ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 3 2008
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

*УДК 512.542*

*Н. Н. ВОРОБЬЕВ*

# О КРАТНО ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЯХ СО СТОУНОВОЙ РЕШЕТКОЙ ПОДФОРМАЦИЙ

*Витебский государственный университет им. П. М. Машерова*

*(Поступила в редакцию 17.09.2007)*

**Введение.** Напомним, что формацией называется класс конечных групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. В 1963 г. В. Гашюцом [1] впервые был выделен важный для приложений класс локальных или насыщенных формаций (т. е. формаций, замкнутых относительно фраттиниевых расширений). В работе [1] также предложен способ конструирования такого рода формаций посредством функций специального вида, называемых локальными спутниками.

Функции вида

$$f \mapsto \{\text{формации групп}\}$$

называются спутниками [2]. Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \pi(G)$, то пишут $\mathfrak{F} = LF(f)$ и говорят, что $f$ – локальный спутник формации $\mathfrak{F}$. Здесь символами $F_p(G)$ и $\pi(G)$ обозначается соответственно $p$-нильпотентный радикал конечной группы $G$ и множество всех различных простых делителей порядка конечной группы $G$. Формация, обладающая хотя бы одним локальным спутником, называется локальной [2].

Согласно концепции кратной локализации, предложенной А. Н. Скибой [3], всякая формация считается 0-кратно локальной, а при $n > 0$ формация $\mathfrak{F}$ называется $n$-кратно локальной, если $\mathfrak{F} = LF(f)$, где всякое непустое значение локального спутника $f$ является $(n-1)$-кратно локальной формацией. Если формация $\mathfrak{F}$ $n$-кратно локальна для всех натуральных $n$, то $\mathfrak{F}$ называется тотально локальной.

Пусть $\mathfrak{F}$ – $n$-кратно локальная формация. Тогда символом $L_n(\mathfrak{F})$ обозначается решетка всех ее $n$-кратно локальных подформаций. Аналогично, если $\mathfrak{F}$ – тотально локальная формация, то символом $L_\infty(\mathfrak{F})$ обозначается решетка всех ее тотально локальных подформаций.

Рассматриваются только конечные группы. Определения и обозначения, которые мы не приводим, можно найти в [4–6]

Задача классификации кратно локальных и тотально локальных классов конечных групп является одной из основных в теории классов конечных групп. Один из подходов для реализации такой задачи состоит в изучении формации в зависимости от свойств решетки ее подформаций. В настоящей работе на этом пути доказаны

Т е о р е м а А. *Пусть $\mathfrak{F}$ – $n$-кратно локальная формация. Тогда и только тогда решетка $L_n(\mathfrak{F})$ стоунова, когда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Т е о р е м а В. *Пусть $\mathfrak{F}$ – тотально локальная формация. Тогда и только тогда решетка $L_\infty(\mathfrak{F})$ стоунова, когда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

**1. Доказательство теоремы А.** Напомним некоторые определения [2], связанные с локальными формациями. Символ $l_n$ (соответственно $l_\infty$) обозначает решетку всех $n$-кратно локальных формаций (решетку всех тотально локальных формаций). Локальный спутник $f$ называется $l_n$-значным ($l_\infty$-значным), если каждое его непустое значение принадлежит $l_n$ (соответственно $l_\infty$). Пусть $\{f_i(p) \mid i \in I\}$ – произвольная совокупность $l_n$-значных ($l_\infty$-значных) локальных спутников. Для каждого $p \in \mathbb{P}$ обозначают $(\bigcap_{i\in I} f_i)(p) = \bigcap_{i\in I} f_i(p)$. Спутник $\bigcap_{i\in I} f_i$ называется пересечением локальных спутников $f_i$. Если формация $\mathfrak{F}$ обладает хотя бы одним $l_n$-значным ($l_\infty$-значным) локальным спутником, то пересечение всех таких локальных спутников $\mathfrak{F}$ называется минимальным $l_n$-значным ($l_\infty$-значным) локальным спутником $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная непустая совокупность групп. Пересечение всех $n$-кратно локальных формаций (тотально локальных формаций), содержащее $\mathfrak{X}$, обозначается $l_n\mathrm{form}\mathfrak{X}$ (соответственно $l_\infty\mathrm{form}\mathfrak{X}$) и называется $n$-кратно локальной формацией, порожденной $\mathfrak{X}$ (тотально локальной формацией, порожденной $\mathfrak{X}$). Если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то мы пишем $l_n\mathrm{form}G$ вместо $l_n\mathrm{form}\{G\}$ (соответственно $l_\infty\mathrm{form}G$ вместо $l_\infty\mathrm{form}\{G\}$). Всякая формация такого вида называется однопорожденной $n$-кратно локальной (тотально локальной) формацией.

Обозначим $\mathcal{K}(G) = (\mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ – множество всех композиционных факторов группы $G$. Символом $\mathcal{K}(\mathfrak{F})$ обозначается объединение множеств $\mathcal{K}(G)$ для всех групп $G$ из $\mathfrak{F}$.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – некоторая система непустых подклассов $\mathfrak{F}_i$ класса групп $\mathfrak{F}$ и пусть $|I| > 1$. Согласно [4] будем писать $\oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ (в частности, $\mathfrak{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{F}_n$, если $I = \{1,\ldots,n\}$), если для любых различных $i, j \in I$ имеет место $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ и, кроме того, каждая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид $G = A_1 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых натуральных $n$, $t$ и $i_1, \ldots, i_t \in I$.

Условимся писать $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, если $|I| = 1$ и $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}$. Всякое представление класса групп $\mathfrak{F}$ в виде $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $|I| > 1$ называется прямым разложением этого класса.

Для доказательства основных результатов нам потребуются следующие леммы.

Л е м м а 1 [4, следствие 4.3.6]. *Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – такая система подформаций формации $\mathfrak{F}$, что*

$$\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i)$$

*и $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ для любых различных $i$ и $j$ из $I$. Тогда $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$.*

Л е м м а 2 [4, теорема 4.3.8]. *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i$ – некоторые формации. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ является n-кратно локальной, когда n-кратно локальна каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$.*

Л е м м а 3 [4, лемма 4.3.4]. *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{M}$ – непустая подформация формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{M} = \oplus_{i\in I}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_i)$.*

Л е м м а 4 [4, лемма 4.3.11]. *Пусть $\mathfrak{F} = l_n\mathrm{form}G$ – однопорожденная n-кратно локальная формация. Тогда решетка $L_n(\mathfrak{F})$ имеет лишь конечное число атомов.*

Л е м м а 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ – n-кратно локальная формация. Тогда если формация $\mathfrak{N}_p$ дополняема в решетке $L_n(\mathfrak{F})$ для каждого $p \in \pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{M}$ – $n$-кратно локальная подформация формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что если $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$, то подформация $\mathfrak{N}_p$ дополняема в решетке $L_n(\mathfrak{M})$. Действительно, пусть $\mathfrak{H}$ – дополнение к $\mathfrak{N}_p$ в решетке $L_n(\mathfrak{F})$. Тогда, согласно леммам 1 и 2,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \vee_n \mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p \oplus \mathfrak{H},$$

и поэтому по лемме 3

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{N}_p \oplus \mathfrak{H}) = (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_p) \oplus (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p \oplus (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p \vee_n (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}),$$

где $\mathfrak{N}_p \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = (1)$. Следовательно, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ – дополнение к $\mathfrak{N}_p$ в решетке $L_n(\mathfrak{M})$. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда $\mathfrak{F}$ – однопорожденная $n$-кратно локальная формация.

Заметим, что в этом случае, согласно лемме 4, мы можем использовать индукцию по числу атомов в решетке $L_n(\mathfrak{F})$.

Пусть $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – дополнение к $\mathfrak{N}_p$ в $L_n(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{N}_p \not\subseteq \mathfrak{H}$ и поэтому по индукции $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$. Лемма доказана.

Пусть $L$ – решетка с 0. Тогда элемент $a^*$ называется псевдодополнением элемента $a (\in L)$, если из $a \wedge a^* = 0$ и $a \wedge x = 0$ следует, что $x \leq a^*$. Решетка с 0 называется решеткой с псевдодополнениями, если каждый ее элемент обладает псевдодополнением. Дистрибутивная решетка с псевдодополнениями, каждый элемент которой удовлетворяет тождеству $a^* \vee (a^*)^* = 1$, называется стоуновой решеткой.

Доказательство теоремы А. Пусть $\mathfrak{F}$ – $n$-кратно локальная формация. Допустим, что $L_n(\mathfrak{F})$ – стоунова решетка и пусть $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$.

Заметим, что для каждой $n$-кратно локальной подформации $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$ формация $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ является псевдодополнением элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L_n(\mathfrak{F})$, где $\pi = \pi(\mathfrak{M})$. Действительно, для $n$-кратно локальной формации $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ имеем $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$ тогда и только тогда, когда $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$. Значит, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ и поэтому $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ – псевдодополнение элемента $\mathfrak{M}$ в $L_n(\mathfrak{F})$.

Таким образом, $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}$ – псевдодополнение элемента $\mathfrak{N}_p$ в $L_n(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{N}_p$ – псевдодополнение элемента $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}$ в $L_n(\mathfrak{F})$. Вместе с тем, по индукции $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \vee_n (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'})$. Следовательно, для каждого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ формация $\mathfrak{N}_p$ дополняема в $L_n(\mathfrak{F})$ и поэтому по лемме 5 $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.

Пусть теперь $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$. Пусть $\mathfrak{M} \in L_n(\mathfrak{F})$, $\pi_1 = \pi(\mathfrak{M})$ и $\pi_2 = \pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi(\mathfrak{M})$. Если $\pi_1 = \pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$ и (1) – дополнение элемента $\mathfrak{M}$ в решетке $L_n(\mathfrak{F})$. В противном случае $\mathfrak{N}_{\pi_2}$ – дополнение элемента $\mathfrak{M}$ в $L_n(\mathfrak{F})$. Поэтому $L_n(\mathfrak{F})$ булева решетка. Теорема доказана.

**2. Доказательство теоремы В.** Следующая лемма очевидна.

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ – тотально локальная формация. Тогда если $p \in \pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$.*

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{F}$ – однопорожденная тотально локальная формация. Тогда решетка $L_\infty(\mathfrak{F})$ содержит только конечное число атомов.*

Доказательство. Пусть $p \in \pi(G)$. Покажем, что $\mathfrak{N}_p$ – атом решетки $L_\infty(\mathfrak{F})$. Пусть $\mathfrak{M}$ – атом решетки $L_\infty(\mathfrak{F})$. Тогда по лемме 6 $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$. Но $\mathfrak{M}$ – атом. Поэтому $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{M}$.

Поскольку $G$ конечная группа, то существует конечное число атомов в решетке $L_\infty(\mathfrak{F})$. Лемма доказана.

Лемма 8 [4, следствие 4.3.9]. *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i$ – формация для всех $i \in I$. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ тотально локальна, когда каждая формация $\mathfrak{F}_i$ тотально локальна.*

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{F}$ – тотально локальная формация. Тогда если формация $\mathfrak{N}_p$ дополняема в решетке $L_\infty(\mathfrak{F})$ для каждого $p \in \pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ – тотально локальная подформация формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что если $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$, то подформация $\mathfrak{N}_p$ дополняема в решетке $L_\infty(\mathfrak{M})$. Действительно, пусть $\mathfrak{H}$ – дополнение элемента $\mathfrak{N}_p$ в $L_\infty(\mathfrak{F})$. Тогда, согласно леммам 1 и 8,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \vee_\infty \mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p \oplus \mathfrak{H},$$

и поэтому по лемме 3

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{N}_p \oplus \mathfrak{H}) = (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_p) \oplus (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p \oplus (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p \vee_\infty (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}),$$

где $\mathfrak{N}_p \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = (1)$. Следовательно, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ – дополнение элемента $\mathfrak{N}_p$ в $L_\infty(\mathfrak{M})$. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда $\mathfrak{F}$ – однопорожденная тотально локальная формация. Заметим, что в этом случае, ввиду леммы 7, мы можем использовать индукцию по числу атомов в решетке $L_\infty(\mathfrak{F})$.

Пусть $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – дополнение элемента $\mathfrak{N}_p$ в $L_\infty(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{N}_p \not\subseteq \mathfrak{H}$ и поэтому по индукции $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$. Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы В. Пусть $\mathfrak{F}$ – тотально локальная формация. Допустим, что $L_\infty(\mathfrak{F})$ стоунова решетка и пусть $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$.

Заметим, что для каждой тотально локальной подформации $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$ формация $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ является псевдодополнением элемента $\mathfrak{M}$ в $L_\infty(\mathfrak{F})$, где $\pi = \pi(\mathfrak{M})$. Действительно, для тотально локальной формации $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ имеем $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$ в том и только в том случае, если $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$. Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ и поэтому $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi'}$ является псевдодополнением элемента $\mathfrak{M}$ в $L_\infty(\mathfrak{F})$.

Таким образом, $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}$ – псевдодополнение элемента $\mathfrak{N}_p$ в $L_\infty(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{N}_p$ – псевдодополнение элемента $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}$ в $L_\infty(\mathfrak{F})$. Вместе с тем по предположению $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \vee_\infty (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'})$. Значит, для каждого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ формация $\mathfrak{N}_p$ дополняема в $L_\infty(\mathfrak{F})$ и поэтому, согласно лемме 9, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.

Пусть теперь $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$. Пусть также $\mathfrak{M} \in L_\infty(\mathfrak{F})$, $\pi_1 = \pi(\mathfrak{M})$ и $\pi_2 = \pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi(\mathfrak{M})$. Если $\pi_1 = \pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$ и $(1)$ – дополнение элемента $\mathfrak{M}$ в $L_\infty(\mathfrak{F})$. В противном случае $\mathfrak{N}_{\pi_2}$ – дополнение элемента $\mathfrak{M}$ в $L_\infty(\mathfrak{F})$. Кроме того, решетка $L_\infty(\mathfrak{F})$ дистрибутивна. Следовательно, решетка $L_\infty(\mathfrak{F})$ булева. Поэтому $L_\infty(\mathfrak{F})$ – стоунова решетка. Теорема доказана.

**3. Некоторые следствия.**

Следствие 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *формация $\mathfrak{F}$ локальна и решетка $L_1(\mathfrak{F})$ стоунова;*

2) *формация $\mathfrak{F}$ n-кратно локальна и решетка $L_n(\mathfrak{F})$ стоунова;*

3) *формация $\mathfrak{F}$ тотально локальна и решетка $L_\infty(\mathfrak{F})$ стоунова;*

4) *формация $\mathfrak{F}$ локальна и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$.*

Следствие 2. *Решетка всех разрешимых тотально локальных формаций является решеткой с псевдодополнениями.*

Напомним, что представление элемента $a$ в виде $x_0 \vee \ldots \vee x_{n-1}$ называется сократимым [6], если

$$a = x_0 \vee \ldots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \ldots \vee x_{n-1}$$

для некоторого $0 \le i < n$. В противном случае оно называется несократимым.

Тотально локальная формация $\mathfrak{F}$ называется $l_\infty$-неприводимой [2], если ее невозможно представить в виде $\mathfrak{F} = \vee_\infty(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – совокупность всех собственных тотально локальных подформаций из $\mathfrak{F}$.

Используя лемму 5.1.7 [4] и следствие 13 теоремы 9 из [6, гл. II] получаем

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимая однопорожденная тотально локальная формация. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным представлением в виде несократимого объединения $\mathfrak{F}_1 \vee_\infty \ldots \vee_\infty \mathfrak{F}_t$ некоторых своих тотально локальных $l_\infty$-неприводимых подформаций $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_t$.*

Для любых двух тотально локальных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ решетка всех тотально локальных формаций, заключенных между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, обозначается (см. [4]) $\mathfrak{H}/_{\infty}\mathfrak{M}$.

С л е д с т в и е 4 [4]. *Для любых двух разрешимых тотально локальных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ справедлив решеточный изоморфизм*

$$\mathfrak{M} \vee_{\infty} \mathfrak{H}/_{\infty}\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{H}/_{\infty}\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}.$$

## Литература


1. G a s c h u t z W. // Math. Z. 1963. Bd. 80, N 4. S. 300–305.
2. С к и б а А. Н., Ш е м е т к о в Л. А. // Матем. труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
3. С к и б а А. Н. О локальных формациях длины 5. Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Минск, 1986. С. 135–149.
4. С к и б а А. Н. Алгебра формаций. Минск, 1997.
5. D o e r k K. a n d H a w k e s T. Finite soluble groups. Berlin; New York, 1992.
6. Г р е т ц е р Г. Общая теория решеток. М., 1982.


*N. N. VOROB'EV*

**MULTIPLY LOCAL FORMATIONS WITH STONE LATTICE OF SUBFORMATIONS**

## Summary

*n*-Multiply local (totally local) formations having a Stone lattice of *n*-multiply local (totally local) subformations are described.