 = 2. \end{cases}$$

Второе уравнение прибавим к третьему и четвертому:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_2 - 10x_3 + 17x_4 = -2, \\ 0 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Последние два уравнения превратились в уравнения вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0.$$

Этим уравнениям удовлетворяют любые значения неизвестных. Поэтому два последних уравнения можно убрать.

Придадим неизвестным x_3 и x_4 произвольные значения из поля

$x_3 = \lambda_3, x_4 = \lambda_4$. Тогда из второго уравнения x_2 находится однозначно:

$x_2 = 10\lambda_3 - 17\lambda_4 - 2$. Из первого уравнения x_1 также находится однозначно:

$x_1 = -2(10\lambda_3 - 17\lambda_4 - 2) + 3\lambda_3 - 5\lambda_4 + 1 = -17\lambda_3 + 29\lambda_4 + 5.$

Так как последняя система равносильна исходной, то формулы

$$\begin{cases} x_1 = -17\lambda_3 + 29\lambda_4 + 5, \\ x_2 = 10\lambda_3 - 17\lambda_4 - 2, \\ x_3 = \lambda_3, \\ x_4 = \lambda_4 \end{cases}$$

при произвольных λ_3 и λ_4 дают нам все решения заданной системы.

Ответ: система имеет бесконечно много решений, которые определяются формулами

$$\begin{cases} x_1 = -17\lambda_3 + 29\lambda_4 + 5, \\ x_2 = 10\lambda_3 - 17\lambda_4 - 2, \\ x_3 = \lambda_3, \\ x_4 = \lambda_4. \end{cases}$$

Пример 6. Решите над полем **Q** систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11. \end{cases}$$

Так как каждому элементарному преобразованию системы соответствует элементарное преобразование расширенной матрицы этой системы, то можно оперировать с расширенной матрицей.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 9 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -40 \\ 0 & 0 & -18 & 54 & -47 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -7 \end{pmatrix}.$$

Здесь произведены следующие элементарные преобразования. Первую строку исходной матрицы умножали на (–2), (–3), (–2) и складывали со второй, третьей и четвертой строками соответственно. В результате получили вторую матрицу. Во второй матрице ко второй строке прибавили третью, умноженную на (–1), а затем получившуюся вторую строку умножили на (–1). Пришли к третьей матрице. В третьей матрице вторую строку умножали на 4 и 7 и складывали с третьей и четвертой строками соответственно. Получили четвертую матрицу. В этой матрице третью строку умножили на (–1) и прибавили к четвертой строке. В итоге получили пятую матрицу.

Таким образом, начальная система равносильна следующей системе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_2 - 2x_3 + 7x_4 = -8, \\ -18x_3 + 36x_4 = -40, \\ 18x_4 = -7. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$x_4 = -\frac{7}{18},\ x_3 = \frac{13}{9},\ x_2 = -\frac{43}{18},\ x_1 = \frac{2}{3}.$

Легко проверить, что эти значения превращают каждое уравнение исходной системы в верное равенство.

Ответ: система имеет единственное решение

$$x_1 = 2/3,\ x_2 = -43/18,\ x_3 = 13/9,\ x_4 = -7/18.$$

Пример 7. Решите над полем **C** систему

$$\begin{cases} x_1 - 2ix_2 - (3 - 2i)x_3 = -1, \\ 2ix_1 - x_2 + 3x_3 = 3i, \\ -ix_1 + 3x_2 + ix_3 = -4i. \end{cases}$$

Так как каждому элементарному преобразованию системы соответствует элементарное преобразование расширенной матрицы этой системы, то можно оперировать с расширенной матрицей.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2i & -3+2i & -1 \\ 2i & -1 & 3 & 3i \\ -i & 3 & i & -4i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2i & -3+2i & -1 \\ 0 & -5 & 7+6i & 5i \\ 0 & 5 & -2-2i & -5i \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2i & -3+2i & -1 \\ 0 & -5 & 7+6i & 5i \\ 0 & 0 & 5+4i & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь произведены следующие элементарные преобразования. Первую строку матрицы умножали на $(-2i)$, i и складывали со второй и третьей строками соответственно. В результате получили вторую матрицу. Во второй матрице к третьей строке прибавили вторую. В результате получили матрицу B. Таким образом, исходная система равносильна следующей ступенчатой системе

$$\begin{cases} x_1 - 2ix_2 + (-3 + 2i)x_3 = -1, \\ -5x_2 + (7 + 6i)x_3 = 5i, \\ (5 + 4i)x_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x_3 = 0$, $x_2 = -i$, $x_1 = 1$. Легко проверить, что эти значения неизвестных превращают каждое уравнение исходной системы в верное равенство.

Ответ: система имеет единственное решение $x_1 = 1,\ x_2 = -i,\ x_3 = 0$.

Пример 8. Решите над полем **R** систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5, \\ 3x_1 + 3x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Приведем расширенную матрицу этой системы к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -10 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная система равносильна следующей системе

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2, \\ -3x_2 + 8x_3 - 11x_4 = 9, \\ 10x_3 - 20x_4 = 18, \\ 0 = 2. \end{cases}$$

Последнее уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 2$ не может быть удовлетворено никакими значениями значениями неизвестных. Поэтому система несовместна.

Ответ: система несовместна.

§ 3. Системы линейных однородных уравнений

Рассмотрим случай системы линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1}$$

С первого взгляда видно, что решением системы (1) является $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Таким образом, система линейных однородных уравнений *всегда совместна*.

Но помимо решения $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$, называемого ***нулевым*** или ***тривиальным***, система (1) может иметь другие решения, в которых по меньшей мере одно неизвестное имеет значение, отличное от нуля (так называемые ненулевые или нетривиальные решения), а именно имеет место следующее утверждение.

Если ранг матрицы A системы линейных однородных уравнений (1) *равен числу неизвестных (r = n), то система* (1) *имеет только нулевое решение. Если ранг матрицы A меньше числа неизвестных (r < n), то, помимо нулевого, система* (1) *имеет бесконечное множество других (ненулевых) решений.*

В самом деле, если $r = n$, то система (1) имеет единственное, а именно нулевое, решение $x_1 = 0, \ \ldots, \ x_n = 0$. Если же $r < n$, то $n - r$ неизвестных будут свободными, и система будет иметь, помимо нулевого, бесконечное множество других решений.

В частности, когда число уравнений системы (1) равно числу неизвестных, для существования ненулевых решений необходимо и достаточно, чтобы определитель системы (1) был равен нулю, так как в этом случае ранг системы (1) тогда и только тогда меньше неизвестных n, когда определитель системы равен нулю.

Условимся теперь понимать под суммой $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)+(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ двух однострочных матриц $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ из n элементов матрицу $(\alpha_1+\beta_1, \ldots, \ \alpha_n + \beta_n)$, под разностью $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) - (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ – матрицу $(\alpha_1-\beta_1, \ldots, \ \alpha_n - \beta_n)$ и под произведением $c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ матрицы $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ на число c – матрицу $(c\alpha_1, \ldots, c\alpha_n)$. Рассматривая решение системы линейных однородных уравнений как однострочную матрицу из n элементов, мы можем высказать следующее важное свойство.

Сумма $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *и разность* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) - (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, *решений* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *системы линейных однородных уравнений* (1) *есть также решение этой системы и произведение* $c(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *решения* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *на произвольное число с есть также решение системы* (1).

В самом деле, непосредственно видно, что

$$a_{i1}(\alpha_1 \pm \beta_1) + \dots + a_{in}(\alpha_n \pm \beta_n) =$$
$$= (a_{i1}\alpha_1 + \dots + a_{in}\alpha_n) \pm (a_{i1}\beta_1 + \dots + a_{in}\beta_n) = 0 \pm 0 = 0,$$
$$a_{i1}(\mathrm{c}\alpha_1) + \dots + a_{in}(\mathrm{c}\alpha_n) = \mathrm{c}(a_{i1}\alpha_1 + \dots + a_{in}\alpha_n) = \mathrm{c}0 = 0,$$

$i = 1, 2, \dots, m$.

Пусть

$$\begin{cases} a_{i1}x + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \\ \qquad (\mathrm{i} = 1,2,\dots,\mathrm{m}). \end{cases} \qquad (2)$$

система линейных уравнений, в которой по меньшей мере один свободный член b_i, не равен нулю. Такую систему называют ***неоднородной***. Составим систему линейных однородных уравнений, заменяя в системе (2) свободные члены $b_1, b_2, \dots, b_m$ нулями

$$\begin{cases} a_{i1}x + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = 0, \\ \\ \qquad (\mathrm{i} = 1,2,\dots,\mathrm{m}). \end{cases} \qquad (3)$$

Система (3) называется ***приведенной*** для первоначальной системы (2).

Оказывается, что между решениями основной и приведенной системы существует следующая связь.

Теорема 1. *Если складывать какое-нибудь решение совместной системы неоднородных уравнений* (2) *с любыми решениями приведенной системы* (3)*, то получатся все решения системы* (2).

Доказательство. Пусть $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ – решение системы (2) и $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – произвольное решение приведенной системы (3). Тогда $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n)$ будет решением системы (2). В самом деле,

$$a_{i1}(\alpha_1 + \beta_1) + \dots + a_{in}(\alpha_n + \beta_n) =$$
$$= (a_{i1}\alpha_1 + \dots + a_{in}\alpha_n) + (a_{i1}\beta_1 + \dots + a_{in}\beta_n) = 0 + b_i = b_i.$$

Обратно, пусть $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ – произвольное решение системы (2).Тогда $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) - (\beta_1, \dots, \beta_n)$ – будет решением приведенной системы (3)

$$a_{i1}(\gamma_1 - \beta_1) + \dots + a_{in}(\gamma_n - \beta_n) =$$
$$= (a_{i1}\gamma_1 + \dots + a_{in}\gamma_n) - (a_{i1}\beta_1 + \dots + a_{in}\beta_n) = b_i - b_i = 0.$$

Таким образом,

$(\gamma_1, \dots, \gamma_n) - (\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – некоторое решение приведенной системы (3) и $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n)$. Это и требовалось доказать.

Пусть $C_1, C_2, \dots, C_к$ – вектор-решения системы однородных линейных уравнений, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_к$ – некоторые числа. Тогда

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_к C_к$$

называется ***линейной комбинацией вектор-решений*** $C_1, C_2, \dots, C_к$, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_к$ – ***коэффициентами этой комбинации***.

Вектор-решения C_1, C_2, …, $C_к$ называются ***линейно-зависимыми***, если хотя бы одно из них является линейной комбинацией остальных. В противном случае эти вектор-решения называются ***линейно-независимыми***.

Фундаментальной системой решений системы однородных линейных уравнений называется совокупность максимального числа линейно-независимых вектор-решений.

Это определение можно сформулировать следующим эквивалентным образом: множество всех решений системы линейных однородных уравнений образует векторное пространство, и базис этого пространства называется фундаментальной системой решений данной системы уравнений.

Отметим, что однородная система линейных уравнений, имеющая только нулевое решение, не имеет фундаментальной системы решений.

Любые две фундаментальные системы решений однородной системы линейных уравнений состоят из одинакового числа решений.

В самом деле, любые две фундаментальные системы решений однородной системы уравнений (1) эквивалентны и линейно независимы. Поэтому их ранги равны. Следовательно, число решений, входящих в одну фундаментальную систему, равно числу решений, входящих в любую другую фундаментальную систему решений.

Теорема 2. *Если ранг r основной матрицы однородной системы линейных уравнений* (1) *меньше числа переменных n, то система (1) обладает фундаментальной системой решений, состоящей из n-r решений.*

Доказательство. Если ранг основной матрицы A однородной системы (1) равен нулю или n, то теорема верна. Поэтому ниже предполагается, что $0 < r(A) < n$. Полагая $r = r(A)$, будем считать, что первые r столбцов матрицы A линейно независимы. В этом случае матрица A строчечно эквивалентна приведенной ступенчатой матрице, а система (1) равносильна следующей приведенной ступенчатой системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - \qquad\qquad \ldots - \gamma_{11}x_{r+1} - \cdots - \gamma_{1,n-r}x_n = 0, \\ \qquad x_2 - \cdots - \gamma_{21}x_{r+1} - \cdots - \gamma_{2,n-r}x_n = 0, \\ \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ \qquad\qquad x_r - \gamma_{r1}x_{r+1} - \cdots - \gamma_{r,n-r}x_n = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Легко проверить, что любой системе значений свободных переменных $x_{r+1}, \ldots, x_n$ системы (4) соответствует одно и только одно решение системы (4) и, значит, системы (1). В частности, системе нулевых значений x_{r+1}=0,…, $x_n = 0$ соответствует только нулевое решение системы (4) и системы (1).

Будем в системе (4) придавать одному из свободных переменных значение, равное 1, а остальным переменным – нулевые значения. В результате получим n–r решений системы уравнений (4), которые запишем в виде строк следующей матрицы

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \dots & \gamma_{r1} & 1\ 0 \dots 0 \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{r2} & 0\ 1 \dots 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ \gamma_{1n-r} & \gamma_{2n-r} & \dots & \gamma_{r,n-r} & 0\ 0 \dots 1 \end{pmatrix}.$$

Система строк C_1, C_2, …, C_{n-r} – этой матрицы линейно независима. В самом деле, для любых скаляров $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}$ из равенства

$\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_{n-r} C_{n-r} = (0,0, \dots ,0)$

следует равенство

$(\dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-r}) = (0,0, \dots ,0)$

и, значит, равенства

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_{n-r} = 0.$$

Докажем, что линейная оболочка системы строк матрицы C совпадает с множеством всех решений системы (1).

Пусть

$\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n)$ –

произвольное решение системы (1). Тогда вектор

$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - (\alpha_{r+1} C_1 + \alpha_{r+2} C_2 + \dots + \alpha_n C_{n-r})$

также является решением системы (1), причем

$\boldsymbol{d} = (\delta_1, \dots, \delta_r, 0, 0, \dots, 0)$;

это решение соответствует нулевым значениям свободных переменных $x_{r+1}, \dots x_n$. Поэтому $\boldsymbol{d}$ является нулевым решением системы (4) и системы (1). Следовательно,

$\boldsymbol{a} = \alpha_{r+1} C_1 + \dots + \alpha_n C_{n-r} \in L(C_1, \dots, C_{n-r})$

Итак, доказано, что множество всех решений системы (1) совпадает с линейной оболочкой системы векторов $C_1, \dots, C_{n-r}$. Следовательно, эта система $n - r$ векторов является фундаментальной системой решений для системы уравнений (1).

Следствие 3. *Пусть* $\boldsymbol{d}$ *– решение неоднородной системы линейных уравнений* (*над полем* **P**)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{5}$$

и $C_1, \dots, C_{n-r}$ *– фундаментальная система решений однородной системы уравнений* (1). *Тогда множество*

$$\{\boldsymbol{d} + \alpha_1 C_1 + \dots + \lambda_{n-r} C_{n-r} | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-r} \in \mathbf{P}\}$$

является множеством всех решений системы (5).

Пример 1. Найти фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Однородная система линейных алгебраических уравнений с помощью элементарных преобразований может быть приведена к ступенчатому виду

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 - 2x_4 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Неизвестные x_1 и x_2 объявляем главными переменными, x_3, x_4 и x_5 – свободными. Ранг матрицы равен 2, число неизвестных равно 5. Размерность пространства решений этой однородной системы равна 3. Для нахождения ФСР составляем таблицу, количество столбцов которой соответствует количеству неизвестных (то есть для рассматриваемого примера равно 5), а количество строк равно количеству решений ФСР (то есть имеем три строки). Далее свободным переменным придаются любые, одновременно не равные нулю значения и из зависимости между свободными и связанными переменными находятся значения остальных переменных. Для рассматриваемой задачи эта зависимость имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + 3x_4 - x_5, \\ x_2 = 2x_4\ . \end{cases}$$

Придавая в первом случае, например, независимым переменным значения $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ и $x_5 = 0$, получаем

Решение	Переменные				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
X_1	–1	0	1	0	0
X_2					
X_3					

Во втором случае $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ и $x_5 = 0$

Решение	Переменные				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
X_1	–1	0	1	0	0
X_2	3	2	0	1	0
X_3					

И, наконец, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ и $x_5 = 1$

Решение	Переменные				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
X_1	–1	0	1	0	0
X_2	3	2	0	1	0
X_3	–1	0	0	0	1

Или в виде матриц-столбцов

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

которые образуют пространство решений данной системы, то есть образуют её фундаментальную систему решений.

Ответ:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти фундаментальную систему решений и записать структуру общего решения

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Записываем матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 12 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вычитаем из второй строки первую, умноженную на 3. Вычитаем из третьей строки первую, умноженную на 2. Получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A равен двум. Размерность пространства решений равна 4-2=2, то есть фундаментальная система решений состоит из двух линейно независимых решений. Неизвестные x_1 и x_3 объявляем базисными, неизвестные x_2 и x_4 – свободными. Запишем систему уравнений и перенесем свободные переменные в правую часть. Получим

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 14x_4, \\ x_3 = \dfrac{10}{3} x_4. \end{cases}$$

Рассматриваем первый набор свободных неизвестных $x_2 = 1$ и $x_4 = 0$, получаем первое решение $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Рассматриваем второй набор свободных неизвестных $x_2 = 0$ и $x_4 = 1$, получаем второе решение $X_2 = \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ \frac{10}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решения X_1, X_2 образуют фундаментальную систему решений, вид общего решения следующий: $X = C_1X_1 + C_2X_2 = C_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ \frac{10}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Ответ: фундаментальная система решений: $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ \frac{10}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, общее решение: $X = C_1X_1 + C_2X_2 = C_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ \frac{10}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

§4. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера

Рассмотрим случай системы n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Будем считать, что определитель системы, т.е. определитель матрицы, составленной из коэффициентов a_{ik} системы, отличен от нуля (такая система называется ***невырожденной***)

$$\Delta = |a_{ik}| \neq 0. \qquad (2)$$

Система линейных уравнений называется ***крамеровской***, если число уравнений системы равно числу неизвестных и определитель матрицы системы отличен от нуля.

Умножим обе части уравнений системы (1) на алгебраические дополнения элементов k-го столбца этого определителя, т.е. обе части первого уравнения системы умножим на A_{1k}, второго на A_{2k} и т.д. Полученные таким образом уравнения сложим. В результате мы придем к уравнению, в правой части которого стоит сумма

$$A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \cdots + A_{nk}b_n\ ,$$

а в левой части коэффициент при неизвестном x_l, выражается суммой

$$A_{1k}a_{1l} + A_{2k}a_{2l} + \cdots + A_{nk}a_{nl}\ \ ,\ (l = 1, 2, \ldots, n).$$

Эта последняя сумма равна нулю при $l \neq k$ и определителю Δ при $l = k$, т.е. мы приходим к уравнению вида:

$$\Delta \cdot x_k = A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \cdots + A_{nk}b_n.$$

Проделав это для каждого индекса k, мы, как следствие уравнений (1), получим систему новых уравнений

$$\Delta \cdot x_k = A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \cdots + A_{nk}b_n\ \ (k=1, 2, \ldots, n). \qquad (3)$$

Нетрудно показать, что и, наоборот, из системы (3), как следствие, получается система (1). Действительно, умножим обе части уравнения (3) на a_{lk} и просуммируем затем по всем k от 1 до n. Пользуясь свойствами определителя, приходим к уравнению

$$\Delta \cdot (a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \cdots + a_{ln}x_n) = \Delta \cdot b_i, \qquad (4)$$

что, после сокращения на множитель Δ, отличный от нуля, даст нам уравнение с номером l системы (1), причем мы можем это проделать для любого l. Итак, системы (1) и (3) равносильны, и мы можем вместо системы (1) решать систему (3). Последняя система решается непосредственно и дает одно и только одно решение, вычисляемое по формулам

$$x_k = \frac{A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \cdots + A_{nk}b_n}{\Delta} = \frac{\Delta x_k}{\Delta},\ (k=1, 2, \ldots, n). \qquad (5)$$

Заметим, что числитель написанного выражения представляет собою определитель, который получается из определителя Δ заменой элементов

k-го столбца, т.е. коэффициентов a_{ik} при x_k, свободными членами b_i. Таким образом, доказана следующая

Теорема Крамера. *Если определитель* Δ *системы* (1) *отличен от нуля, то эта система имеет одно определенное решение, выражаемое формулами* (5). *Согласно этим формулам каждое из неизвестных выражается частным двух определителей, причем в знаменателе стоит определитель системы, а в числителе – определитель, который из него получается заменой коэффициентов при определяемом неизвестном соответствующими свободными членами.*

Пример 1. Решить систему по формулам Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8, \\ 2x_2 + 7x_3 = 17. \end{cases}$$

Вычислим $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 79.$

Последовательно заменив в Δ первый, второй и третий столбцы столбцом свободных членов, получим

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 17 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 395, \quad x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{395}{79} = 5,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix} = -158, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-158}{79} = -2,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 237, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{237}{79} = 3.$$

Ответ: $x_1 = 5, x_2 = -2, x_3 = 3.$

Значение правила Крамера заключается главным образом в том, что в тех случаях, когда это правило применимо, оно дает явное выражение для решения системы через коэффициенты этой системы. Практическое использование правила Крамера связано, однако, с весьма громоздкими вычислениями: в случае системы n линейных уравнений с n неизвестными приходится вычислять n +1 определитель n-го порядка. Метод Гаусса является в этом отношении много более удобным, так как вычисления, которых этот метод требует, по существу равносильны тем, которые приходится выполнить при вычислении о д н о г о определителя n-го порядка.

§5. Матричный способ решения систем линейных уравнений

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} -$$

матрица крамеровской системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} -$$

вектор-столбец из неизвестных,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} -$$

вектор-столбец из свободных членов. Произведение матриц A и X определено, так как в матрице A столбцов столько же, сколько строк в матрице X. Найдем его.

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \dots & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \dots & a_{2n}x_n \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \dots & a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, систему (1) можно записать матричном виде $AX=B$.

Так как определитель матрицы A отличен от нуля, то она имеет обратную матрицу A^{-1}. Умножим обе части последнего уравнения слева на матрицу A^{-1}

$$A^{-1}(AX)= A^{-1} B.$$

Ввиду ассоциативности умножения матриц имеем

$$A^{-1}(AX)= (A^{-1}A)X=EX=X.$$

Таким образом,

$$X=A^{-1} B. \tag{2}$$

Отыскание решения системы (1) по формуле (2) называют матричным способом решения системы.

Пример 1. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 2 - 4 \; 1 \\ 1 - 5 \; 3 \\ 1 - 1 \; 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу к матрице A

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$

Пример 2. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

В матричной форме решение системы имеет вид $X = A^{-1}B$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -7 & 7 & 0 \\ 10 & -6 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -7 & 7 & 0 \\ 10 & -6 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

откуда $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

§6. Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} -$$

матрица системы (1), а

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} -$$

расширенная матрица системы (1).

В теории систем линейных уравнений важную роль играет следующий критерий совместности.

Теорема Кронекера-Капелли. *Система линейных уравнений* (1) *совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы B системы, причем в случае совместности система* (1) *является определенной, когда ранг матрицы A (или, то же, ранг B) равен числу n неизвестных, и неопределенной, когда этот ранг меньше n.*

Доказательство. 1) Если система (1) несовместна, то элементы матрицы B_1 ступенчатого вида расширенной матрицы B, расположенные левее вертикальной черты (т.е. левее последнего столбца матрицы B_1), образуют матрицу A_1, последняя строка которой является нулевой. При этом ранг матрицы B_1 равен числу r ее строк, а ранг матрицы A_1 равен $(r-1)$, так как при отбрасывании нулевой строки матрица A_1 становится ступенчатой. С другой стороны, матрица B_1 получается из матрицы B (и A_1 из матрицы A) с помощью элементарных преобразований строк и выбрасывания нулевой строки. Следовательно, ранг матрицы B должен равняться рангу матрицы B_1, а ранг матрицы A должен равняться рангу матрицы A_1. Таким образом, ранг расширенной матрицы B системы (1) равен r, а ранг матрицы A системы (1) равен $r-1$, т.е. не равен рангу матрицы B.

2) Если система (1) совместна, то матрица A_1, не имеет нулевой строки и потому является так же, как и матрица B_1, ступенчатой с тем же количеством r строк, что и B_1. Следовательно, ранги матриц A_1 и B_1 равны, а именно равны r. Отсюда и ранги матриц A и B также равны.

3) Далее, если система (1) совместна, то она будет определенной тогда и только тогда, когда число строк матрицы A_1, т.е. ранг A_1, равно числу n неизвестных. Но ранг матрицы A_1 равен рангу матрицы A. Следовательно, совместная система (1) тогда и только тогда будет определенной, когда ранг матрицы A равен числу n неизвестных.

Отсюда, в частности, получается, что *система n линейных уравнений с n неизвестными тогда и только тогда является определенной, когда определитель* Δ *системы отличен от нуля.*

В самом деле, если система определенная, то по теореме Кронекера-Капелли ранг ее матрицы A, а также ранг ее расширенной матрицы B, должен быть равен n. Но в данном случае A является квадратной матрицей n-го порядка и имеет единственный минор n-го порядка, а именно D. Следовательно, $\Delta \neq 0$ Обратно, если $\Delta \neq 0$, то ранг матрицы A равен n и ранг расширенной матрицы B также равен n, так как матрица B (как и A) имеет всего n строк. Таким образом, если $\Delta \neq 0$, то система совместна и является определенной.

На основе этой теоремы получаем следующий алгоритм решения системы линейных уравнений.

Пусть опять дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1l}x_l = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2l}x_l = b_2, \\ \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kl}x_l = b_k. \end{cases}$$

Для решения этой системы поступают следующим образом.

1. Вычисляют ранг $r(A)$ матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1l} \\ \ldots \\ a_{k1} \ldots a_{kl} \end{pmatrix}$$

2. Вычисляют ранг $r(B)$ расширенной матрицы системы

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1l} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kl} & b_k \end{array}\right).$$

3. Если $r(A) \neq r(B)$, то система несовместна.

4. Если $r(A) = \mathrm{r}(B)$, то система совместна. Пусть $r = r(A) = \mathrm{r}(B)$. В матрице A зафиксируем невырожденную квадратную матрицу D r-го порядка. От системы оставим только те r уравнений, которые соответствуют строкам матрицы D. Возможны два случая: $r = l$ и $r < l$.

4.1 Если $r = l$, то система единственное решение.

4.2 Если $r < l$, то система имеет более одного решения. В левой части уравнений системы оставляем только те неизвестные, коэффициенты которых составляют матрицу D. Их называют главными неизвестными. Остальные неизвестные называют свободными, их переносят в правую часть. Затем главные неизвестные выражают через свободные.

Пример 1. Совместна ли система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 0? \end{cases}$$

Ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы находим одновременно, приводя расширенную матрицу системы к ступенчатому виду.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что ранг матрицы системы равен 2, а ранг расширенной матрицы системы равен 3. По теореме Кронекера-Капелли система несовместна.
Ответ: система несовместна.

Пример 2. Решите над полем **Q** систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 3 и равен рангу расширенной матрицы. Кроме того, ранг совпадает с числом неизвестных. Поэтому система совместна и имеет единственное решение. Определитель матрицы третьего порядка из левого верхнего угла не равен нулю:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

Поэтому можно ограничиться первыми тремя уравнениями, а четвертое можно отбросить:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему методом Гаусса, получаем т$x_1 = 1/2, x_1 = 0, x_3 = 1/2$.
Ответ: система совместна и имеет единственное решение
$x_1 = 1/2, x_1 = 0, x_3 = 1/2$.

Пример 3. Решите над полем **Q** систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Составляем расширенную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычитаем первую строку из двух последних

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Прибавляем к третьей строке вторую, умноженную на 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что ранг получившейся матрицы равен 2. Поэтому ранг расширенной матрицы B равен 2. Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

с помощью проведенных элементарных преобразований превратилась в матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому ранг матрицы A равен 2 и система совместна. Ненулевой минор второго порядка можно составить из коэффициентов при x_2 и x_3 в первых двух уравнениях. Третье уравнение отбросим, а неизвестные x_1 и x_4 считаем свободными. Получаем систему

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 - x_1 - x_4, \\ x_2 + 2x_3 = -x_1 - x_4. \end{cases}$$

Отсюда $x_3 = -1, x_2 = 2 - x_1 - x_4$.

Ответ: система совместна и имеет бесконечно много решений, которые определяются равенствами $x_3 = -1, x_2 = 2 - x_1 - x_4, x_1$ и x_4 – любые рациональные числа.

Пример 4. Решите над полем **C** систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - ix_2 + 3x_3 - 2ix_4 = 1, \\ x_1 - ix_2 + 6ix_3 - 2ix_4 = 2, \\ x_1 - ix_2 - 3x_3 - 2ix_4 = \frac{7}{5} + \frac{4}{5}i. \end{cases}$$

Составляем расширенную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 & -2i & 1 \\ 1 & -i & 6i & -2i & 2 \\ 1 & -i & -3 & -2i & \frac{7}{5} + \frac{4}{5}i \end{pmatrix}.$$

Вычитаем первую строку из двух последних

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 3 & -2i & 1 \\ 0 & 0 & 6i - 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i \end{pmatrix}.$$

Умножим вторую строку на комплексное число $1/(i–(1/2))$

$$\begin{pmatrix} 1-i\ 3-2i & & 1 \\ 0\ 0\,6\ \ 0 & -\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i \\ 0\ 0-6\ \ 0 & \frac{2}{5}+\frac{4}{5}i \end{pmatrix}.$$

Прибавляем к третьей строке вторую

$$\begin{pmatrix} 1-i\ 3-2i & & 1 \\ 0\ \ 0\ \ 6\ 0 & -\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i \\ 0\ 0\ \ 0\ 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что ранги матрицы системы и расширенной матрицы равны 2, поэтому система совместна. Ненулевой минор второго порядка составим из коэффициентов при x_2 и x_3 в первых двух уравнениях. Третье уравнение уберем. Неизвестные x_2 и x_3 будут главными, а x_1 и x_4 – свободными. Получаем систему

$$\begin{cases} -ix_2+3x_3=1-x_1+2ix_4 \\ -ix_2+6ix_3=2-x_1+2ix_4. \end{cases}$$

Отсюда $x_3=-\left(\frac{1}{15}\right)-\left(\frac{2}{15}\right)i, x_2=-\left(\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{6}{5}\right)i-ix_1-2x_4$.

Ответ: система имеет бесконечно много решений, которые определяются равенствами $x_3=-\left(\frac{1}{15}\right)-\left(\frac{2}{15}\right)i, x_2=-\left(\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{6}{5}\right)i-ix_1-2x_4, x_1$ и x_4 – любые комплексные числа.

Пример 5. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=4, \\ 2x_1+x_2+3x_3=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3=1, \\ \quad x_1-x_2=-3 \end{cases}$$

методом Гаусса, по правилу Крамера и матричным методом.

Совместность данной системы проверим по теореме Кронекера-Капели. Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы *A* равен 3, ранг расширенной матрицы системы *B* также равен 3. По теореме Кронекера-Капелли данная система линейных уравнений совместна. Поскольку $r(A)=r(B)=3$ совпадает с числом неизвестных, то система имеет единственное решение.

1) Для решения системы методом Гаусса воспользуемся полученной ступенчатой матрицей и запишем соответствующую ступенчатую систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -3, \\ x_2 + x_3 = 2, \\ -4x_3 = 0. \end{cases}$$

Из третьего уравнения находим $x_3 = 0,$ из второго $x_2 = 2,$ из первого $x_1 = -1.$

2) Для решения системы по правилу Крамера составим крамеровскую систему. Так как $r(A)=3$, то в исходной системе выберем три уравнения так, чтобы определитель матрицы системы был отличным от нуля. Например, взяв второе, третье и четвертое уравнения, получим крамеровскую систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 = -3. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0.$$

Вычисляем определители:

$$\Delta\, x_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 12; \ \Delta\, x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -24; \ \Delta\, x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

По формулам Крамера получаем

$$x_1 = \frac{\Delta\, x_1}{\Delta} = -1, \ x_2 = \frac{\Delta\, x_2}{\Delta} = 2, \ x_3 = \frac{\Delta\, x_3}{\Delta} = 0.$$

3) Поскольку матричный способ применяется для крамеровских систем, то можем воспользоваться предыдущей крамеровской системой

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 = -3. \end{cases}$$

В матричном виде эта система записывается так: $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

В матричной форме решение ищем по формуле $X = A^{-1}B$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 1 & -3 & 7 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 1 & -3 & 7 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Ответ: $x_1 = -1, \ x_2 = 2, x_3 = 0.$

Пример 6. Дана система линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -1. \end{cases}$$
Исследуйте систему на совместность. Если система окажется совместной, то найдите неизвестные методы Гаусса, по правилу Крамера и матричным методом.

1) Исследуем систему на совместность.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Так как ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы и равен 2, то по теореме Кронекера-Капели система совместна. Поскольку найденные ранги меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечно много решений.

2) Для решения системы методом Гаусса используем полученную ступенчатую матрицу. Составим соответствующую ступенчатую систему
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ -x_2 + 3x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$$
В соответствии с числом уравнений ступенчатой системы выбираем две главные неизвестные. В качестве главных неизвестных можно выбирать те, для которых минор 2-го порядка матрицы ступенчатой системы, составленный из коэффициентов при этих неизвестных, отличен от нуля. В частности, главными неизвестными всегда можно выбирать неизвестные, которые первыми встречаются в уравнениях ступенчатой системы.

Пусть x_1 и x_2 – главные неизвестные, тогда x_3 и x_4 – свободные неизвестные. Пусть $x_3 = \alpha, x_4 = \beta$ – произвольные числа. Тогда
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 - 2\alpha + \beta, \\ -x_2 = 7 - 3\alpha - \beta. \end{cases}$$
Находим главные неизвестные
$$\begin{cases} x_2 = -7 + 3\alpha + \beta, \\ x_1 = -5 + \alpha + 2\beta. \end{cases}$$
Ответ: $x_1 = -5 + \alpha + 2\beta, x_2 = -7 + 3\alpha + \beta, x_3 = \alpha, x_4 = \beta,$ где α, β – любые числа

3) Для решения системы по правилу Крамера необходимо выбрать в исходной системе две главные неизвестные (так как ранги равны 2) и составить крамеровскую систему относительно этих неизвестных. В матрице исходной системы
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$
выберем ненулевой минор Δ порядка 2 = $r(A)$. Пусть минор
$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

составлен из коэффициентов при x_2 и x_4 в первом и втором уравнениях. Тогда x_2 и x_4 – главные неизвестные, а x_1 и x_3 – свободные неизвестные. Оставим в системе уравнения, соответствующие строкам минора Δ, и придадим свободным неизвестными значения $x_1 = \alpha, x_3 = \beta$, где α и β – произвольные числа. Тогда система

$$\begin{cases} -x_2 - x_4 = 2 - \alpha + 3\beta, \\ x_2 + 3x_4 = 3 + 2\alpha + \beta \end{cases}$$

является крамеровской относительно главных неизвестных x_2 и x_4.
Находим

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 2-\alpha-2\beta & -1 \\ 3+2\alpha+\beta & 3 \end{vmatrix} = 9 - \alpha - 5\beta,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2-\alpha-2\beta \\ 1 & 3+2\alpha+\beta \end{vmatrix} = -5 - \alpha + \beta$$

откуда

$$x_2 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\alpha + \frac{5}{2}\beta, x_4 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta, x_1 = \alpha, x_3 = \beta,$$

где α и β – любые числа.

Ответ: $x_1 = \alpha$, $x_2 = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\alpha + \frac{5}{2}\beta, x_3 = \beta, x_4 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$, где α и β – любые числа.

4) Поскольку для решения системы матричным методом нужно составить крамерскую систему, то используем крамеровскую систему

$$\begin{cases} -x_2 - x_4 = 2 - \alpha - 2\beta, \\ x_2 + 3x_4 = 3 + 2\alpha + \beta \end{cases}$$

относительно главных неизвестных x_2, x_4. В матричном виде эта система записывается $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2-\alpha-2\beta \\ 3+2\alpha+\beta \end{pmatrix}.$$

Находим

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = A^{-1}B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-\alpha-2\beta \\ 3+2\alpha+\beta \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9-\alpha-5\beta \\ -5-\alpha+\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\alpha + \frac{5}{2}\beta \\ \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta \end{pmatrix},$$

откуда

$$x_2 = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\alpha + \frac{5}{2}\beta, x_4 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta,$$

$$x_1 = \alpha, x_3 = \beta, \text{где } \alpha, \beta \text{ – любые числа.}$$

Ответ:$x_1 = \alpha, x_2 = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\alpha + \frac{5}{2}\beta, x_3 = \beta, x_4 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta,$ где α, β – любые числа.

Пример 7. Исследуйте систему на совместность в зависимости от параметра α. В случае совместности найдите решения системы

$$\begin{cases} x_1 - \alpha x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2, \\ -3x_1 + x_2 - \alpha x_3 = 0. \end{cases}$$

Исследуем систему на совместность. Пусть B – расширенная матрица системы.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 0 & -3+2\alpha & 0 & -4 \\ 0 & 1-3\alpha & 3-\alpha & 3 \end{pmatrix}.$$

Если $-3 + 2\alpha = 0,$ то есть $\alpha = 3/2,$ то

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

В этом случае ранг матрицы A системы уравнений равен 2, а ранг расширенной матрицы системы B равен 3. По теореме Кронекера-Капелли система несовместна.

Пусть $\alpha \neq 3/2$. Тогда

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 0 & -3+2\alpha & 0 & -4 \\ 0 & 1-3\alpha & 3-\alpha & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3-2\alpha} \\ 0 & 1-3\alpha & 3-\alpha & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3-2\alpha} \\ 0 & 0 & 3-\alpha & \frac{5+6\alpha}{3-2\alpha} \end{pmatrix}.$$

Если $\alpha = 3,$ то $B \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -(4/3) \\ 0 & 0 & 0 & -(23/3) \end{pmatrix}.$

В этом случае ранг матрицы системы равен 2, а ранг расширенной матрицы системы равен 3. По теореме Кронекера-Капелли система несовместна.

Пусть $\alpha \neq 3$. Тогда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы и равен 3. В этом случае система совместна и имеет единственное решение. Запишем ступенчатую систему, соответствующую ступенчатой матрице B

$$\begin{cases} x_1 - \alpha x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 = \frac{4}{3-2\alpha}, \\ (3-\alpha)x_3 = \frac{5+6\alpha}{3-2\alpha}. \end{cases}$$

Из этой системы находим

$$x_3 = \frac{5+6\alpha}{(3-2\alpha)(3-\alpha)}, \quad x_2 = \frac{4}{3-2\alpha}, \quad x_1 = \frac{-2\alpha^2-3\alpha+4}{(3-2\alpha)(3-\alpha)}.$$

Ответ: если $\alpha \in \{3, 3/2\}$, то система несовместна; если $\alpha \notin \{3, 3/2\}$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами

$$x_1 = \frac{-2\alpha^2-3\alpha+4}{(3-2\alpha)(3-\alpha)}, \; x_2 = \frac{4}{3-2\alpha}, \; x_3 = \frac{5+6\alpha}{(3-2\alpha)(3-\alpha)}.$$

§7. Задачи

1. Исследуйте систему на совместность. Совместную систему решите методом Гаусса, по правилу Крамера, матричным методом.

1.1 $\begin{cases} -3x_1+2x_2=-8, \\ 5x_1+4x_2+3x_3=15, \\ 2x_1+x_2+x_3=6. \end{cases}$	1.2 $\begin{cases} 3x_1-4x_2+x_3=-10, \\ 2x_1+5x_3=3, \\ -x_1+x_2-x_3=2. \end{cases}$
1.3 $\begin{cases} -2x_1+x_2+3x_3=7, \\ x_1+2x_2=-2, \\ -x_1+x_2+2x_3=4. \end{cases}$	1.4 $\begin{cases} -x_1+2x_2+4x_3=-8, \\ 5x_2+x_3=-6, \\ -x_1+x_2+4x_3=-7. \end{cases}$
1.5 $\begin{cases} -x_1+3x_2+7x_3=-5, \\ 2x_2-x_3=3, \\ x_1-2x_2-8x_3=7. \end{cases}$	1.6 $\begin{cases} 4x_1+5x_3=-10, \\ -2x_1+x_2+3x_3=-5, \\ -5x_1+x_2-x_3=3. \end{cases}$
1.7 $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=-4, \\ -2x_1+x_3=4, \\ 2x_1+7x_2+3x_3=11. \end{cases}$	1.8 $\begin{cases} -3x_1+x_3=3, \\ 2x_2+3x_3=2, \\ -x_1-x_2-x_3=0. \end{cases}$
1.9 $\begin{cases} -2x_1+3x_2+x_3=6, \\ 2x_2+x_3=2, \\ x_1+2x_2+x_3=0. \end{cases}$	1.10 $\begin{cases} x_1+2x_3=-1, \\ 3x_1-x_2+4x_3=-5, \\ 2x_1-2x_2+x_3=-6. \end{cases}$
1.11 $\begin{cases} 4x_1-3x_2+5x_3=13, \\ x_1+2x_2+6x_3=10, \\ -x_1+x_2-x_3=-3. \end{cases}$	1.12 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=3, \\ -3x_1-2x_2+x_3=5, \\ x_1+x_2+x_3=0. \end{cases}$
1.13 $\begin{cases} -x_1+2x_2+2x_3=5, \\ -3x_1+4x_2=13, \\ x_1-2x_2-x_3=-5. \end{cases}$	1.14 $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=-2, \\ 4x_1+3x_3=-1, \\ x_1+3x_2+x_3=3. \end{cases}$
1.15 $\begin{cases} -3x_1+2x_2=12, \\ 2x_1+x_2-x_3=-4, \\ x_1+x_2-2x_3=-5. \end{cases}$	

2. Исследуйте систему на совместность. Совместную систему решите методом Гаусса.

2.1 а) $\begin{cases} 3ix_1+x_2-x_3=-1, \\ 2x_1-ix_2+2x_3=i-2, \\ -x_1+3x_2+ix_3=3. \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2ix_1-x_2+(1-i)x_3=2, \\ -x_1+x_2+ix_3=-3+i\ , \\ (-1+2i)x_1+x_3=4. \end{cases}$
2.2 а) $\begin{cases} ix_1-2x_2+3x_3=-1, \\ 2x_1-3x_2+ix_3=i, \\ (2+i)x_1-5x_2+(3+i)x_3=-3. \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+ix_3=-2-2i, \\ -x_1+2ix_2+3x_3=-3, \\ 3x_1-ix_2+x_3=-1. \end{cases}$
2.3 а) $\begin{cases} (2-i)x_1+x_2-x_3=-1-i, \\ x_1-(2+i)x_3=1-2i, \\ 3x_1-x_2+2ix_3=-1. \end{cases}$	б) $\begin{cases} x_1-2ix_2+3x_3=2, \\ -ix_1+x_2-(1-i)x_3=-2i, \\ (1-i)x_1+(1-2i)x_2+(2+i)x_3=5. \end{cases}$

2.4 а) $\begin{cases} -x_1+(1-2i)x_3=-4, \\ 2x_1-x_2+x_3=2i, \\ -3x_1+x_2-2ix_3=0. \end{cases}$	б) $\begin{cases} (1-i)x_1-2x_2=-1-i, \\ x_1-2x_2+ix_3=0, \\ 3x_1-ix_2+2x_3=2-3i. \end{cases}$
2.5 а) $\begin{cases} ix_1-x_2+(1-i)x_3=1-i, \\ 2x_1+ix_2-3x_3=i-3, \\ -3x_1+x_2-(2+i)x_3=-3-4i, \end{cases}$	б) $\begin{cases} x_1-2ix_2+x_3=-3, \\ -ix_1+2x_2=-3+i, \\ (1+i)x_1-(2+2i)x_2+x_3=4, \end{cases}$
2.6 а) $\begin{cases} -2x_1+x_2-(1+i)x_3=2i, \\ -x_1+ix_2-x_3=4, \\ -x_1+(1-i)x_2-ix_3=2, \end{cases}$	б) $\begin{cases} -2x_1+3ix_2-x_3=-1, \\ -ix_1+x_2-2x_3=-4-2i, \\ 3x_1-ix_2+x_3=4, \end{cases}$
2.7 а) $\begin{cases} -2ix_1+x_2-x_3=-3i, \\ x_1+(1-2i)x_2+2x_3=-1-i, \\ 2x_1-ix_2+2x_3=1, \end{cases}$	б) $\begin{cases} 3x_1-2ix_2+3x_3=1-i, \\ -x_1+4ix_2-4x_3=2+i, \\ 2x_1+2ix_2-x_3=5, \end{cases}$
2.8 а) $\begin{cases} 4x_1-ix_2+(1-i)x_3=2, \\ ix_1+x_2=-i, \\ (4+i)x_1+(1-i)x_2+(1-i)x_3=5, \end{cases}$	б) $\begin{cases} (1-2i)x_1+x_2-x_3=-1-i, \\ x_1-(1-i)x_2+2x_3=1+i, \\ -3x_1+x_2-(2+i)x_3=-2i, \end{cases}$
2.9 а) $\begin{cases} 2ix_1-x_2+(1-i)x_3=3, \\ x_1-(1+2i)x_2=2+2i, \\ -2x_1+4x_2-ix_3=-6-2i, \end{cases}$	б) $\begin{cases} ix_1-(2+i)x_2-x_3=-1, \\ 2ix_1-2x_2+3x_3=4i, \\ ix_1+ix_2+4x_3=3, \end{cases}$
2.10 а) $\begin{cases} x_1-4ix_2+(1-i)x_3=2+i, \\ -3x_1+x_2-ix_3=2+2i, \\ 4x_1-(1+4i)x_2+x_3=4, \end{cases}$	б) $\begin{cases} x_1-4ix_2+x_3=0, \\ ix_1-2x_2-3x_3=3+i, \\ -2x_1+(1-2i)x_3=-3+2i, \end{cases}$
2.11 а) $\begin{cases} (2+i)x_1-x_2+2x_3=-2-3i, \\ x_1-4ix_2+ix_3=2+i, \\ -2x_1+x_2-(1-i)x_3=3+2i, \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+(3i-1)x_3=4+i, \\ -x_1+4x_2-ix_3=2, \\ 3x_1-5x_2+(4i-1)x_3=3, \end{cases}$
2.12 а) $\begin{cases} -x_1+2ix_2-(1+i)x_3=2-i, \\ 3x_1-4x_2+ix_3=4, \\ 2x_1+(2i-4)x_2-x_3=3, \end{cases}$	б) $\begin{cases} (i-1)x_1+2x_2-x_3=3i-2, \\ x_1-(i+2)x_2+2x_3=2-2i, \\ -3x_1+x_2-4ix_3=-10, \end{cases}$
2.13 а) $\begin{cases} (i+2)x_1-2x_2+3x_3=-2-3i, \\ 2x_1-(2i+1)x_2=-1-2i, \\ -3x_1+2x_2-(1-2i)x_3=4+i, \end{cases}$	б) $\begin{cases} 4x_1-2ix_2+ix_3=1-2i, \\ -x_1+(4+2i)x_2=-3, \\ 3x_1+4x_2+ix_3=4, \end{cases}$
2.14 а) $\begin{cases} -3x_1+x_2-(1-i)x_3=2, \\ 2x_1-4x_2+ix_3=3-i, \\ -x_1-3x_2-(1-2i)x_3=4, \end{cases}$	б) $\begin{cases} -ix_1+2x_2-3x_3=-2-4i, \\ 2x_1-(1-i)x_2+ix_3=2-i, \\ x_1-ix_2+4x_3=1+5i, \end{cases}$
2.15 а) $\begin{cases} (3-i)x_1-x_2+4x_3=3, \\ x_1-ix_2+x_3=1-i, \\ -2x_1+2x_2-(1-i)x_3=1+i, \end{cases}$	б) $\begin{cases} ix_1+2x_2-3x_3=1-i, \\ (1-i)x_1+4x_3=2i, \\ x_1+2x_2+x_3=5. \end{cases}$

3. Исследуйте систему на совместность. Совместную систему решите методом Гаусса.

3.1 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 4. \end{cases}$	3.2 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$
3.3 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 3. \end{cases}$	3.4 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8. \end{cases}$
3.5 $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 12, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$	3.6 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = -5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -1. \end{cases}$
3.7 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 16, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9. \end{cases}$	3.8 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = -4. \end{cases}$
3.9 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4. \end{cases}$	3.10 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = -7, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$
3.11 $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1. \end{cases}$	3.12 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = -8, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -2. \end{cases}$
3.13 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2. \end{cases}$	3.14 $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 11, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 - 2x_4 = 7, \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 4. \end{cases}$
3.15 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 = -8. \end{cases}$	

4. Исследуйте систему на совместность. Совместную систему решите методом Гаусса, по правилу Крамера, матричным методом.

4.1 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$	4.2 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + 3x_3 = -4. \end{cases}$
4.3 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -4, \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$	4.4 $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 = -1. \end{cases}$
4.5 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 9. \end{cases}$	4.6 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 2. \end{cases}$

4.7 $\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}$	4.8 $\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 6, \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$
4.9 $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 4x_1 - 3x_2 = 10. \end{cases}$	4.10 $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = -4. \end{cases}$
4.11 $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$	4.12 $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$
4.13 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -8. \end{cases}$	4.14 $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2, \\ 9x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$
4.15 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 9. \end{cases}$	

5. Решите однородную систему линейных алгебраических уравнений.

5.1.	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 0, \end{cases}$	$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$
5.2.	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$	$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$
5.3.	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \end{cases}$
5.4.	$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 10x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0, \end{cases}$
5.5.	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases}$
5.6.	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \end{cases}$
5.7.	$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_3 = 0, \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0, \end{cases}$
5.8.	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$

5.9.	$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$
5.10.	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \end{cases}$	$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$
5.11.	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \end{cases}$
5.12.	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0, \end{cases}$	$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \end{cases}$
5.13.	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 9x_3 = 0, \end{cases}$
5.14.	$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 7x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0, \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases}$
5.15	$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

6. Решите систему линейных уравнений над полем $\mathbf{Z}_n$.

6.1. $n=2$, $\begin{cases} \bar{1}x_1 + \bar{1}x_2 + \bar{1}x_3 + \bar{1}x_4 = \bar{1}, \\ \bar{1}x_1 + \bar{1}x_3 = \bar{1}, \\ \bar{1}x_2 + \bar{1}x_4 = \bar{0}. \end{cases}$	6.2. $n=2$, $\begin{cases} \bar{1}x_1 + \bar{1}x_2 + \bar{1}x_3 + \bar{1}x_4 = \bar{1}, \\ \bar{1}x_1 + \bar{1}x_3 = \bar{1}, \\ \bar{1}x_2 + \bar{1}x_4 = \bar{1}. \end{cases}$
6.3. $n=3$, $\begin{cases} \bar{1}x_1 + \bar{1}x_2 + \bar{1}x_3 = \bar{1}, \\ \bar{2}x_1 + \bar{1}x_2 + \bar{1}x_3 = \bar{1}, \\ \bar{2}x_2 + \bar{2}x_3 = \bar{1}. \end{cases}$	6.4. $n=3$, $\begin{cases} \bar{2}x_1 + \bar{1}x_2 + \bar{1}x_3 = \bar{1}, \\ \bar{2}x_1 + \bar{1}x_2 + \bar{2}x_3 = \bar{2}, \\ \bar{2}x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{1}x_3 = \bar{0}. \end{cases}$
6.5. $n=5$, $\begin{cases} \bar{1}x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{4}x_3 = \bar{1}, \\ \bar{1}x_1 + \bar{3}x_2 + \bar{4}x_3 = \bar{2}, \\ \bar{1}x_1 + \bar{4}x_2 + \bar{1}x_3 = \bar{3}. \end{cases}$	6.6. $n=5$, $\begin{cases} \bar{1}x_1 + \bar{1}x_2 + \bar{1}x_3 = \bar{2}, \\ \bar{2}x_1 + \bar{3}x_2 + \bar{4}x_3 = \bar{1}, \\ \bar{3}x_1 + \bar{2}x_3 = \bar{0}. \end{cases}$

6.7. n=7, $\begin{cases} \overline{3}x_1+\overline{2}x_2+\overline{1}x_3+\overline{6}x_4=\overline{0}, \\ \overline{1}x_1+\overline{1}x_2+\overline{3}x_3=\overline{0}, \\ \overline{5}x_1+\overline{6}x_2+\overline{2}x_3+\overline{4}x_4=\overline{3}. \end{cases}$	6.8. n=17, $\begin{cases} \overline{3}x_1+\overline{2}x_2+\overline{5}x_3=\overline{1}, \\ \overline{2}x_1+\overline{5}x_2+\overline{3}x_3=\overline{1},. \\ \overline{5}x_1+\overline{3}x_2+\overline{2}x_3=\overline{4} \end{cases}$
6.9. n=5, $\begin{cases} \overline{3}x_1+\overline{1}x_2+\overline{2}x_3+=\overline{1}, \\ \overline{1}x_1+\overline{2}x_2+\overline{3}x_3=\overline{1}, \\ \overline{4}x_1+\overline{3}x_2+\overline{2}x_3=\overline{1}. \end{cases}$	6.10. n=7, $\begin{cases} \overline{3}x_1+\overline{1}x_2+\overline{2}x_3+=\overline{1}, \\ \overline{1}x_1+\overline{2}x_2+\overline{3}x_3=\overline{1}, \\ \overline{4}x_1+\overline{3}x_2+\overline{2}x_3=\overline{1}. \end{cases}$
6.11. n=7, $\begin{cases} \overline{1}x_1+\overline{1}x_2+\overline{1}x_3+=\overline{1}, \\ \overline{4}x_1+\overline{2}x_2+\overline{3}x_3=\overline{1}\ , \\ \overline{1}x_1+\overline{4}x_2+\overline{4}x_3=\overline{4}. \end{cases}$	6.12. n=3, $\begin{cases} \overline{1}x_1+\overline{2}x_3+=\overline{1}, \\ \overline{2}x_2+\overline{2}x_3=\overline{2}, \\ \overline{2}x_1+\overline{2}x_3=\overline{1}. \end{cases}$
6.13. n=9, $\begin{cases} \overline{1}x_1+\overline{1}x_2+\overline{1}x_3=\overline{2}, \\ \overline{2}x_1+\overline{3}x_2+\overline{4}x_3=\overline{1}, \\ \overline{3}x_1+\overline{2}x_3=\overline{0}. \end{cases}$	6.14. n=5, $\begin{cases} \overline{1}x_1+\overline{2}x_3+=\overline{1}, \\ \overline{2}x_2+\overline{2}x_3=\overline{2}, \\ \overline{2}x_1+\overline{2}x_3=\overline{1}. \end{cases}$
6.15. n=11, $\begin{cases} \overline{1}x_1+\overline{1}x_2+\overline{1}x_3=\overline{2}, \\ \overline{2}x_1+\overline{3}x_2+\overline{4}x_3=\overline{1}, \\ \overline{3}x_1+\overline{2}x_3=\overline{0}. \end{cases}$	

7. Найдите фундаментальную систему решений.

7.1. $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3-2x_4-9x_5=0, \\ 9x_1+2x_2+5x_3+2x_4+x_5=0, \\ 4x_1+x_2+2x_3-3x_5=0. \end{cases}$	7.2. $\begin{cases} x_1+4x_2+x_3+2x_4=0, \\ 7x_1+8x_2+x_4=0, \\ 6x_1+x_2-2x_3-3x_4=0, \\ 5x_1-6x_2-4x_3-7x_4=0. \end{cases}$
7.3. $\begin{cases} 2x_1-12x_2-5x_3-8x_4-x_5=0, \\ 9x_2+3x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 10x_1+6x_2-3x_3+7x_4+17x_5=0, \\ 6x_1+3x_2-2x_3+4x_4+10x_5=0. \end{cases}$	7.4. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3-6x_4+2x_5=0, \\ 7x_1+3x_2+2x_3-18x_4+6x_5=0, \\ 11x_1+5x_2+3x_3-27x_4+9x_5=0, \\ 7x_1-7x_2+2x_3-48x_4+16x_5=0, \\ 5x_1+4x_2+x_3-6x_4+2x_5=0. \end{cases}$
7.5. $\begin{cases} 2x_1+5x_2+6x_3+8x_4=0, \\ x_1+2x_2+3x_3+3x_4=0, \\ x_1+3x_2+2x_3+4x_4=0, \\ x_1+x_2+5x_3+3x_4=0, \\ 2x_1+5x_2+4x_3+7x_4=0. \end{cases}$	7.6. $\begin{cases} 5x_1+3x_2+x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 7x_1+5x_2+3x_3+4x_4+6x_5=0, \\ 9x_1+7x_2+5x_3+6x_4+9x_5=0, \\ 8x_1+4x_2+2x_4+3x_5=0. \end{cases}$

7.7. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 - x_5 = 0. \end{cases}$	7.8. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$
7.9. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 7x_2 + 14x_3 = 0. \end{cases}$	7.10. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$
7.11. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 7x_3 - 11x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 9x_3 - 14x_4 = 0. \end{cases}$	7.12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 7x_4 = 0, \\ 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$
7.13. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 9x_3 - 14x_4 = 0. \end{cases}$	7.14. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$
7.15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 11x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$	

8. Исследуйте систему и найдите общее решение в зависимости от λ.

8.1. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda. \end{cases}$	8.2. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5, \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2. \end{cases}$
8.3. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7. \end{cases}$	8.4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11. \end{cases}$

8.5. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 9. \end{cases}$	8.6. $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$
8.7. $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1. \end{cases}$	8.8. $\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2. \end{cases}$
8.9. $\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 + 3\lambda, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda^3 + 3\lambda^2, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^4 + 3\lambda^3. \end{cases}$	8.10. $\begin{cases} \lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+1)x_3 = \lambda, \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda-1)x_3 = \lambda, \\ (1+\lambda)x_1 + \lambda x_2 + (2\lambda+3)x_3 = 1. \end{cases}$
8.11. $\begin{cases} (\lambda+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda, \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = 2\lambda, \\ 3(1+\lambda)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 = 3. \end{cases}$	8.12. $\begin{cases} 3x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = -\lambda, \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = 2\lambda, \\ (4\lambda+3)x_1 + (2\lambda-1)x_2 + (\lambda+4)x_3 = 2\lambda + 3. \end{cases}$
8.13. $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ (1+\lambda)x_1 + (\lambda+2)x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ \lambda x_2 - \lambda x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$	8.14. $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0. \end{cases}$
8.15. $\begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1, \\ (2-\lambda)x_1 + (1+\lambda)x_2 + 3x_3 + 3x_4 = \lambda, \\ x_1 + (3-\lambda)x_2 + (2+\lambda)x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + (8+\lambda)x_4 = \lambda + 2. \end{cases}$	

ЛИТЕРАТУРА

1. Апатенок Р.Ф. Элементы линейной алгебры. – Минск: Вышэйш. Школа, 1977. – 256 с.
2. Бузланов А.В., Монахов В.С. Алгебра и теория чисел: учеб. пособие. В 2 ч. Ч.1. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – 264 с.
3. Воеводин В.В. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974. – 336 с.
4. Глухов М.М. Обзорные лекции по алгебре. – М.: Просвещение, 19671. – 120 с.
5. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. – М.: Наука, 1975. – 320 с.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975. – 432 с.
7. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел: Учебное пособие для педагогических институтов. – М.: Высш. школа, 1979. – 559 с.
8. Ляпин Е.С., Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел. Ч. 2. Линейная алгебра и полиномы. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1978. – 448 с.
9. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1970. – 400 с.
10. Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия. Ч. 1. – Минск: Амалфея, 2001. – 400 с.
11. Окунев Л.Я. Высшая алгебра. – М.: Просвещение, 1966. – 336 с.
12. Окунев Л.Я. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Просвещение, 1964. – 184 с.
13. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1970. – 384 с.
14. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. Пособие. В 4 ч. Ч.1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая Геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. – Минск: Выш. шк., 2008. – 304 с.
15. Скорняков Л.А. Элементы алгебры: Учебное пособие. – М.: Наука, 1980. – 240 с.
16. Смирнов В.И. Курс высшей математики, том III, часть I. – М.: Наука, 1967. – 324 с.
17. Фадеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1972. – 304 с.
18. Фадеев Д.К. Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984. – 416 с.
19. Холод Н.И. Пособие к решению задач по линейной алгебре и линейному программированию. – Минск: Изд. БГУ, 1971. – 176 с.
20. Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел. – Минск: Издательство «Дизайн ПРО», 2000. – 240 с.

Учебное издание

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методические рекомендации

Составитель

МЕХОВИЧ Андрей Павлович

Технический редактор *Г.В. Разбоева*

Компьютерный дизайн *А.В. Табанюхова*

Подписано в печать 2023. Формат 60х84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 2,67. Уч.-изд. л. 1,62. Тираж экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение – учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».

Свидетельство о государственной регистрации в качестве издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/255 от 31.03.2014.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова».
210038, г. Витебск, Московский проспект, 33.