2013 январь–февраль Том 57 № 1

УДК 512.542

Н. Н. ВОРОБЬЕВ

КЛАССЫ ФИТТИНГА С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ РЕШЕТОЧНЫХ ОБЪЕДИНЕНИЙ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины *Поступило 19.12.2012*

Все рассматриваемые группы конечны и π-разрешимы. *Классом Фиттинга* называется класс групп $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) каждая нормальная подгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) из того, что нормальные подгруппы A и B группы G принадлежат $\mathfrak{F}$, всегда следует, что их произведение AB принадлежит $\mathfrak{F}$.

Из условия 2) определения следует, что если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то любая группа G обладает наибольшей нормальной подгруппой в $\mathfrak{F}$, обозначаемой символом $G_{\mathfrak{F}}$, которую называют *$\mathfrak{F}$-радикалом* группы G.

В работе Кусака [1] в универсуме $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп введена операция «$\vee$» решеточного объединения классов Фиттинга, а также определены условия модулярности решетки таких классов. Напомним, что если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, то

$$\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} = \mathrm{Fit}(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}),$$

где $\mathrm{Fit}(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H})$ – наименьший класс Фиттинга, содержащий классы $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$.

В настоящей работе мы используем операцию «$\vee$» для определения нового достаточно широкого семейства классов Фиттинга, которое, в частности, содержит все локальные классы Фиттинга. Более того, для таких классов нами подтверждена гипотеза Локетта о том, что каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется как пересечение классов $\mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{X}$. При этом $\mathfrak{F}^*$ – наименьший класс Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что $\mathfrak{F}^*$-радикал прямого произведения любых групп G и H равен прямому произведению $\mathfrak{F}^*$-радикалов этих групп и $\mathfrak{X}$ – некоторый нормальный класс Фиттинга. Непустой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *нормальным*, если для любой группы G, ее $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$ является максимальной из подгрупп G, принадлежащих $\mathfrak{F}$ [2]. Брайсом и Косси [3] доказано, что каждый разрешимый класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в том и только в том случае, если справедливо равенство $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{S}_*$, где $\mathfrak{F}_*$ – пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{S}_*$ – наименьший нормальный класс Фиттинга.

Дерком и Хоуксом [2, гл. X, предложение 6.1] (см. также [3]) была предложена следующая общая версия гипотезы Локетта, которая известна как

Обобщенная гипотеза Локетта. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ *удовлетворяет гипотезе Локетта в* $\mathfrak{H}$, если справедливо равенство $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}_*$.

Пусть ω – некоторое непустое множество простых чисел; $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Символы $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_p$, $\mathfrak{E}_{p'}$ и $\mathfrak{E}_{\omega d}$ обозначают соответственно классы всех групп, нильпотентных групп, p-групп, p'-групп и класс групп, у которых каждый композиционный фактор является ωd-группой. Для любого класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$ символом $G^{\mathfrak{F}}$ обозначают пересечение всех нормальных подгрупп N таких, что $G / N \in \mathfrak{F}$, которое называют *$\mathfrak{F}$-корадикалом* группы G. Будем обозначать (см. [4]) $\mathfrak{E}_{\omega d}$-корадикал и $\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$-корадикал группы G как $G^{\omega d}$ и $F^p(G)$ соответственно.

Функции вида

$$f\colon \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{классы Фиттинга}\}$$

называют *ω-локальными функциями Хартли* или *H-функциями* [4]. Для любой ω-локальной H-функции f определяют класс

$$LR_{\omega}(f) = (G \mid G^{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } F^{p}(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)).$$

Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = LR_{\omega}(f)$, то говорят, что $\mathfrak{F}$ – *ω-локальный класс Фиттинга* с *ω-локальной H-функцией f.* В случае $\omega = \mathbb{P}$ символ ω опускают и класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *локальным* (см. [4]).

Субнормальным вложением подгруппы S в группу G называется такой мономорфизм $\alpha\colon S \to G$, что $\alpha(S) \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Символом $\mathrm{Snemb}(S \to G)$ обозначают множество всех субнормальных вложений S в G. Если G – некоторая группа, то подгруппа $N(G)$ определяется следующим образом (см. [5]):

$$N(G) = \langle x^{-1}x^{\alpha} \mid x \in S \trianglelefteq\trianglelefteq G \text{ и } \alpha \in \mathrm{Snemb}(S \to G)\rangle.$$

Для доказательства основного результата мы используем следующие известные свойства подгруппы $N(G)$, которые приведем в виде двух лемм.

Лемма 1 [5, замечание 3.1; лемма 3.2]. *Если G – группа и $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, то справедливы следующие утверждения*:

1) $N(G)$ – характеристическая подгруппа группы G;

2) $N(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}_*}$ для всех $G \in \mathfrak{F}$.

Лемма 2 [5, предложение 4.1]. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{X}$ – классы Фиттинга. Тогда следующие условия равносильны*:

1) $\mathfrak{F}_* \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$;

2) $N(G) \cap G_{\mathfrak{H}} \leq G_{\mathfrak{X}}$ для всех $G \in \mathfrak{F}$.

Символом $\mathrm{Hall}_{\pi}(G)$ обозначают множество всех холловых π-подгрупп группы G. Нами установлена следующая взаимосвязь подгруппы $N(G)$ и холловой π-подгруппы группы G.

Лемма 3. *Пусть G – группа, $H \in \mathrm{Hall}_{\pi}(G)$, $H \in \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Тогда $H \cap N(G) \subseteq N(HG_{\mathfrak{F}})$.*

Следуя [1], определим множество групп $\mathfrak{T}$ следующим образом:

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{T}$ – непустое множество групп такое, что выполняются следующие условия:*

1) если $G \in \mathfrak{T}$ и N char G, то $N \in \mathfrak{T}$;

2) если $H, K \in \mathfrak{T}$, то существует $M \in \mathfrak{T}$ такая, что $H, K \trianglelefteq M = HK$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. При помощи множества $\mathfrak{T}$ построим множество групп:

$$\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}} = \{G \mid \text{ существует такая группа } K \in \mathfrak{T}, \text{что } (G \times K)_{\mathfrak{F}} \text{ входит подпрямо в } (G \times K)\}.$$

Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Пересечение всех классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{X}$, обозначают символом $\mathrm{Fit}\,\mathfrak{X}$ и называют *классом Фиттинга, порожденным* $\mathfrak{X}$. Для любых двух классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ через $L(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ обозначают решетку классов Фиттинга, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$.

Некоторые важные свойства класса $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}}$ описывает следующее

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}}$ – класс Фиттинга;

2) $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}} = \mathfrak{F} \vee \mathrm{Fit}(\mathfrak{T} \cap \mathfrak{F}^*) \in L(\mathfrak{F}_*, \mathfrak{F}^*)$.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F} \vee (\mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}) = \{G \mid$ существует такая группа $K \in \mathfrak{H}$, что $(G \times K)_{\mathfrak{F}}$ входит подпрямо в $(G \times K)\}$ и $\mathfrak{F} \vee (\mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}} \in L(\mathfrak{F}_*, \mathfrak{F}^*)$. В частности, $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} = \mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{T}}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}^*$.*

Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Тогда

$$\mathrm{s}_n\mathfrak{X} = (G \mid G \trianglelefteq\trianglelefteq H \text{ для некоторой группы } H \in \mathfrak{X}).$$

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– такие классы Фиттинга, что*

$$\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} = s_n\{G \mid G = G_{\mathfrak{F}}G_{\mathfrak{H}}\}.$$

Тогда если $\mathfrak{X}$ *– класс Фиттинга, причем* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, *то*

$$\mathfrak{F} \vee (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}) = (\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{X}.$$

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга с условием Локетта в классе Фиттинга* $\mathfrak{X}$ [6], если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}_*$. Очевидно, что если $\mathfrak{F}$ – класс Локетта, то $\mathfrak{F}$ является классом с условием Локетта в $\mathfrak{X}$ в точности тогда, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{X}$. В частности, если $\mathfrak{S}$ – класс всех конечных разрешимых групп, то $\mathfrak{F}$ является классом с условием Локетта в $\mathfrak{S}$ тогда и только тогда, когда для $\mathfrak{F}$ справедлива гипотеза Локетта.

Пусть π – непустое множество простых чисел и I – такое непустое множество, что выполняются следующие условия:

1) $\pi = \bigcup\limits_{i \in I} \pi(i)$;

2) $\pi(i) \neq \varnothing$ для всех $i \in I$;

3) $\pi(i) \cap \pi(j) = \varnothing$ для $i \neq j$ и $i, j \in I$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. *Характеристику класса* $\mathfrak{X}$ определяют следующим образом:

$$\mathrm{Char}(\mathfrak{X}) = \{p \mid p \in \mathbb{P} \text{ и } Z_p \in \mathfrak{X}\}.$$

Посредством операции «$\vee$» определим следующее семейство классов Фиттинга.

О п р е д е л е н и е 2. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– класс Фиттинга и* $\pi = \mathrm{Char}(\mathfrak{X})$. *Тогда:*

1) класс $\mathfrak{X}$ *удовлетворяет условию* (α_i) *для* $i \in I$, *если существует класс Фиттинга* $\mathfrak{Y}$ *такой, что* $(\mathfrak{X}_*\mathfrak{G}_{\pi'(i)} \cap \mathfrak{X}) \vee \mathfrak{Y}\mathfrak{G}_{\pi(i)} = \mathfrak{X}$;

2) класс $\mathfrak{X}$ *удовлетворяет условию* (α), *если* $\mathfrak{X}$ *удовлетворяет условию* (α_i) *для всех* $i \in I$.

Заметим, что уже в случае $I = \mathbb{P}$ и $\pi(p) = \{p\}$ обширность семейства таких классов подтверждает следующая

Т е о р е м а 1. *Каждый* ω*-локальный класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *с* $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$ *удовлетворяет условию* (α).

В случае $\omega = \mathbb{P}$ из теоремы 1 получаем

С л е д с т в и е 2. *Каждый локальный класс Фиттинга удовлетворяет условию* (α).

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга характеристики π и в дальнейшем класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ таков, что каждая группа из $\mathfrak{H}$ имеет нильпотентную холлову π-подгруппу. Семейство классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ с условием Локетта в классе $\mathfrak{H}$ описывает

Т е о р е м а 2. *Каждый класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$, *удовлетворяющий условию* (α) *и содержащийся в классе Фиттинга* $\mathfrak{H}$, *является классом Фиттинга с условием Локетта в классе* $\mathfrak{H}$.

Классом Локетта называют такой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.

С л е д с т в и е 3. *Каждый класс Локетта* $\mathfrak{F}$ *с условием* (α) *в классе Фиттинга* $\mathfrak{H}$ *удовлетворяет гипотезе Локетта в* $\mathfrak{H}$.

Приведем также два следствия из теоремы 2 в универсуме $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп.

С л е д с т в и е 4. *Каждый* ω*-локальный класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *с* $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, *содержащийся в классе Фиттинга* $\mathfrak{H}$, *удовлетворяет гипотезе Локетта в* $\mathfrak{H}$.

С л е д с т в и е 5 [7, теорема]. *Каждый локальный класс Фиттинга удовлетворяет гипотезе Локетта.*

Литература

1. *Cusack E.* // Math. Z. 1979. Vol. 167. P. 37–47.
2. *Doerk K., Hawkes T.* Finite Soluble Groups. De Gruyter Expo. Math., 4. Berlin; New York, 1992.
3. *Bryce R. A., Cossey J.* // Math. Z. 1975. Vol. 141. P. 99–110.
4. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* // Мат. тр. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.

5. *Gállego M. P.* // Comm. Algebra. 1996. Vol. 24, N 6. P. 2011–2023.
6. *Савельева Н. В.*, *Воробьев Н. Т.* // Сибирский мат. журн. 2008. Т. 49, № 6. С. 1411–1419.
7. *Воробьев Н. Т.* // Мат. заметки. 1988. Т. 43, вып. 2. С. 161–168.

N. N. VOROB'EV

vornic2001@yahoo.com

FITTING CLASSES WITH THE GIVEN PROPERTIES OF LATTICE JOIN OPERATIONS

Summary

In this paper a new family of Fitting classes satisfying the Lockett Conjecture is described. All local Fitting classes belong to the family.