Доклады Национальной академии наук Беларуси

2012 **ноябрь–декабрь** **Том 56 № 6**

УДК 512.542

Н. Н. ВОРОБЬЕВ

О ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ФОРМАЦИЙ, ВЛОЖИМЫХ В ОДНОПОРОЖДЕННУЮ НАСЫЩЕННУЮ ФОРМАЦИЮ

(Представлено членом-корреспондентом Л. А. Шеметковым)

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины *Поступило 24.09.2012*

Хорошо известно [1, предложение 15.53], что многообразие групп $\mathfrak{M}$ может быть определено как такой гомоморф, что любая группа G обладает наименьшей нормальной подгруппой (обозначаемой символом $\mathfrak{M}(G)$), факторгруппа по которой принадлежит $\mathfrak{M}$. Произведением $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ двух многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс групп $(G \mid \mathfrak{H}(G) \in \mathfrak{M})$. Если рассмотрим эти две конструкции в классе всех конечных групп, то мы придем к определениям формации и произведения двух формаций (в этом случае вместо $\mathfrak{H}(G)$ обычно пишут $G^{\mathfrak{H}}$).

Ранее было доказано, что если произведение $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ нетривиальных многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ является кроссовым многообразием, т. е. многообразием, порожденным конечной группой, то $\mathfrak{H}$ абелево (П. М. Нейман [1]), $\mathfrak{M}$ нильпотентное, и $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ обладают взаимнопростыми экспонентами (А. Л. Шмелькин [2]). В дальнейшем этот результат получил развитие в теории насыщенных и ω-насыщенных формаций.

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется ω-насыщенной (или ω-локальной), если для любого простого числа $p \in \omega$ формация $\mathfrak{F}$ содержит всякую конечную группу G с $G/O_p(\Phi(G)) \in \mathfrak{F}$ (Л. А. Шеметков [3]). Формация $\mathfrak{F}$ называется разрешимо ω-насыщенной (или ω-композиционной), если для любого простого числа $p \in \omega$ формация $\mathfrak{F}$ содержит всякую конечную группу G с $G/\Phi(O_p(G)) \in \mathfrak{F}$ (А. Баллестер-Болинше и Л. А. Шеметков [4]). В случае, когда $\omega = \mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, символ ω опускают. Пересечение всех таких ω-насыщенных формаций, которые содержат некоторую фиксированную конечную группу G, называется однопорожденной ω-насыщенной формацией. По аналогии с этим, если $\mathfrak{F}$ является пересечением всех наследственных насыщенных формаций (насыщенных формаций), содержащих группу G, то пишут $\mathfrak{F} = l^s\mathrm{form}G$ ($\mathfrak{F} = l\mathrm{form}G$) и говорят, что $\mathfrak{F}$ является однопорожденной наследственной насыщенной формацией (однопорожденной насыщенной формацией соответственно).

А. Н. Скибой [5] доказано, что если произведение $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ неединичных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ является однопорожденной насыщенной формацией, то 1) $\mathfrak{M}$ метанильпотентна; 2) для любых групп $A \in \mathfrak{M}$ и $B \in \mathfrak{H}$ экспоненты $A / F(A)$ и B взаимнопросты; 3) если $\mathfrak{M}$ ненильпотентна, то $\mathfrak{H}$ абелева. В дальнейшем, используя этот результат, А. Н. Скибой [6] было дано новое доказательство вышеназванного результата П. М. Неймана и А. Л. Шмелькина. Отметим, что работа А. Н. Скибы [5] стимулировала большое число исследований, относящихся к изучению факторизаций формаций (см., напр., [7–13]).

Если

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \cdots \mathfrak{F}_t \tag{1}$$

– произведение формаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_t$ и

$$\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \cdots \mathfrak{F}_{i-1}\mathfrak{F}_{i+1} \cdots \mathfrak{F}_t$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, t$, тогда (1) называется несократимой факторизацией формации $\mathfrak{F}$.

В 2000 г. А. Н. Скибой на Гомельском алгебраическом семинаре была поставлена следующая задача.

П р о б л е м а 1. *Пусть $\mathfrak{R} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ – произведение формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, и эта факторизация $\mathfrak{R}$ несократима. Предположим, что $\mathfrak{R}$ – подформация некоторой однопорожденной наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$. Что можно сказать об $\mathfrak{R}$? В частности, верно ли, что $\mathfrak{M}$ разрешима?*

При некоторых дополнительных ограничениях на $\mathfrak{R}$ (например, если $\mathfrak{R}$ насыщенная (А. Н. Скиба [5; 6]); разрешимо насыщенная (Го Вэньбинь, А. Н. Скиба, К. П. Шум [7–10]); разрешимо ω-насыщенная (Го Вэньбинь, В. М. Селькин, К. П. Шум [11]); $\mathfrak{X}$-насыщенная формация (А. Баллестер-Болинше, К. Кальво, Р. Эстебан-Ромеро [13]) и т. д.) ответ на оба вопроса, сформулированных в проблеме 1, известен. Первая теорема дает положительный ответ на второй из вопросов, поставленных в этой проблеме.

Т е о р е м а 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – однопорожденная наследственная насыщенная формация. Пусть $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ – неединичные формации. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) любая простая группа в $\mathfrak{M}$ абелева;

2) если $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{M}$ разрешима.

Доказательство теоремы 1 весьма сложное, и следующие леммы отражают некоторые его этапы.

Л е м м а 1. *Пусть $\mathfrak{F} = l^s\mathrm{form}G$ – однопорожденная наследственная насыщенная формация и $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ – неединичные формации. Тогда если $B \in \mathfrak{H}$ и существует простое число p такое, что $p^{|G|} \mid \exp(B)$, то $|A| = p$ для всех простых групп $A \in \mathfrak{M}$.*

Л е м м а 2. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ – произведение неединичных формаций $\mathfrak{M}$* и *$\mathfrak{H}$. Предположим, что каждая простая группа из $\mathfrak{M}$ абелева. Тогда если существует группа $A \in \mathfrak{M}$ и некоторое натуральное число n такое, что для каждой группы $B \in \mathfrak{H}$ ($|B| \geq n$)* $\mathfrak{H}$-радикал регулярного сплетения *$T = A \wr B$ не содержится подпрямо в базе сплетения T, то существует группа Z_p простого порядка p и группа D экспоненты превосходящей p^n, такая, что $Z_p \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ и $D \in \mathfrak{H}$.*

Л е м м а 3. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ – формации и $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ для некоторого простого p. Если для каждой простой группы $A \in \mathfrak{M}$ имеет место $|A| = p$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.*

Л е м м а 4. *Пусть p – простое число и $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где каждая простая в $\mathfrak{M}$ группа имеет порядок p. Тогда $G = A^{\mathfrak{H}} \wr (A / A^{\mathfrak{H}}) \in \mathfrak{F}$ для всех групп $A \in \mathfrak{F}$.*

Первым приложением теоремы 1 является следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Предположим, что $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ – такие неединичные формации, что формация $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ разрешимо p-насыщена, где $p \in \omega$. Пусть $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ – однопорожденная наследственная насыщенная формация. Тогда если $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{M}$ – p-насыщенная формация.*

С л е д с т в и е 1 [11, Proposition A]. *Пусть $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ – наследственная однопорожденная ω-насыщенная формация и $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ – такая разрешимо ω-насыщенная формация, что формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ являются неединичными. Если $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\omega\mathfrak{N}$.*

Теорема 1 послужила отправной точкой и к решению следующей известной задачи, сформулированной в работе А. Н. Скибы и Л. А. Шеметкова [14] под номером 19.

П р о б л е м а 2 (А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков, 1999). *Описать несократимые факторизации однопорожденных ω-насыщенных формаций.*

Заметим, что решение аналогичной задачи для разрешимо ω-насыщенных формаций – это один из основных результатов работы Го Вэньбиня, В. М. Селькина и К. П. Шума [11].

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Тогда символом $\mathfrak{F}(\omega')$ обозначают класс

$$\mathrm{form}(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F}),$$

а символом $\mathfrak{F}(p)$ обозначают класс

$$\mathrm{form}(G/O_p(G) \mid G \in \mathfrak{F}).$$

Полное решение проблемы 2 достигается в следующей теореме, доказанной на базе теорем 1 и 2.

Т е о р е м а 3. *Пусть $\mathfrak{R}$ – наследственная однопорожденная ω-насыщенная формация и*

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_t \subseteq \mathfrak{R}. \qquad (2)$$

Произведение (2) является несократимой факторизацией разрешимо ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ в том и только в том случае, когда выполняются следующие условия:

1) $t \leq 3$ и каждый фактор произведения (2) является неединичной формацией;

2) $\mathfrak{F}_1$ – однопорожденная ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{N}_\omega\mathfrak{N}$ и $\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})) \subseteq \pi(\mathfrak{F}_1)$;

3) если $\mathfrak{F}_1 \nsubseteq \mathfrak{N}_\omega$, то $t = 2$, $\mathfrak{F}_2$ – абелева однопорожденная формация и $(|A/F_\omega(A)|, |B|) = 1$, $(|A / O_\omega(A)|, |B|) = 1$ для любых групп $A \in \mathfrak{F}_1$ и $B \in \mathfrak{F}_2$;

4) если $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega$ и $t = 3$, то $|\pi(\mathfrak{F}_1)| > 1$, $\mathfrak{F}_3$ – однопорожденная абелева формация и для всех $p \in \pi(\mathfrak{F}_1)$, формация $\mathfrak{F}_2(p)$ является нильпотентной однопорожденной формацией, и $\pi(A / O_p(A)) \cap \pi(B) = \varnothing$ для всех групп $A \in \mathfrak{F}_2$ и $B \in \mathfrak{F}_3$;

5) если $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{N}_\omega$, $t = 2$ и $|\pi(\mathfrak{F}_1)| > 1$, то формации $\mathfrak{F}_2(\omega')$ и $\mathfrak{F}_2$ ограничены;

6) если $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{N}_p$ для некоторого простого числа $p \in \omega$, то $\mathfrak{F}_2(\omega')$ и $\mathfrak{F}_2(p)$ являются ограниченными формациями, $\mathfrak{F}_2 \nsubseteq \mathfrak{F}_1$, и существует такая группа $B \in \mathfrak{F}_2$, что для всех групп $A \in \mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$-корадикал $T^{\mathfrak{F}_2}$ регулярного сплетения $T = A \wr B$ содержится подпрямо в базе сплетения T.

В заключение отметим одно из приложений теоремы 3. Хорошо известен следующий результат Нейманов–Шмелькина [1, теорема 23.32]: *если $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 \ldots \mathfrak{M}_t$, где $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_t$ – неразложимые многообразия групп, тогда все факторы $\mathfrak{M}_i$ однозначно определены.*

Относительно формаций групп аналогичный результат не доказан (проблема 10.58 в «Коуровской тетради» [15]). Тем не менее, как следствие теоремы 3 доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 4. *Пусть произведение $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \ldots \mathfrak{F}_t$ является разрешимо ω-насыщенной формацией, причем формации $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_t$ неразложимы. Тогда если $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 \ldots \mathfrak{F}_t \subseteq \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ – некоторая однопорожденная ω-насыщенная формация, то все факторы $\mathfrak{F}_i$ однозначно определены.*

Литература

1. *Нейман Х.* Многообразия групп. М., 1969.
2. *Шмелькин А. Л.* // Изв. АН СССР. Математика. 1965. Т. 29. С. 149–170.
3. *Shemetkov L. A.* // Comm. Algebra. 1997. Vol. 25, N 3. P. 955–964.
4. *Ballester-Bolinches A., Shemetkov L. A.* // Math. Nachr. 1997. Vol. 186. P. 57–65.
5. *Skiba A. N.* // Contemp. Math. 1992. Vol. 131, pt. 1. P. 363–374.
6. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск, 1997.
7. *Скиба А. Н.* // Мат. заметки. 1999. Т. 65, вып. 3. С. 389–395.
8. *Guo Wenbin* // Comm. Algebra. 2000. Vol. 28, N 10. P. 4767–4782.
9. *Го Вэньбинь, Скиба А. Н.* // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 5. С. 545–560.
10. *Guo Wenbin, Shum K. P.* // J. Algebra. 2003. Vol. 267. P. 654–672.
11. *Guo Wenbin, Sel'kin V. M., Shum K. P.* // Comm. Algebra. 2007. Vol. 35, N 9. P. 2901–2931.
12. *Ballester-Bolinches A., Calvo C., Esteban-Romero R.* // Bull. Austral. Math. Soc. 2003. Vol. 68. P. 461–470.
13. *Баллестер-Болинше А., Кальво К.* // Сибирский мат. журн. 2009. Т. 50, № 3. С. 489–502.
14. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* // Мат. труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
15. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Изд. 17-е, доп., включающее Архив решенных задач / Сост. В. Д. Мазуров, Е. И. Хухро. Новосибирск, 2010.

N. N. VOROB'EV

vornic2001@mail.ru

**PRODUCTS OF FORMATIONS CONTAINED
IN A ONE-GENERATED SATURATED FORMATION**

Summary

In this paper irreducible factorizations of one-generated formations are described.