Доклады Национальной академии наук Беларуси
2012 май–июнь Том 56 № 3

УДК 512.542

Н. Н. ВОРОБЬЕВ

О ТОЖДЕСТВАХ РЕШЕТОК ФУНКТОРНО ЗАМКНУТЫХ ЧАСТИЧНО КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины *Поступило 09.04.2012*

В работе рассматриваются только конечные группы. Мы используем терминологию, принятую в [1–3]. Напомним, что *формацией* называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

Пусть со всякой группой G сопоставлена некоторая система ее подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что τ – *подгрупповой функтор* [2, с. 16], если выполняются следующие условия: 1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G; 2) для любого эпиморфизма φ: $A \mapsto B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$. Если $\tau(G) = \{G\}$, то подгрупповой функтор τ называется *тривиальным*. Формация $\mathfrak{F}$ называется τ-*замкнутой* [2, с. 23], если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой ее группы G. Мы будем рассматривать лишь такие подгрупповые функторы τ, что для любой группы G все подгруппы, входящие в $\tau(G)$, субнормальны в G.

Пусть ω – некоторое непустое множество простых чисел, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Символом $C^p(G)$ обозначают пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, у которых композиционные факторы имеют простой порядок p (если в группе G нет таких факторов, то полагают $C^p(G) = G$). Для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $\mathrm{Com}(\mathfrak{X})$ обозначают класс всех простых абелевых групп A таких, что $A \cong H / K$ для некоторого композиционного фактора H / K группы $G \in \mathfrak{X}$. Символом $R_{\omega}(G)$ обозначают $\mathfrak{S}_{\omega}$-радикал группы G, т. е. произведение всех таких ее разрешимых нормальных подгрупп, которые являются ω-группами.

Следуя [3], функции f: $\omega \cup \{\omega'\} \to$ {формации групп} сопоставим класс групп

$$CF_{\omega}(f) = (G \mid G / R_{\omega}(G) \in f(\omega') \text{ и } G / C^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G))).$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$, то $\mathfrak{F}$ называется ω-*композиционной формацией* с ω-*композиционным спутником* f [3]. Нетрудно заметить, что класс композиционных формаций совпадает с классом $\mathbb{P}$-композиционных формаций (см. подробнее [3]).

Всякая формация считается 0-кратно ω-композиционной, а при $n > 0$ формация $\mathfrak{F}$ называется n-*кратно* ω-*композиционной* [3], если $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$, где все непустые значения спутника f являются $(n-1)$-кратно ω-композиционными формациями.

В книге [2, теорема 4.2.6] доказано, что при любых натуральных m и n у решетки всех τ-замкнутых m-кратно насыщенных формаций и у решетки всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций системы тождеств совпадают. Позднее в [4] показано, что для любого бесконечного множества простых чисел ω и при любых различных натуральных m и n системы тождеств решетки всех m-кратно ω-насыщенных формаций и решетки всех n-кратно ω-насыщенных формаций совпадают, а в [5] этот результат был распространен на решетки функторно замкнутых формаций такого типа. В [6; 7] доказано, что для любого бесконечного множества простых чисел ω и при любых различных натуральных m и n у решетки всех m-кратно ω-композиционных формаций и у решетки всех n-кратно ω-композиционных формаций системы тождеств совпадают.

Целью данной работы является получение аналога этого результата в классе τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций (теоремы 2 и 3). Важным этапом в достижении этой цели стали работы [8; 9], где установлена индуктивность решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций [2, определение 4.1]. Кроме того, в настоящей работе доказано, что совокупность всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций $c^{\tau}_{\omega_n}$ относительно включения $\subseteq$ образует полную решетку (теорема 1).

ω-Композиционный спутник f называется $c^{\tau}_{\omega_n}$*-значным*, если все его непустые значения принадлежат решетке $c^{\tau}_{\omega_n}$. Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – набор всех ω-композиционных $c^{\tau}_{\omega_n}$-значных спутников формации $\mathfrak{F}$. Согласно [3, лемма 2], $f = \bigcap_{i\in I} f_i$ ω-композиционный $c^{\tau}_{\omega_n}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, который называется *минимальным* $c^{\tau}_{\omega_n}$*-значным ω-композиционным спутником формации* $\mathfrak{F}$ [3]. Если $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$ и $f(a) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, то f называется *внутренним ω-композиционным спутником формации* $\mathfrak{F}$.

Л е м м а 1. *Если $\mathfrak{F}$ – ω-композиционная формация имеет внутренний τ-значный ω-композиционный спутник, то она является τ-замкнутой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$, где f – внутренний ω-композиционный спутник, все значения которого τ-замкнуты. Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута.

Допустим противное, тогда найдется такая группа $G \in \mathfrak{F}$ и подгруппа $H \in \tau(G)$, что $H \notin \mathfrak{F}$. Пусть G – группа наименьшего порядка среди групп с таким свойством и R – минимальная нормальная в G подгруппа. Покажем, что R – единственная минимальная нормальная в G подгруппа. Предположим противное. Пусть R и L – две различные минимальные нормальные в G подгруппы. Поскольку $G \in \mathfrak{F}$, то $G / R \in \mathfrak{F}$. Так как $|G / R| < |G|$, то по выбору группы G для любой группы $\bar{H} \in \tau(G/R)$ следует, что $\bar{H} \in \mathfrak{F}$. Заметим, что при каноническом эпиморфизме $\varphi\colon G \mapsto G / R$ мы имеем $\varphi(H) = HR / R$. Значит, $HR / R \in \tau(G / R)$. Следовательно, $H / R \cap H \cong HR / R \in \mathfrak{F}$. Аналогично, $H / L \cap H \cong HL / L \in \mathfrak{F}$. Но поскольку $(R \cap H) \cap (L \cap H) = 1$, то $H \cong H / 1 = H / (R \cap H) \cap (L \cap H) \in \mathfrak{F}$, что противоречит выбору групп G и H. Значит, R – единственная минимальная нормальная в G подгруппа. Очевидно, $R_{\omega}(H) = R_{\omega}(G) \cap H$. Значит,

$$H / R_{\omega}(H) = H / (R_{\omega}(G) \cap H) \cong HR_{\omega}(G) / R_{\omega}(G) \in \tau(G / R_{\omega}(G)).$$

Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G / R_{\omega}(G) \in f(\omega')$. Следовательно, $H / R_{\omega}(H) \in f(\omega')$.

Пусть теперь $p \in \omega \cap \pi\,(\mathrm{Com}\,(H))$. Заметим, что $C^p(G) = G_{\mathfrak{G}_{cp}}$, где $\mathfrak{G}_{cp}$ – класс всех таких групп, у которых все главные p-факторы центральны. Поскольку мы рассматриваем лишь такие подгрупповые функторы τ, что для любой группы G все подгруппы, входящие в $\tau(G)$, субнормальны в G, то подгруппа H субнормальна в G. Очевидно, $G_{\mathfrak{G}_{cp}} \cap H = H_{\mathfrak{G}_{cp}}$. Следовательно,

$$H / H_{\mathfrak{G}_{cp}} = H / (G_{\mathfrak{G}_{cp}} \cap H) \cong HG_{\mathfrak{G}_{cp}} / G_{\mathfrak{G}_{cp}} \in \tau(G / G_{\mathfrak{G}_{cp}}).$$

Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G / C^p(G) = G / G_{\mathfrak{G}_{cp}} \in f(p)$. Значит, $H / C^p(H) = H / H_{\mathfrak{G}_{cp}} \in f(p)$.

Таким образом, $H \in \mathfrak{F}$, что противоречит нашему выбору групп G и H. Следовательно, формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута. Лемма доказана.

Символом $c^{\tau}_{\omega_n}\,\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех тех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$.

Для произвольной совокупности τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ полагают

$$\vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = c^{\tau}_{\omega_n}\,\mathrm{form}(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i),$$

в частности,

$$\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{H} = c^{\tau}_{\omega_n}\,\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – некоторая совокупность функций вида

$$f_i : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}.$$

Тогда через $\vee^{\tau}_{\omega_n}(f_i \mid i \in I)$ мы обозначаем такую функцию f, что

$$f(\omega') = c^{\tau}_{\omega_n} \operatorname{form}(\bigcup_{i \in I} f_i(\omega')),$$

в частности,

$$(f_1 \vee^{\tau}_{\omega_n} f_2)(\omega') = c^{\tau}_{\omega_n} \operatorname{form}(f_1(\omega') \cup f_2(\omega'))$$

и при $p \in \omega$ имеет место

$$f(p) = c^{\tau}_{\omega_n} \operatorname{form}(\bigcup_{i \in I} f_i(p)),$$

в частности,

$$(f_1 \vee^{\tau}_{\omega_n} f_2)(p) = c^{\tau}_{\omega_n} \operatorname{form}(f_1(p) \cup f_2(p)),$$

если по крайней мере одна из формаций $f_i(p) \neq \varnothing$. Если же $f_i(p) = \varnothing$ для всех $i \in I$, то полагают $f(p) = \varnothing$.

Т е о р е м а 1. *Совокупность всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций $c^{\tau}_{\omega_n}$ является полной решеткой формаций, в которой наибольшим элементом является класс всех групп $\mathfrak{G}$, а для произвольного множества τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$*

$$\wedge^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}_i = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i \text{ – точная нижняя грань и}$$

$$\vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}_i \text{ – точная верхняя грань.}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Совокупность всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций $c^{\tau}_{\omega_n}$ частично упорядочена относительно включения $\subseteq$. Покажем сначала, что такое частично упорядоченное множество является решеткой.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – произвольное непустое множество τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций и f_i – внутренний ω-композиционный $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Проведем индукцию по n.

Пусть $n = 1$. Тогда, согласно [3, лемма 2], $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$, где f – такой ω-композиционный спутник, что $f(a) = \bigcap_{i \in I} f_i(a)$, $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ и, тем самым, формация $\mathfrak{F}$ ω-композиционна. По лемме 1 формация $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой.

Таким образом, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая ω-композиционная формация, т. е. $\mathfrak{F} = \wedge^{\tau}_{\omega_1} \mathfrak{F}_i = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ и, как отмечено выше, $\vee^{\tau}_{\omega_1} \mathfrak{F}_i = c^{\tau}_{\omega_1} \operatorname{form}(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i)$.

Итак, совокупность всех τ-замкнутых ω-композиционных формаций c^{τ}_{ω} является решеткой.

Пусть теперь $n > 1$ и при $n - 1$ лемма верна. Снова применяя [3, лемма 2] получаем $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$, где ω-композиционный спутник f, таков что $f(a) = \bigcap_{i \in I} f_i(a)$, для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. По индукции $f(a) \in c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$, т. е. спутник f $c^{\tau}_{\omega_{n-1}}$-значен. Значит, формация $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой n-кратно ω-композиционной.

Таким образом, совокупность всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций $c^{\tau}_{\omega_n}$ является решеткой формаций, а для произвольного множества τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ имеем: $\wedge^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}_i = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ – точная нижняя грань и, как отмечено выше, $\vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{F}_i$ – точная верхняя грань.

Докажем теперь, что $c^{\tau}_{\omega_n}$ – полная решетка. Для этого достаточно показать, что класс всех групп $\mathfrak{G}$ является наибольшим элементом решетки $c^{\tau}_{\omega_n}$.

Докажем сначала, что формация $\mathfrak{G}$ n-кратно ω-композиционна для всех целых неотрицательных n. Проведем индукцию по n. Пусть $n = 1$. Согласно [3, пример 4], $\mathfrak{G} = CF_{\omega}(g)$, где ω-композиционный спутник g таков, что $g(a) = \mathfrak{G}$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Поэтому формация $\mathfrak{G}$ ω-композиционна.

Пусть $n > 1$ и при $n - 1$ утверждение верно. Согласно [3, пример 4], $\mathfrak{G} = CF_{\omega}(g)$, где ω-композиционный спутник g таков, что $g(a) = \mathfrak{G}$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. По индукции формация $\mathfrak{G} = g(p)$ $(n - 1)$-кратно ω-композиционна. Следовательно, ω-композиционный спутник g c^{ω}_{n-1}-значен. Значит, формация $\mathfrak{G}$ n-кратно ω-композиционна. Кроме того, формация $\mathfrak{G}$ наследственна, а значит, τ-замкнута для любого подгруппового функтора τ.

Итак, $c_{\omega_n}^{\tau}$ – полная решетка формаций, в которой наибольший элемент – формация всех групп $\mathfrak{G}$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. *Пусть $n \geq 1$. Тогда всякое тождество, справедливое в решетке всех τ-замкнутых формаций $c_{\omega_0}^{\tau}$, выполняется и в решетке всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций $c_{\omega_n}^{\tau}$.*

Отметим основные следствия из теоремы 2.

С л е д с т в и е 1. *Решетка всех композиционных формаций является модулярной.*

С л е д с т в и е 2. *Решетка всех n-кратно композиционных формаций является модулярной.*

С л е д с т в и е 3. *Решетка всех p-композиционных формаций является модулярной.*

Напомним, что *полуформацией* называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов [1, с. 12].

Схема доказательства теоремы 2 заключена в следующих леммах.

Л е м м а 2. *Пусть A – монолитическая группа с неабелевым цоколем R, $\mathfrak{M}$ – некоторая полуформация и $A \in c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}\mathfrak{M}$. Тогда $A \in \mathfrak{M}$.*

Л е м м а 3. *Пусть $\mathfrak{M}$ – полуформация и $A \in c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}\mathfrak{M}$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) если $O_p(A) = 1$ и $p \in \omega$, то $A \in c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}\mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 = \{G / O_p(G) \mid G \in \mathfrak{M}\}$;

2) если $R_\omega(A) = 1$, то $A \in c_{\omega_n}^{\tau}\mathrm{form}\mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{M}_2 = \{G / R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{M}\}$.

Л е м м а 4. *Пусть f_i – минимальный $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$-значный ω-композиционный спутник τ-замкнутой n-кратно ω-композиционной формации $\mathfrak{F}_i$, где $i \in I$. Тогда $\vee_{\omega_{n-1}}^{\tau}(f_i \mid i \in I)$ – минимальный $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F} = \vee_{\omega_n}^{\tau}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.*

Пусть Θ – полная решетка формаций. Для произвольной совокупности формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ из Θ полагают

$$\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \Theta\mathrm{form}(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i).$$

Формации, принадлежащие Θ, называются Θ-*формациями*. Символом $\Theta\mathrm{form}G$ обозначают пересечение всех Θ-формаций, содержащих группу G.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс групп. Полная решетка формаций Θ называется $\mathfrak{X}$-*отделимой* [2, с. 159], если для любого терма $\xi(x_1, \ldots, x_m)$ сигнатуры $\{\cap, \vee_\Theta\}$, любых Θ-формаций $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m$ и любой группы $A \in \mathfrak{X} \cap \xi(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{F}_m$, что $A \in \xi(\Theta\mathrm{form}A_1, \ldots, \Theta\mathrm{form}A_m)$.

Л е м м а 5. *Решетка $c_{\omega_n}^{\tau}$ $\mathfrak{G}$-отделима.*

Для всякого терма ξ сигнатуры $\{\cap, \vee_{\omega_n}^{\tau}\}$ через $\overline{\xi}$ мы обозначаем терм сигнатуры $\{\cap, \vee_{\omega_{n-1}}^{\tau}\}$, получаемый из терма ξ заменой каждого вхождения символа $\vee_{\omega_n}^{\tau}$ на символ $\vee_{\omega_{n-1}}^{\tau}$.

Л е м м а 6. *Пусть $\xi(x_1, \ldots, x_m)$ – терм сигнатуры $\{\cap, \vee_{\omega_n}^{\tau}\}$, f_i – внутренний $c_{\omega_{n-1}}^{\tau}$-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, где $i = 1, \ldots, m$. Тогда*

$$\xi(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m) = CF_\omega(\overline{\xi}\ (f_1, \ldots, f_m)).$$

Л е м м а 7. *Пусть Θ – $\mathfrak{X}$-отделимая полная решетка формаций, η – такая ее подрешетка, которая со всякой своей формацией $\mathfrak{F}$ содержит и все ее однопорожденные Θ-подформации вида $\Theta\mathrm{form}A$, где $A \in \mathfrak{X}$. Тогда тождество $\xi_1 = \xi_2$ сигнатуры $\{\cap, \vee_\Theta\}$ истинно в η, если оно выполняется для всех однопорожденных Θ-формаций из η.*

Отметим, наконец, следующий результат, который в определенном смысле является обратным теореме 2.

Т е о р е м а 3. *Пусть $n \geq 1$. Тогда если ω – бесконечное множество, то системы тождеств решеток $c_{\omega_0}^{\tau}$ и $c_{\omega_n}^{\tau}$ совпадают.*

С л е д с т в и е 4. *При любых целых неотрицательных m и n решетки c_m и c_n имеют одну и ту же систему тождеств.*

В заключение отметим, что в ряде работ В. А. Ведерникова и его учеников (см., напр., [10; 11]) аналогичные вопросы исследовались в рамках оригинальной теории расслоенных формаций.

Литература

1. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М., 1989.
2. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск, 1997.
3. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* // Укр. мат. журн. 2000. Т. 52, № 6. С. 783–797.
4. *Го Вэньбинь, Скиба А. Н.* // Изв. вузов. Математика. 2002. № 5 (480). С. 14–22.
5. *Shemetkov L. A., Skiba A. N., Vorob'ev N. N.* // Asian-European J. of Mathematics. 2009. Vol. 2, N 1. P. 155–169.
6. *Воробьев Н. Н., Скиба А. Н., Царев А. А.* // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 2. С. 10–14.
7. *Воробьев Н. Н., Скиба А. Н., Царев А. А.* // Сибирский мат. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 1011–1024.
8. *Воробьев Н. Н., Царев А. А.* // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62, № 4. С. 453–463.
9. *Tsarev A. A., Vorob'ev N. N.* // Algebra Colloquium. 2012. Vol. 21, N 4. P. 357–364.
10. *Ведерников В. А., Сорокина М. М.* // Дискретная математика. 2001. Т. 13, вып. 3. С. 125–144.
11. *Еловикова Ю. А.* // Дискретная математика. 2006. Т. 18, вып. 2. С. 146–158.

N. N. VOROB'EV

vornic2001@yahoo.com

LAWS OF LATTICES OF FUNCTOR-CLOSED PARTIALLY COMPOSITION FORMATIONS

Summary

It is proved that every law of the lattice of all τ-closed formations of finite groups is fulfilled in the lattice of all τ-closed n-multiply ω-composition formations of finite groups, for every subgroup functor τ and every natural number n.