Таблица умножения консервативной алгебры билинейных операций над полем нулевой характеристики

А. В. Кухарев

Пусть V — векторное пространство размерности N над полем нулевой характеристики. В работе [**1**] Кантором была введена алгебра билинейных операций (умножений) на векторном пространстве V. Пусть $A : V \times V \to V$ и $B : V \times V \to V$ — две билинейные операции на V. Зафиксируем вектор $z \in V$ и определим новую билинейную операцию $[A, B] : V \times V \to V$ следующим образом:

$$[A, B](x, y) = A(z, B(x, y)) - B(A(z, x), y) - B(x, A(z, y)), \quad x, y \in V. \tag{1}$$

Пространство $W(N)$ всех билинейных операций на V с умножением $[-, -]$ является универсальной консервативной алгеброй размерности N^3 (см. [**1**]). Такая алгебра определена однозначно с точностью до изоморфизма, зависящего от выбора вектора z.

Пусть $\{v_1, .., v_N\}$ — базис пространства V. Определим элементы $\alpha_{ij}^k \in W(N)$ следующим образом: $\alpha_{ij}^k(v_p, v_q) = \delta_{ip}\delta_{jq}v_k$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Видно, что α_{ij}^k $(1 \leq i, j, k \leq N)$ образуют базис в $W(N)$. В [**2**] был изучен двумерный случай (т.е. для $N = 2$), в частности построена таблица умножения алгебры $W(2)$. В настоящей работе мы опишем таблицу умножения $W(N)$ для произвольного N.

Положим $z = v_1$ в формуле (1). Тогда таблицу умножения базисных элементов алгебры $W(N)$ можно записать в явном виде.

Предложение 1.

$$\alpha_{ij}^k \cdot \alpha_{lm}^n = \delta_{i1}(\delta_{jn}\alpha_{lm}^k - \delta_{lk}\alpha_{jm}^n - \delta_{mk}\alpha_{lj}^n).$$

Рассмотрим теперь подалгебру W_N в $W(N)$, состоящую из всех билинейных коммутативных операций на N-мерном пространстве V.

Предложение 2. *1) Размерность алгебры W_N равна $\frac{1}{2}N^2(N+1)$.*

2) Вектора $\beta_{ij}^k := \alpha_{ij}^k + \alpha_{ji}^k$, где $i < j$, и $\beta_{ii}^k := \alpha_{ii}^k$ образуют базис алгебры W_N.

3) Таблица умножения алгебры W_N имеет вид

$$\beta_{ij}^k \cdot \beta_{lm}^n = \delta_{i1}(\delta_{jn}\beta_{lm}^k - \delta_{lk}\beta_{jm}^n - \delta_{mk}\beta_{lj}^n) + \delta_{j1}(\delta_{in}\beta_{lm}^k - \delta_{lk}\beta_{im}^n - \delta_{mk}\beta_{li}^n).$$

Исследование выполнено за счет гранта РНФ (проект 18-71-10007).

Литература

[1] Кантор И.Л., Универсальная консервативная алгебра // Сиб. матем. журн. 33 (1990), 30–38.

[2] Kaygorodov I., Lopatin A., Popov Y. Conservative algebras of 2-dimensional algebras // Linear Algebra and its Applications, 486 (2015), 255–274.

Сибирский федеральный университет, Красноярск (Россия)
E-mail: kukharev.av@mail.ru