Доклады Национальной академии наук Беларуси
2007 июль–август Том 51 № 4

УДК 512.542

Н. Н. ВОРОБЬЕВ

ОТДЕЛИМЫЕ РЕШЕТКИ ТОТАЛЬНО ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

(Представлено членом-корреспондентом Л.А. Шеметковым)

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова *Поступило 07.02.2007*

Все рассматриваемые в работе группы конечны и разрешимы. Пусть θ – некоторая полная решетка классов групп. Символом $\Theta\,\mathrm{fit}\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех тех классов Фиттинга из решетки Θ, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$. В частности, если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то вместо $\Theta\,\mathrm{fit}\{G\}$ пишут $\Theta\,\mathrm{fit}G$.

Важным понятием в современной теории классов конечных групп является следующая конструкция, введенная в монографии А.Н. Скибы [1].

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс групп. Полная решетка классов Локетта Θ называется $\mathfrak{X}$-отделимой, если для любого терма $\tau(x_1, \ldots, x_m)$ сигнатуры $\{\bigcap, \vee_\Theta\}$, любых классов Локетта $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m$ из Θ и любой группы

$$A \in \mathfrak{X} \bigcap \tau(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m)$$

найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{F}_m$, что

$$A \in \tau(\Theta\,\mathrm{fit}\,A_1, \ldots, \Theta\,\mathrm{fit}\,A_m).$$

Здесь $\vee_\Theta$ – оператор объединения в решетке Θ. Свойство отделимости оказалось одним из основных инструментов при изучении решеток классов конечных групп [2], в частности, это понятие сыграло ключевую роль в исследовании тождеств решеток таких классов [3–5].

В работе [5] было доказано, что решетка разрешимых тотально локальных классов Фиттинга является $\mathfrak{S}$-отделимой, что позволило установить дистрибутивность такой решетки.

Цель данной работы – доказательство $\mathfrak{S}$-отделимости решетки разрешимых тотально ω-локальных классов Локетта.

Со всяким классом Фиттинга $\mathfrak{F}$ можно сопоставить наименьший (по включению) класс Фиттинга $\mathfrak{F}^*$ [6], содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что для любых групп G и H справедливо равенство $(G\times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*}\times H_{\mathfrak{F}^*}$. Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется классом Локетта, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.

Пусть ω – некоторое непустое множество простых чисел, $\omega' = \mathbf{P} \setminus \omega$. Символы $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{N}_p$, $\mathfrak{S}_{p'}$ и $\mathfrak{S}_{\omega d}$ обозначают соответственно классы всех групп, p-групп, p'-групп и класс групп, у которых каждый композиционный фактор является ωd-группой. Для любого класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$ символом $G^{\mathfrak{F}}$ обозначают пересечение всех нормальных подгрупп N таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$. В частности, пишут [7]

$$G^{\omega d} = G^{\mathfrak{S}_{\omega d}}, \quad F^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}}.$$

Функции вида

$$f: \omega \bigcup \{\omega'\} \to \{\text{классы Фиттинга}\}$$

называют ω-локальными функциями Хартли или, если более кратко, H-функциями [7]. Для любой ω-локальной H-функции f определяют класс

$$LR_\omega(f) = (G \mid G^{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } F^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \bigcap \pi(G)).$$

Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$, то говорят, что $\mathfrak{F}$ – ω-локальный класс Фиттинга с ω-локальной H-функцией f [7].

Всякий класс Фиттинга считается 0-кратно ω-локальным. При $n > 0$ класс Фиттинга называется n-кратно ω-локальным [7], если он имеет такую ω-локальную H-функцию, все непустые значения которой – $(n-1)$-кратно ω-локальные классы Фиттинга. Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ n-кратно ω-локален для всех натуральных n, то $\mathfrak{F}$ называется тотально ω-локальным.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Т е о р е м а. *Решетка всех тотально* ω *-локальных классов Локетта* $\mathfrak{S}$*-отделима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Индукцией по числу r вхождений символов $\{\bigcap, \vee_\omega^\infty\}$ в терм τ покажем, что найдутся такие группы $A_i \in \mathfrak{F}_i$ $(i = 1,\ldots, m)$, что $A \in \tau$ $(l_\omega^\infty \text{fit} A_1,\ldots, l_\omega^\infty \text{fit} A_m)$.

При $r = 0$, очевидно, $A \in l_\omega^\infty \text{fit} A$. Индукцией по нильпотентной длине группы A докажем, что утверждение верно при $r = 1$.

Пусть $A \in \mathfrak{F}_1 \vee_\omega^\infty \mathfrak{F}_2 = l_\omega^\infty \text{fit}(\mathfrak{F}_1 \bigcup \mathfrak{F}_2)$ и $\pi(A) = \{p_1, \ldots, p_t\}$. При $l(A) = 1$ имеет место $A = P_1 \times \ldots \times P_t$, где P_i – силовские p_i-подгруппы группы A $(i = 1, \ldots, t)$. Ясно, что

$$\pi(A) \subseteq \pi(\mathfrak{F}_1) \bigcup \pi(\mathfrak{F}_2).$$

Пусть

$$p_1, \ldots, p_j \in \pi(\mathfrak{F}_1), p_{j+1}, \ldots, p_t \in \pi(\mathfrak{F}_2).$$

Тогда

$$A_1 = P_1 \times \ldots \times P_j \in \mathfrak{F}_1, A_2 = P_{j+1} \times \ldots \times P_t \in \mathfrak{F}_2.$$

Понятно, что

$$A = A_1 \times A_2 \in (l_\omega^\infty \text{fit} A_1) \vee_\omega^\infty (l_\omega^\infty \text{fit} A_2).$$

Пусть теперь $l(A) > 1$. Допустим, что для разрешимых групп, нильпотентная длина которых меньше нильпотентной длины группы A, доказываемое нами утверждение верно. Ввиду леммы 21 [7] и теоремы [8], для произвольного $p_i \in \omega \cap \pi(A)$

$$F^{p_i}(A) \in f_1(p_i) \vee_\omega^\infty f_2(p_i) = (l_\omega^\infty \text{fit}(F^{p_i}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1)) \vee_\omega^\infty (l_\omega^\infty \text{fit}(F^{p_i}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_2)),$$

где f_j – минимальная ω -локальная l_ω^∞ -значная H-функция класса Локетта $\mathfrak{F}_j$, $j = 1,2$.

Поскольку $l(F^{p_i}(A)) < l(A)$, то по индукции найдутся такие группы

$$A_{i_1} \in f_1(p_i),\ A_{i_2} \in f_2(p_i), \text{ что } F^{p_i}(A) \in (l_\omega^\infty \text{fit} A_{i_1}) \vee_\omega^\infty (l_\omega^\infty \text{fit} A_{i_2}).$$

Пусть $B_{i_1} = A_{i_1} wr Z_{p_i}$, $B_{i_2} = A_{i_2} wr Z_{p_i}$, где Z_{p_i} – циклическая группа порядка p_i. Так как $A_{i_1} \in f_1(p_i)$, то по леммам 21 и 23 [7], имеет место $B_{i_1} \in f_1(p_i)\mathfrak{N}_{p_i} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Аналогично $B_{i_2} \in \mathfrak{F}_2$. Отсюда $A_1 = B_{1_1} \times \ldots \times B_{t_1} \in \mathfrak{F}_1$, $A_2 = B_{1_2} \times \ldots \times B_{t_2} \in \mathfrak{F}_2$. Покажем, что $A \in \mathfrak{F} = (l_\omega^\infty \text{fit} A_1) \vee_\omega^\infty (l_\omega^\infty \text{fit} A_2)$. Пусть h – минимальная l_ω^∞ -значная H-функция класса $\mathfrak{F}$, и f – такая l_ω^∞ -значная H-функция класса $\mathfrak{F}$, что $f(p) = h(p)\mathfrak{N}_p$ для любого $p \in \omega$. Пусть $i \in \{1,\ldots, t\}$. Покажем, что $F^{p_i}(A) \in f(p_i)$. Сначала установим, что A_{i_1}, $A_{i_2} \in f(p_i)$. Допустим, что $A_{i_1} \notin f(p_i)$. Тогда поскольку $f(p_i)$ – класс Локетта [9], то из [6, а) гл. X, свойство 2.1], $(B_{i_1})_{f(p_i)} = K_1$, где K_1 – база регулярного сплетения $(A_{i_1})_{f(p_i)}$ $wr\ Z_{p_i}$. Ввиду свойств сплетений [6, гл. A, 18.2 d]

$$B_{i_1}/(B_{i_1})_{f(p_i)} = B_{i_1}/K_1 \cong (A_{i_1}/(A_{i_1})_{f(p_i)})wr Z_{p_i}.$$

Значит, p_i делит порядок $B_{i_1}/(B_{i_1})_{f(p_i)}$.

С другой стороны, так как $B_{i_1} \in \mathfrak{F}$, то, согласно [7],

$$B_{i_1} \in (\bigcap_{p\in\pi_2} \mathfrak{S}_{p'}) \bigcap (\bigcap_{p\in\pi_1} f(p)\mathfrak{S}_{p'}) \bigcap f(\omega')\mathfrak{S}_{\omega d},$$

где $\pi_1 = \omega \cap \mathrm{Supp}(f)$, $\pi_2 = \omega\backslash\pi_1$; и, в частности, $B_{i_1} \in f(p_i)\mathfrak{S}_{p_i'}$. Следовательно, $B_{i_1}/(B_{i_1})_{f(p_i)} \in \mathfrak{S}_{p_i'}$. Противоречие. Значит, $A_{i_1} \in f(p_i)$. Аналогично, $A_{i_2} \in f(p_i)$. Поэтому $l_\omega^\infty \mathrm{fit}(A_{i_1}, A_{i_2}) \subseteq f(p_i)$. Очевидно,

$$l_\omega^\infty \mathrm{fit}(A_{i_1}, A_{i_2}) = (l_\omega^\infty \mathrm{fit}\, A_{i_1}) \vee_\omega^\infty (l_\omega^\infty \mathrm{fit}\, A_{i_2}).$$

Следовательно, $F^{p_i}(A) \in f(p_i)$.

Покажем, что $A^{\omega d} \in f(\omega')$. Имеем

$$A^{\omega d} \in f_1(\omega') \vee_\omega^\infty f_2(\omega') = \mathfrak{F}_1 \vee_\omega^\infty \mathfrak{F}_2 = f(\omega') = \mathfrak{F}.$$

Итак, $A \in \mathfrak{F}$.

Если же $A \in \mathfrak{F}_1 \bigcap \mathfrak{F}_2$, то $A \in (l_\omega^\infty \mathrm{fit}A) \bigcap (l_\omega^\infty \mathrm{fit}A)$. Таким образом, мы завершили доказательство теоремы при $r = 1$.

Пусть терм τ имеет $r > 1$ вхождений символов из $\{\bigcap, \vee_\omega^\infty\}$ и для термов с меньшим числом вхождений теорема верна. Пусть τ имеет вид

$$\tau_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}) \Delta \tau_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}),$$

где $\Delta \in \{\bigcap, \vee_\omega^\infty\}$ и

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_a}\} \bigcup \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\} = \{x_1, \ldots, x_m\}.$$

Через $\mathfrak{H}_1$ обозначим класс Фиттинга $\tau_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{i_a})$, через $\mathfrak{H}_2$ – класс Фиттинга $\tau_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{F}_{j_b})$. Тогда, по доказанному выше, найдутся такие группы $A_1 \in \mathfrak{H}_1$, $A_2 \in \mathfrak{H}_2$, что

$$A \in (l_\omega^\infty \mathrm{fit}\, A_1) \Delta (l_\omega^\infty \mathrm{fit}\, A_2).$$

Поскольку число операций в терме τ_1 меньше r, то по индукции найдутся такие группы $B_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, B_a \in \mathfrak{F}_{i_a}$, что

$$A_1 \in \tau_1(l_\omega^\infty \mathrm{fit}B_1, \ldots, l_\omega^\infty \mathrm{fit}B_a).$$

Аналогично, найдутся такие группы $C_1 \in \mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, C_b \in \mathfrak{F}_{j_b}$, что

$$A_2 \in \tau_2(l_\omega^\infty \mathrm{fit}C_1, \ldots, l_\omega^\infty \mathrm{fit}C_b).$$

Пусть $x_{i_{t+1}}, \ldots, x_{i_a} \in \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\}$ и, вместе с тем,

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}\} \bigcap \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_b}\} = \varnothing.$$

Пусть

$$D_{i_k} = \begin{cases} B_k & \text{если } k < t+1, \\ B_k & \text{где } x_{i_k} = x_{j_q} \text{ для некоторого} \\ & q \in \{1, \ldots, b\} \text{ при } k \geq t+1, \end{cases}$$

Пусть $D_{j_k} = C_k$, если $x_{j_k} \notin \{x_{i_{t+1}}, \dots, x_{i_a}\}$. Через $\mathfrak{M}_p$ обозначим класс $l_\omega^\infty \operatorname{fit} D_{i_p}$, где $p = 1, \dots, a$; через $\mathfrak{X}_c$ – класс $l_\omega^\infty \operatorname{fit} D_{j_c}$, где $c = 1, \dots, b$.

Итак,

$$A_1 \in \tau_1(l_\omega^\infty \operatorname{fit} B_1, \dots, l_\omega^\infty \operatorname{fit} B_a) \subseteq \tau_1(\operatorname{fit} D_{i_1}, \dots, \operatorname{fit} D_{i_a}) = \tau_1(\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_a),$$
$$A_2 \in \tau_2(l_\omega^\infty \operatorname{fit} C_1, \dots, l_\omega^\infty \operatorname{fit} C_b) \subseteq \tau_2(\operatorname{fit} D_{j_1}, \dots, \operatorname{fit} D_{j_b}) = \tau_2(\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_b).$$

Значит, найдутся такие классы Фиттинга $\mathfrak{K}_1, \dots, \mathfrak{K}_m$, что

$$\tau_1(\mathfrak{K}_{i_1}, \dots, \mathfrak{K}_{i_a}) \Delta \tau_2(\mathfrak{K}_{j_1}, \dots, \mathfrak{K}_{j_b}) = \tau(\mathfrak{K}_1, \dots, \mathfrak{K}_m),$$

где $\mathfrak{K}_i = l_\omega^\infty \operatorname{fit} K_i$, где $K_i \in \mathfrak{F}_i$. Теорема доказана.

Следствие [5]. *Решетка всех тотально локальных классов Фиттинга $\mathfrak{S}$-отделима.*

Литература

1. С к и б а А. Н. Алгебра формаций. Мн., 1997.
2. С к и б а А. Н. О локальных формациях длины 5. Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Мн., 1986. С. 135–149.
3. Ш е м е т к о в Л. А., С к и б а А. Н. Формации алгебраических систем. М., 1989.
4. Г о В э н ь Б и н ь, С к и б а А. Н. // Изв. вузов. Математика. 2002. № 5. С. 14–22.
5. В о р о б ь е в Н. Н., С к и б а А. Н. // Матем. заметки. 2000. Т. 67, вып. 5. С. 662–673.
6. D o e r k K., H a w k e s T. Finite Soluble Groups. Berlin – New York. 1992.
7. С к и б а А. Н., Ш е м е т к о в Л. А. // Матем. труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
8. В о р о б ь е в Н. Н. // Докл. НАН Беларуси 2000. Т. 44, № 3. С. 21–24.
9. В о р о б ь е в Н. Т. // Матем. заметки. 1988. Т. 43, вып. 2. С. 161–168.

VOROB'EV N. N.

nicholas@vsu.by

SEPARATED LATTICES OF TOTALLY LOCAL FITTING CLASSES

Summary

It is proved that the lattice of all soluble totally ω-local Lockett classes is $\mathfrak{S}$-separated.