Н. Н. Воробьев, А. Н. Скиба, А. А. Царев, Тождества решеток частично композиционных формаций, *Сиб. матем. журн.*, 2011, том 52, номер 5, 1011–1024

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2011. Том 52, № 5

УДК 512.552

ТОЖДЕСТВА РЕШЕТОК ЧАСТИЧНО КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ

Н. Н. Воробьев, А. Н. Скиба, А. А. Царев

Аннотация. Доказано, что всякое тождество решетки всех формаций конечных групп справедливо в решетке всех n-кратно ω-композиционных формаций конечных групп для любого непустого множества простых чисел ω и любого натурального n.

Ключевые слова: конечная группа, формация групп, ω-композиционный спутник формации, n-кратно ω-композиционная формация, решетка формаций, тождество решетки, модулярная решетка, индуктивная решетка формаций, $\mathfrak{X}$-отделимая решетка формаций.

Посвящается профессору К. П. Шаму
в связи с его 70-летием

Введение

В работе рассматриваются только конечные группы. В дальнейшем символ ω означает некоторое непустое множество простых чисел и $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Символом $C^p(G)$ обозначают пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, у которых композиционные факторы имеют простой порядок p (если в группе G нет таких факторов, то полагают $C^p(G) = G$). Для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $\mathrm{Com}(\mathfrak{X})$ обозначают класс всех простых абелевых групп A таких, что $A \simeq H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы $G \in \mathfrak{X}$. Символом $R_\omega(G)$ обозначим $\mathfrak{S}_\omega$-радикал группы G, т. е. произведение всех таких ее разрешимых нормальных подгрупп, которые являются ω-группами.

Формацией называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. В теории формаций особую роль занимают так называемые ω-насыщенные формации. Формация $\mathfrak{F}$ называется *ω-насыщенной,* если ей принадлежит всякая группа G, удовлетворяющая условию $G/L \in \mathfrak{F}$, где $L \subseteq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$. Значительно возросший в последние годы интерес к ω-насыщенным формациям привел к возникновению их естественных обобщений (ω-композиционные формации [1], $\mathfrak{X}$-локальные формации [2] и др.).

Пусть f — произвольная функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}. \qquad (1)$$

Следуя [1], сопоставим функции f класс групп

$$CF_\omega(f) = (G \mid G/R_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/C^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G))).$$

Работа первых двух авторов выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Ф10Р–231).

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ для некоторой функции f вида (1), то $\mathfrak{F}$ называют *ω-композиционной формацией с ω-композиционным спутником* f [1].

Всякая формация считается 0-кратно ω-композиционной, а при $n > 0$ формация $\mathfrak{F}$ называется *n-кратно ω-композиционной* [1], если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где все непустые значения спутника f являются $(n-1)$-кратно ω-композиционными формациями. Относительно включения $\subseteq$ множество всех n-кратно ω-композиционных формаций c_n^ω образует полную решетку [1]. Следует отметить, что ω-композиционные (в частности, n-кратно ω-композиционные) формации в отличие от класса насыщенных формаций, класса ω-насыщенных формаций и класса композиционных формаций не вкладываются в теорию $\mathfrak{X}$-локальных формаций, развитую в работе Баллестера-Болинше, Кальво и Л. А. Шеметкова [2]. В то же время n-кратно ω-композиционные формации, как и n-кратно ω-насыщенные формации, наиболее полезны в различных приложениях теории формаций.

В книгах [3, 4] и в недавно вышедших книгах [5, 6] показано, что конструкции и результаты теории решеток являются полезным инструментом при изучении групп и формаций групп. В 1986 г. А. Н. Скибой [7] установлена модулярность решетки всех (насыщенных) формаций. Впоследствии этот факт нашел много приложений при исследовании структуры насыщенных формаций (см. [3, гл. 4; 4, гл. 4, 5; 5, гл. 4]). В монографии [4] А. Н. Скиба доказал, что при любых натуральных m и n у решетки всех τ-замкнутых m-кратно насыщенных формаций и у решетки всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций системы тождеств совпадают. Позднее Го Вэньбинь и А. Н. Скиба [8] показали, что для любого бесконечного множества простых чисел ω и при любых различных натуральных m и n системы тождеств решетки всех m-кратно ω-насыщенных формаций и решетки всех n-кратно ω-насыщенных формаций совпадают, а в работе Л. А. Шеметкова, А. Н. Скибы и Н. Н. Воробьева [9] этот результат распространен на решетки функторно замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций.

Отметим, что в работе Го Вэньбиня и К. П. Шама [10] описаны ненильпотентные тотально насыщенные формации $\mathfrak{F}$ с булевой решеткой $\mathfrak{F}/_\infty \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ всех тотально насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$, а в работе Го Вэньбиня [11] описаны τ-замкнутые n-кратно насыщенные формации $\mathfrak{F}$ с булевой решеткой $\mathfrak{F}/_n^\tau \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$.

Отметим, наконец, что в ряде работ В. А. Ведерникова и его учеников (см., например, [12–15]) аналогичные вопросы исследовались в рамках оригинальной теории расслоенных формаций.

Среди открытых задач в данном направлении напомним следующий вопрос, поставленный в работе [1, проблема 3, с. 796]: *верно ли, что для любых целых неотрицательных m, n и произвольного непустого множества простых чисел ω у решеток c_m^ω и c_n^ω системы тождеств совпадают?*

Главной целью данной работы является решение такой задачи в случае, когда ω является бесконечным множеством простых чисел. Важным этапом в достижении этой цели явилась работа [16], где установлена индуктивность решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций (см. [4, определение 4.1]).

Мы будем использовать стандартную терминологию из [1, 3–6, 17].

1. Предварительные сведения

Напомним, что *полуформацией* [3] называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов. Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная совокупность групп. Через $\operatorname{form}\mathfrak{X}$ обозначается наименьшая формация, содержащая $\mathfrak{X}$.

Напомним несколько известных утверждений, которые потребуются нам для доказательства основных результатов.

Лемма 1 [4, следствие 1.2.26]. *Пусть $\mathfrak{X}$ — полуформация и $A \in \mathfrak{F} = \operatorname{form}\mathfrak{X}$. Тогда если A — монолитическая группа и $A \notin \mathfrak{X}$, то в $\mathfrak{F}$ найдется группа H с такими нормальными подгруппами N, $N_1, \dots, N_t$; M, $M_1, \dots, M_t$ $(t \geqslant 2)$, что выполняются следующие утверждения:*

1) $H/N \simeq A$, $M/N = \operatorname{Soc}(H/N)$;

2) $N_1 \cap \dots \cap N_t = 1$;

3) *H/N_i — монолитическая $\mathfrak{X}$-группа с монолитом M_i/N_i, который H-изоморфен M/N;*

4) $M_1 \cap \dots \cap M_t \subseteq M$.

Лемма 2 [1, лемма 2]. *Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i = CF_\omega(f_i)$. Тогда $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где $f = \bigcap_{i\in I} f_i$.*

Непустое множество формаций Θ называется *полной решеткой формаций* [4], если пересечение любой совокупности формаций из Θ снова принадлежит Θ и в множестве Θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{H} \in \Theta$.

Пусть Θ — полная решетка формаций. Тогда если $\mathfrak{M}, \mathfrak{H} \in \Theta$, то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ — нижняя грань для $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{H}\}$ в Θ. Символом $\mathfrak{M} \vee_\Theta \mathfrak{H}$ обозначается верхняя грань для $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{H}\}$ в Θ. Спутник f называется Θ-*значным* [1], если все его значения принадлежат решетке Θ. Следуя [4], символом Θ^{ω_c} будем обозначать совокупность всех формаций, обладающих ω-композиционным Θ-значным спутником. Как показано в работе [1, с. 786, 789], Θ^{ω_c} и c_n^ω — полные решетки формаций.

Для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F} \in \Theta$ и для любой полной решетки формаций Θ через $\Theta \operatorname{form}\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех формаций из Θ, содержащих все группы из $\mathfrak{X}$. В частности, пишут $\Theta \operatorname{form} G$ в случае, когда $\mathfrak{X} = \{G\}$. Таким образом, $c_n^\omega \operatorname{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех n-кратно ω-композиционных формаций, содержащих все группы из $\mathfrak{X}$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — набор всех ω-композиционных c_{n-1}^ω-значных спутников формации $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 2 $f = \bigcap_{i\in I} f_i$ — ω-композиционный c_{n-1}^ω-значный спутник формации $\mathfrak{F}$, называемый *минимальным.* Следующая лемма дает способ построения минимального c_{n-1}^ω-значного спутника формации $\mathfrak{F} = c_n^\omega \operatorname{form}\mathfrak{X}$.

Лемма 3 [1, лемма 11]. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая совокупность групп, $\mathfrak{F} = c_n^\omega \operatorname{form}\mathfrak{X}$, где $n \geqslant 1$, $\pi = \omega \cap \pi(\operatorname{Com}(\mathfrak{X}))$, и пусть f — минимальный c_{n-1}^ω-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $f(\omega') = c_{n-1}^\omega \operatorname{form}(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = c_{n-1}^\omega \operatorname{form}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ *для всех* $p \in \pi$;

3) $f(p) = \varnothing$ *для всех* $p \in \omega \setminus \pi$;

4) *если $\mathfrak{F} = CF_\omega(h)$ и спутник h c_{n-1}^ω-значен, то для всех $p \in \pi$ имеют место*

$$f(p) = c_{n-1}^\omega \operatorname{form}(A \mid A \in h(p) \cap \mathfrak{F},\ O_p(A) = 1)$$

и

$$f(\omega') = c^{\omega}_{n-1}\,\mathrm{form}(A \mid A \in h(\omega') \cap \mathfrak{F},\ R_\omega(A) = 1).$$

Лемма 4 [4, лемма 4.1.3]. *Пусть $N_1 \times \dots \times N_t = \mathrm{Soc}(G)$, где N_i — минимальная нормальная подгруппа группы G ($i = 1, \dots, t$), $t > 1$, и $O_p(G) = 1$. Пусть M_i — наибольшая нормальная в G подгруппа, содержащая $N_1 \times \dots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \dots \times N_t$, но не содержащая N_i ($i = 1, \dots, t$). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *для любого $i \in \{1, \dots, t\}$ фактор-группа G/M_i монолитична и ее монолит N_iM_i/M_i G-изоморфен N_i и $O_p(G/M_i) = 1$;*

2) $M_1 \cap \dots \cap M_t = 1$.

Лемма 5 [17, теорема 2.2; 4, лемма 1.2.22]. *Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ имеет место равенство*

$$\mathrm{form}\,\mathfrak{X} = \mathrm{QR}_0(\mathfrak{X}).$$

Пересечение всех полуформаций, содержащих данную совокупность групп $\mathfrak{X}$, называется *полуформацией, порожденной* $\mathfrak{X}$ [4].

Лемма 6 [4, лемма 1.2.21]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — полуформация, порожденная $\mathfrak{X}$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathrm{Q}\mathfrak{X}$.*

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Всякому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ можно сопоставить наименьший (по включению) класс Фиттинга $\mathfrak{F}^*$, содержащий $\mathfrak{F}$ и такой, что для любых групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$. Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *классом Локетта* [18], если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.

Лемма 7 [18, X, теорема 1.9]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$;

2) *$(G \times H)_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} \times H_{\mathfrak{F}}$ для любых групп G и H.*

Лемма 8 [19, лемма 2]. *Пусть Z_p — группа простого порядка p и G — группа с $O_p(G) = 1$. Тогда база регулярного сплетения $T = Z_p \wr G$ совпадает с $C^p(T) = O_p(T)$.*

Лемма 9 [1, лемма 4]. *Если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ и $G/O_p(G) \in f(p) \cap \mathfrak{F}$ для некоторого $p \in \omega$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Пусть Θ — полная решетка формаций. Для произвольной совокупности формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ из Θ полагают

$$\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \Theta\,\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\Big).$$

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая совокупность Θ-значных спутников. Тогда через $\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)$ обозначают такой спутник f, что

$$f(a) = \Theta\,\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i \in I} f_i(a)\Big)$$

для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Полная решетка формаций Θ^{ω_c} называется *индуктивной* [4], если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i$ из Θ^{ω_c} и для всякого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ внутренних Θ-значных ω-композиционных спутников f_i, где f_i — ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, имеет место

$$\vee_{\Theta^{\omega_c}}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = CF_\omega(\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)).$$

Лемма 10 [16, теорема 2.1]. *Решетка всех n-кратно ω-композиционных формаций c_n^ω индуктивна.*

Лемма 11 [11, лемма 3.4.3]. *Отображение* fin, *сопоставляющее всякому многообразию групп $\mathfrak{M}$ класс* $\operatorname{fin}\mathfrak{M}$, *является вложением решетки и полугруппы локально конечных многообразий в алгебру всех формаций.*

2. $\mathfrak{G}$-отделимость решетки c_n^ω

Лемма 12. *Пусть A — монолитическая группа с неабелевым монолитом R, $\mathfrak{M}$ — некоторая полуформация и $A \in c_n^\omega \operatorname{form}\mathfrak{M}$, $n \geqslant 0$. Тогда $A \in \mathfrak{M}$.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. Пусть $n = 0$. Тогда

$$A \in c_0^\omega \operatorname{form}\mathfrak{M} = \operatorname{form}\mathfrak{M}.$$

Пусть $A \notin \mathfrak{M}$. Тогда по лемме 1 в формации $\operatorname{form}\mathfrak{M}$ найдется группа H с такими нормальными подгруппами N, $N_1, \dots, N_t$; M, $M_1, \dots, M_t$ $(t \geqslant 2)$, что выполняются следующие утверждения:

1) $H/N \simeq A$, $M/N = \operatorname{Soc}(H/N)$;

2) H/N_i — монолитическая $\mathfrak{M}$-группа с монолитом M_i/N_i, причем $M_i/N_i \overset{H}{\simeq} M/N$, $i = 1, \dots, t$.

Поскольку монолит $R \simeq M/N$ неабелев, то $C_H(M/N) = N$. Кроме того, $M_i/N_i \overset{H}{\simeq} M/N$. Значит, $N_i \subseteq N$. Поэтому $A \simeq H/N \in \mathfrak{M}$; противоречие. Таким образом, утверждение леммы справедливо при $n = 0$.

Пусть теперь $n > 0$ и при $n-1$ лемма верна. Обозначим через f минимальный c_{n-1}^ω-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F} = c_n^\omega \operatorname{form}\mathfrak{M}$. Так как R — неабелева группа, $\pi(\operatorname{Com}(R)) = \varnothing$. Значит, $R_\omega(A) = 1$. Следовательно, по лемме 3

$$A \simeq A/1 = A/R_\omega(A) \in f(\omega') = c_{n-1}^\omega \operatorname{form}(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{M}).$$

Отсюда

$$A \in c_{n-1}^\omega \operatorname{form}(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{M}) \subseteq c_{n-1}^\omega \operatorname{form}\mathfrak{M}.$$

Значит, по индукции $A \in \mathfrak{M}$. Лемма доказана. □

Лемма 13. *Пусть $\mathfrak{M}$ — полуформация и $A \in c_n^\omega \operatorname{form}\mathfrak{M}$, $n \geqslant 0$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $O_p(A) = 1$ и $p \in \omega$, то $A \in c_n^\omega \operatorname{form}\mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 = (G/O_p(G) \mid G \in \mathfrak{M})$;*

2) *если $R_\omega(A) = 1$, то $A \in c_n^\omega \operatorname{form}\mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{M}_2 = (G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{M})$.*

Доказательство. При $A \in \mathfrak{M}$ утверждения очевидны. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $A \notin \mathfrak{M}$.

Предположим, что A — монолитическая группа с монолитом R. Проведем индукцию по n.

Пусть $n = 0$. Тогда поскольку $A \notin \mathfrak{M}$ и $A \in c_0^\omega \operatorname{form}\mathfrak{M} = \operatorname{form}\mathfrak{M}$, согласно лемме 1 в формации $\operatorname{form}\mathfrak{M}$ найдется группа H с такими нормальными подгруппами N, $N_1, \dots, N_t$; M, $M_1, \dots, M_t$ $(t \geqslant 2)$, что выполняются следующие утверждения: 1) $H/N \simeq A$, $M/N = \operatorname{Soc}(H/N)$; 2) $N_1 \cap \dots \cap N_t = 1$; 3) H/N_i — монолитическая $\mathfrak{M}$-группа с монолитом M_i/N_i, H-изоморфным M/N.

Так как $O_p(A) = 1$ и $R_\omega(A) = 1$, по лемме 1 получаем

$$H \in \mathrm{R}_0(H/N_1, \dots, H/N_t) \subseteq \mathrm{R}_0\mathfrak{M}_j,$$

где $j = 1, 2$. Отсюда ввиду условия 1 леммы 1 и леммы 5

$$A \simeq H/N \in \mathrm{QR}_0(H/N_1, \dots, H/N_t) = \mathrm{form}(H/N_1, \dots, H/N_t) \subseteq \mathrm{form}\,\mathfrak{M}_j,$$

где $j = 1, 2$.

Пусть $n > 0$. Предположим сначала, что $O_p(A) = 1$ и $p \in \omega$. Если R — неабелева группа, то по лемме 12 $A \in \mathfrak{M}$; противоречие. Значит, R — q-группа, где $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$.

Пусть $\mathfrak{F} = c_n^\omega \,\mathrm{form}\,\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}_j = c_n^\omega \,\mathrm{form}\,\mathfrak{M}_j$, $j = 1, 2$. Пусть f и h_j ($j = 1, 2$) — минимальные c_{n-1}^ω-значные ω-композиционные спутники формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}_j$ соответственно. Согласно лемме 3

$$f(\omega') = c_{n-1}^\omega \,\mathrm{form}(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{M}), \quad f(s) = c_{n-1}^\omega \,\mathrm{form}(G/C^s(G) \mid G \in \mathfrak{M})$$

для всех $s \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M}))$;

$$h_j(\omega') = c_{n-1}^\omega \,\mathrm{form}(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{M}_j), \quad h_j(s) = c_{n-1}^\omega \,\mathrm{form}(G/C^s(G) \mid G \in \mathfrak{M}_j)$$

для всех $s \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{M}_j))$, $j = 1, 2$.

Для любой группы G имеет место

$$G/R_\omega(G) \simeq (G/O_p(G))/(R_\omega(G)/O_p(G)) = (G/O_p(G))/R_\omega(G/O_p(G)).$$

Последнее означает, что $f(\omega') = h_j(\omega')$, $j = 1, 2$.

Если $q \notin \omega$, то $R_\omega(A) = 1$. Поэтому

$$A \simeq A/1 = A/R_\omega(A) \in f(\omega') = h_1(\omega') \subseteq \mathfrak{H}_1.$$

Пусть $q \in \omega$. Покажем, что $A/R \in \mathfrak{H}_1$. Так как $A \in \mathfrak{F}$, то $A/R_\omega(A) \in f(\omega') = h_1(\omega') \subseteq \mathfrak{H}_1$.

Рассмотрим случай, когда $O_p(A/R) = 1$. Поскольку $|A/R| < |A|$, в силу соображений индукции $A/R \in \mathfrak{H}_1$.

Пусть $O_p(A/R) \neq 1$. Пусть $R \subseteq \Phi(A)$ и $D/R = O_p(A/R)$. Тогда группа D нильпотентна. Значит, $D = D_p \times D_q$, где D_p — силовская p-подгруппа группы D; D_q — силовская q-подгруппа группы D. Следовательно, $D_p = O_p(A) = 1$; противоречие. Тем самым $R \not\subseteq \Phi(A)$. Поэтому $R = C_A(R) = C^q(A)$.

Пусть $q \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(A/R))$. Для любой группы G имеет место

$$G/C^q(G) \simeq (G/O_p(G))/(C^q(G)/O_p(G)) = (G/O_p(G))/C^q(G/O_p(G)).$$

Последнее означает, что $f(q) = h_1(q)$. Так как по условию $A \in \mathfrak{F}$, то

$$A/R = A/C^q(A) \in f(q) = h_1(q) \subseteq \mathfrak{H}_1.$$

Итак, в любом из возможных случаев имеет место $A/R \in \mathfrak{H}_1$. Значит,

$$A/C^r(A) \simeq (A/R)/(C^r(A)/R) = (A/R)/C^r(A/R) \in h_1(r)$$

для всех $r \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(A/R)) \setminus \{q\}$. Следовательно, $A/C^r(A) \in h_1(r)$ для всех $r \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(A))$. Кроме того, так как $A \in \mathfrak{F}$, то $A/R_\omega(A) \in f(\omega') = h_1(\omega')$. Тем самым $A \in \mathfrak{H}_1$. Этим доказано утверждение 1.

Докажем утверждение 2. По условию $A \in \mathfrak{F}$. Поскольку $R_\omega(A) = 1$, то

$$\begin{aligned} A \simeq A/1 = A/R_\omega(A) &\in f(\omega') \\ &= h_2(\omega') = c_{n-1}^\omega \,\mathrm{form}(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{M}_2) \subseteq c_{n-1}^\omega \,\mathrm{form}\,\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{H}_2. \end{aligned}$$

Таким образом, $A \in \mathfrak{H}_2$.

Рассмотрим случай, когда A не является монолитической группой, т. е. когда $\mathrm{Soc}(A) = N_1 \times \cdots \times N_t$, где N_i — минимальная нормальная подгруппа группы A и $t > 1$. Пусть M_i — наибольшая нормальная в A подгруппа, содержащая $N_1 \times \cdots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \cdots \times N_t$, но не содержащая N_i, где $i = 1, \dots, t$. Согласно лемме 4 $A \in \mathrm{R}_0(A/M_1, \dots, A/M_t)$. По условию $A \in c_n^\omega \operatorname{form} \mathfrak{M}$. Следовательно, $A/M_i \in c_n^\omega \operatorname{form} \mathfrak{M}$. Значит, ввиду уже доказанного имеет место $A/M_i \in c_n^\omega \operatorname{form} \mathfrak{M}_1$. Стало быть, $A \in c_n^\omega \operatorname{form} \mathfrak{M}_1$.

Рассмотрев доказательство леммы 4 и заменив условие $O_p(A) = 1$ условием $R_\omega(A) = 1$, можно заключить, что для любого $i \in \{1, \dots, t\}$ фактор-группа A/M_i монолитична с монолитом N_iM_i/M_i и $R_\omega(A/M_i) = 1$. Следовательно, по доказанному выше $A/M_i \in c_n^\omega \operatorname{form} \mathfrak{M}_2$. Значит,

$$A \simeq A/1 = A/(M_1 \cap \cdots \cap M_t) \in c_n^\omega \operatorname{form} \mathfrak{M}_2.$$

Лемма доказана. $\square$

Для произвольной совокупности n-кратно ω-композиционных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ полагают

$$\vee_n^{\omega_c}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = c_n^\omega \operatorname{form}\Big(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\Big).$$

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая совокупность c_n^ω-значных функций вида

$$f_i : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}.$$

Тогда через $\vee_n^{\omega_c}(f_i \mid i \in I)$ обозначают такую функцию f, что

$$f(\omega') = c_n^\omega \operatorname{form}\Big(\bigcup_{i \in I} f_i(\omega')\Big) \quad \text{и} \quad f(p) = c_n^\omega \operatorname{form}\Big(\bigcup_{i \in I} f_i(p)\Big)$$

для всех $p \in \omega$.

Доказательство следующей леммы осуществляется прямой проверкой.

Лемма 14. *Пусть $n \geqslant 1$, f_i — минимальный c_{n-1}^ω-значный ω-композиционный спутник n-кратно ω-композиционной формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Тогда $\vee_{n-1}^{\omega_c}(f_i \mid i \in I)$ — минимальный c_{n-1}^ω-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F} = \vee_n^{\omega_c}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.*

Лемма 15. *Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — произвольные n-кратно ω-композиционные формации и $A \in \mathfrak{F}_1 \vee_n^{\omega_c} \mathfrak{F}_2$, $n \geqslant 0$. Тогда найдутся такие группы $A_i \in \mathfrak{F}_i$ $(i = 1, 2)$, что*

$$A \in \big(c_n^\omega \operatorname{form} A_1\big) \vee_n^{\omega_c} \big(c_n^\omega \operatorname{form} A_2\big).$$

Доказательство. Проведем индукцию по n. Пусть $n = 0$. По лемме 5

$$A \in \mathfrak{F}_1 \vee_0^{\omega_c} \mathfrak{F}_2 = c_0^\omega \operatorname{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = \operatorname{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = \mathrm{QR}_0(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2).$$

Следовательно, $A \simeq H/N$, где $H \in \mathrm{R}_0(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$. Значит, группа H имеет нормальные подгруппы $N_1, \dots, N_t$ $(t \geqslant 2)$ такие, что

$$\bigcap_{i=1}^{t} N_i = 1 \quad \text{и} \quad H/N_i \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2, \quad i = 1, \dots, t.$$

Заметим, что $H^{\mathfrak{F}_1} \cap H^{\mathfrak{F}_2} = 1$. Значит, $H \in \mathrm{R}_0(H/H^{\mathfrak{F}_1}, H/H^{\mathfrak{F}_2})$. Отсюда, применяя лемму 5, получаем

$$A \simeq H/N \in \mathrm{QR}_0(H/H^{\mathfrak{F}_1}, H/H^{\mathfrak{F}_2}) = \mathrm{form}(H/H^{\mathfrak{F}_1}, H/H^{\mathfrak{F}_2}) \\ = \mathrm{form}(H/H^{\mathfrak{F}_1}) \vee_0^{\omega_c} \mathrm{form}(H/H^{\mathfrak{F}_2}) \subseteq \mathfrak{F}_1 \vee_0^{\omega_c} \mathfrak{F}_2.$$

Пусть $n > 0$, $\{p_1, \dots, p_t\} = \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(A))$ и $A \in \mathfrak{F}_1 \vee_n^{\omega_c} \mathfrak{F}_2$. Тогда ввиду леммы 14

$$A/C^{p_i}(A) \in f_1(p_i) \vee_{n-1}^{\omega_c} f_2(p_i) \quad \text{и} \quad A/R_\omega(A) \in f_1(\omega') \vee_{n-1}^{\omega_c} f_2(\omega'),$$

где f_j — минимальный c_{n-1}^{ω}-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}_j$ для $j = 1, 2$ и всех $i = 1, \dots, t$. По индукции найдутся такие группы $A_{i_1} \in f_1(p_i)$, $A_{i_2} \in f_2(p_i)$, $T_1 \in f_1(\omega')$, $T_2 \in f_2(\omega')$, что

$$A/C^{p_i}(A) \in \big(c_{n-1}^{\omega} \,\mathrm{form}\, A_{i_1}\big) \vee_{n-1}^{\omega_c} \big(c_{n-1}^{\omega} \,\mathrm{form}\, A_{i_2}\big),$$

$$A/R_\omega(A) \in \big(c_{n-1}^{\omega} \,\mathrm{form}\, T_1\big) \vee_{n-1}^{\omega_c} \big(c_{n-1}^{\omega} \,\mathrm{form}\, T_2\big).$$

Заметим, что

$$c_{n-1}^{\omega} \,\mathrm{form}(A_{i_1}, A_{i_2}) = \big(c_{n-1}^{\omega} \,\mathrm{form}\, A_{i_1}\big) \vee_{n-1}^{\omega_c} \big(c_{n-1}^{\omega} \,\mathrm{form}\, A_{i_2}\big),$$

$$c_{n-1}^{\omega} \,\mathrm{form}(T_1, T_2) = \big(c_{n-1}^{\omega} \,\mathrm{form}\, T_1\big) \vee_{n-1}^{\omega_c} \big(c_{n-1}^{\omega} \,\mathrm{form}\, T_2\big).$$

Пусть $\mathfrak{R}_1$ — полуформация, порожденная группой A_{i_1}, $\mathfrak{R}_2$ — полуформация, порожденная группой A_{i_2}, $\mathfrak{Y}_1$ — полуформация, порожденная группой T_1, и $\mathfrak{Y}_2$ — полуформация, порожденная группой T_2.

Тогда по лемме 6

$$\mathfrak{R}_1 = (B_1, \dots, B_s) \quad \text{и} \quad \mathfrak{R}_2 = (C_1, \dots, C_r)$$

для некоторых $B_1, \dots, B_s \in \mathrm{Q}(A_{i_1})$ и $C_1, \dots, C_r \in \mathrm{Q}(A_{i_2})$;

$$\mathfrak{Y}_1 = (U_1, \dots, U_m) \quad \text{и} \quad \mathfrak{Y}_2 = (V_1, \dots, V_q)$$

для некоторых $U_1, \dots, U_m \in \mathrm{Q}(T_1)$ и $V_1, \dots, V_q \in \mathrm{Q}(T_2)$.

Следовательно,

$$A/C^{p_i}(A) \in c_{n-1}^{\omega} \,\mathrm{form}(A_{i_1}, A_{i_2}) = c_{n-1}^{\omega} \,\mathrm{form}(\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2) \\ = c_{n-1}^{\omega} \,\mathrm{form}(B_1, \dots, B_s, C_1, \dots, C_r),$$

$$A/R_\omega(A) \in c_{n-1}^{\omega} \,\mathrm{form}(T_1, T_2) = c_{n-1}^{\omega} \,\mathrm{form}(\mathfrak{Y}_1 \cup \mathfrak{Y}_2) \\ = c_{n-1}^{\omega} \,\mathrm{form}(U_1, \dots, U_m, V_1, \dots, V_q).$$

Поскольку $O_{p_i}(A/C^{p_i}(A)) = 1$ и $R_\omega(A/R_\omega(A)) = 1$, ввиду леммы 13 можно считать, что

$$O_{p_i}(B_k) = 1 = O_{p_i}(C_l) \quad \text{и} \quad R_\omega(U_x) = 1 = R_\omega(V_z)$$

для всех $k = 1, \dots, s$ и $l = 1, \dots, r$; $x = 1, \dots, m$ и $z = 1, \dots, q$.

Пусть $D_{i_1} = B_1 \times \dots \times B_s$, $D_{i_2} = C_1 \times \dots \times C_r$, $U = U_1 \times \dots \times U_m$ и $V = V_1 \times \dots \times V_q$. Так как $\mathfrak{N}_{p_i}$, $\mathfrak{S}_\omega$ — классы Локетта, по лемме 7

$$O_{p_i}(D_{i_1}) = (D_{i_1})_{\mathfrak{N}_{p_i}} = (B_1 \times \dots \times B_s)_{\mathfrak{N}_{p_i}} = (B_1)_{\mathfrak{N}_{p_i}} \times \dots \times (B_s)_{\mathfrak{N}_{p_i}} \\ = O_{p_i}(B_1) \times \dots \times O_{p_i}(B_s) = 1 \times \dots \times 1 = 1,$$

$$R_\omega(U) = U_{\mathfrak{S}_\omega} = (U_1 \times \cdots \times U_m)_{\mathfrak{S}_\omega} = (U_1)_{\mathfrak{S}_\omega} \times \cdots \times (U_m)_{\mathfrak{S}_\omega}$$
$$= R_\omega(U_1) \times \cdots \times R_\omega(U_m) = 1 \times \cdots \times 1 = 1.$$

Аналогично $O_{p_i}(D_{i_2}) = 1$ и $R_\omega(V) = 1$. Кроме того,

$$A/C^{p_i}(A) \in c^\omega_{n-1} \operatorname{form}(\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2) = c^\omega_{n-1} \operatorname{form}(D_{i_1}, D_{i_2}) = c^\omega_{n-1} \operatorname{form}(A_{i_1}, A_{i_2}).$$

Пусть Z_{p_i} — группа порядка p_i, $W_{i_1} = Z_{p_i} \wr D_{i_1}$, $W_{i_2} = Z_{p_i} \wr D_{i_2}$. Покажем, что $W_{i_1} \in \mathfrak{F}_1$. Пусть K — база регулярного сплетения W_{i_1}. Тогда по лемме 8

$$W_{i_1}/K = W_{i_1}/O_{p_i}(W_{i_1}) \simeq D_{i_1} \in f_1(p_i) \cap \mathfrak{F}_1,$$

где $p_i \in \omega \cap \pi(\operatorname{Com}(A))$. Значит, по лемме 9 $W_{i_1} \in \mathfrak{F}_1$. Аналогично доказывается, что $W_{i_2} \in \mathfrak{F}_2$.

Поскольку $T_1 \in f_1(\omega')$ и f_1 является внутренним ω-композиционным спутником формации $\mathfrak{F}_1$, то $T_1 \in \mathfrak{F}_1$. Значит, $U_x \in \mathfrak{F}_1$ для всех $x = 1, \dots, m$. Аналогично убеждаемся, что $V_z \in \mathfrak{F}_2$ для всех $z = 1, \dots, q$.

Пусть $A_1 = W_{1_1} \times W_{2_1} \times \cdots \times W_{t_1} \times U$, $A_2 = W_{1_2} \times W_{2_2} \times \cdots \times W_{t_2} \times V$. Тогда $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ и $A_2 \in \mathfrak{F}_2$. Пусть $\mathfrak{F} = \left(c^\omega_n \operatorname{form} A_1\right) \vee^{\omega_c}_n \left(c^\omega_n \operatorname{form} A_2\right)$. Покажем, что $A \in \mathfrak{F}$. Для этого достаточно установить, что $A/R_\omega(A) \in f(\omega')$ и $A/C^{p_i}(A) \in f(p_i)$ для всех $i = 1, \dots, t$, где f — минимальный c^ω_{n-1}-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$. Ясно, что $W_{i_1} \in \mathfrak{F}$. Следовательно, по лемме 8 $D_{i_1} \simeq W_{i_1}/K = W_{i_1}/C^{p_i}(W_{i_1}) \in f(p_i)$. Аналогично доказывается, что $D_{i_2} \in f(p_i)$. Тогда $A/C^{p_i}(A) \in c^\omega_{n-1} \operatorname{form}(D_{i_1}, D_{i_2}) \subseteq f(p_i)$. Кроме того, $U, V \in \mathfrak{F}$. Следовательно, по лемме 3

$$T_1 \simeq T_1/R_\omega(T_1) \in f(\omega') = c^\omega_{n-1} \operatorname{form}(G/R_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F}).$$

Аналогично $T_2 \in f(\omega')$. Тогда $A/R_\omega(A) \in c^\omega_{n-1} \operatorname{form}(T_1, T_2) \subseteq f(\omega')$.

Итак, $A \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана. □

Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Полная решетка формаций Θ называется $\mathfrak{X}$-*отделимой* [4], если для любого терма $\xi(x_1, \dots, x_m)$ сигнатуры $\{\cap, \vee_\Theta\}$, любых формаций $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m$ из Θ и любой группы $A \in \mathfrak{X} \cap \xi(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m)$ найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1, \dots, A_m \in \mathfrak{F}_m$, что $A \in \xi(\Theta \operatorname{form} A_1, \dots, \Theta \operatorname{form} A_m)$.

Докажем следующий факт, играющий существенную роль в доказательстве основных результатов.

Предложение. *Решетка всех n-кратно ω-композиционных формаций $\mathfrak{G}$-отделима при любом целом неотрицательном n.*

Доказательство. Пусть $\xi(x_1, \dots, x_m)$ — терм сигнатуры $\left\{\cap, \vee^{\omega_c}_n\right\}$, $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m$ — произвольные n-кратно ω-композиционные формации и $A \in \xi(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m)$. Индукцией по числу r вхождений символов из $\left\{\cap, \vee^{\omega_c}_n\right\}$ в терм ξ покажем, что найдутся такие $A_i \in \mathfrak{F}_i$ $(i = 1, \dots, m)$, что $A \in \xi\left(c^\omega_n \operatorname{form} A_1, \dots, c^\omega_n \operatorname{form} A_m\right)$. При $r = 0$, очевидно, что $A \in c^\omega_n \operatorname{form} A$.

Докажем, что утверждение верно при $r = 1$. Если $A \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, то $A \in c^\omega_n \operatorname{form} A \cap c^\omega_n \operatorname{form} A$. Если же $A \in \mathfrak{F}_1 \vee^{\omega_c}_n \mathfrak{F}_2$, то по лемме 15 найдутся такие группы $A_i \in \mathfrak{F}_i$ $(i = 1, 2)$, что $A \in \left(c^\omega_n \operatorname{form} A_1\right) \vee^{\omega_c}_n \left(c^\omega_n \operatorname{form} A_2\right)$. Итак, утверждение при $r = 1$ доказано.

Пусть теперь терм ξ имеет $r > 1$ вхождений символов из $\left\{\cap, \vee^{\omega_c}_n\right\}$ и для термов с меньшим числом вхождений доказываемое утверждение верно. Пусть терм ξ имеет вид $\xi_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_a}) \triangle \xi_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_b})$, где $\triangle \in \left\{\cap, \vee^{\omega_c}_n\right\}$, и

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_a}\} \cup \{x_{j_1}, \dots, x_{j_b}\} = \{x_1, \dots, x_m\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{H}_1$ формацию $\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a})$, а через $\mathfrak{H}_2$ — формацию $\xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b})$. Тогда найдутся такие группы $A_1 \in \mathfrak{H}_1$, $A_2 \in \mathfrak{H}_2$, что

$$A \in c_n^\omega \operatorname{form} A_1 \triangle c_n^\omega \operatorname{form} A_2.$$

С другой стороны, по индукции найдутся такие группы $B_1, \dots, B_a, C_1, \dots, C_b$, что $B_k \in \mathfrak{F}_{i_k}$, $C_k \in \mathfrak{F}_{j_k}$,

$$A_1 \in \xi_1\bigl(c_n^\omega \operatorname{form} B_1, \dots, c_n^\omega \operatorname{form} B_a\bigr), \quad A_2 \in \xi_2\bigl(c_n^\omega \operatorname{form} C_1, \dots, c_n^\omega \operatorname{form} C_b\bigr).$$

Пусть переменные $x_{i_1}, \dots, x_{i_t}$ не входят в слово ξ_2, а все переменные $x_{i_{t+1}}, \dots, x_{i_a}$ в это слово входят. Пусть $D_{i_k} = B_k$, если $k < t+1$, $D_{i_k} = B_k \times C_q$, где q такое, что $x_{i_k} = x_{j_q}$ при всех $k \geqslant t+1$. Пусть $D_{j_k} = C_k$, если $x_{j_k} \notin \{x_{i_{t+1}}, \dots, x_{i_a}\}$. Обозначим через $\mathfrak{R}_p$ формацию $c_n^\omega \operatorname{form} D_{i_p}$, а через $\mathfrak{X}_c$ — формацию $c_n^\omega \operatorname{form} D_{j_c}$, $p = 1, \dots, a$, $c = 1, \dots, b$. Тогда $A_1 \in \xi_1(\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_a)$, $A_2 \in \xi_2(\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_b)$. Следовательно, найдутся такие формации $\mathfrak{L}_1 = c_n^\omega \operatorname{form} L_1, \dots, \mathfrak{L}_m = c_n^\omega \operatorname{form} L_m$, что

$$A \in \xi_1(\mathfrak{L}_{i_1}, \dots, \mathfrak{L}_{i_a}) \triangle \xi_2(\mathfrak{L}_{j_1}, \dots, \mathfrak{L}_{j_b}) = \xi(\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_m),$$

где $L_i \in \mathfrak{F}_i$, $i = 1, \dots, m$. Таким образом, решетка c_n^ω является $\mathfrak{G}$-отделимой. Предложение доказано. □

Учитывая [1, замечание 3], получаем

Следствие 1. *Решетка всех n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционных формаций $\mathfrak{G}$-отделима.*

В случае $n = 1$ справедливо

Следствие 2. *Решетка всех ω-композиционных формаций $\mathfrak{G}$-отделима.*

В случае $\omega = \mathbb{P}$ имеем

Следствие 3. *Решетка всех n-кратно композиционных формаций $\mathfrak{G}$-отделима.*

При $n = 1$ и $\omega = \mathbb{P}$ получаем

Следствие 4. *Решетка всех композиционных формаций $\mathfrak{G}$-отделима.*

3. Основные результаты

Для всякого терма ξ сигнатуры $\bigl\{\cap, \vee_n^{\omega_c}\bigr\}$ через $\bar{\xi}$ будем обозначать терм сигнатуры $\bigl\{\cap, \vee_{n-1}^{\omega_c}\bigr\}$, получаемый из терма ξ заменой каждого вхождения символа $\vee_n^{\omega_c}$ символом $\vee_{n-1}^{\omega_c}$.

Лемма 16. *Пусть $\xi(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$ — терм сигнатуры $\bigl\{\cap, \vee_n^{\omega_c}\bigr\}$, f_i — внутренний c_{n-1}^ω-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}_i$, где $i = 1, \dots, m$; $n \geqslant 1$. Тогда*

$$\xi(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m) = CF_\omega(\bar{\xi}(f_1, \dots, f_m)).$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу r вхождений в терм ξ символов из $\bigl\{\cap, \vee_n^{\omega_c}\bigr\}$.

Основание индукции (случай $r = 1$) вытекает из лемм 2 и 10.

Пусть теперь терм ξ имеет $r > 1$ вхождений символов из $\bigl\{\cap, \vee_n^{\omega_c}\bigr\}$. Пусть терм ξ имеет вид

$$\xi(x_1, \dots, x_m) = \xi_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_a}) \triangle \xi_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_b}),$$

где $\triangle \in \{\cap, \vee_n^{\omega_c}\}$,

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_a}\} \cup \{x_{j_1}, \dots, x_{j_b}\} = \{x_1, \dots, x_m\}$$

и лемма для термов ξ_1 и ξ_2 выполняется. Тогда

$$\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) = CF_\omega(\bar{\xi_1}(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})), \quad \xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}) = CF_\omega(\bar{\xi_2}(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})).$$

Понятно, что оба спутника $\bar{\xi_1}(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})$ и $\bar{\xi_2}(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})$ внутренние. Значит,

$$\begin{aligned}\xi(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m) &= \xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) \triangle\, \xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}) \\ &= CF_\omega(\bar{\xi_1}(f_{i_1}, \dots, f_{i_a}) \bar{\triangle}\, \bar{\xi_2}(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})) = CF_\omega(\bar{\xi}(f_1, \dots, f_m)),\end{aligned}$$

где $\bar{\triangle} = \cap$, если $\triangle = \cap$, и $\bar{\triangle} = \vee_{n-1}^{\omega_c}$, если $\triangle = \vee_n^{\omega_c}$. Лемма доказана. □

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant 1$. Тогда всякое тождество, справедливое в решетке всех формаций c_0^ω, выполняется и в решетке всех n-кратно ω-композиционных формаций c_n^ω.*

Доказательство. Зафиксируем некоторое тождество

$$\xi_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_a}) = \xi_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_b}) \tag{2}$$

сигнатуры $\{\cap, \vee_n^{\omega_c}\}$. Пусть

$$\bar{\xi_1}(x_{i_1}, \dots, x_{i_a}) = \bar{\xi_2}(x_{j_1}, \dots, x_{j_b}) \tag{3}$$

— то же самое тождество, но уже в сигнатуре $\{\cap, \vee_{n-1}^{\omega_c}\}$.

Предположим, что тождество (3) выполняется в решетке c_{n-1}^ω. Пусть $\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}$; $\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}$ — произвольные n-кратно ω-композиционные формации. Докажем, что $\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b})$.

Пусть f_{i_c} — минимальный c_{n-1}^ω-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}_{i_c}$ (где $c = 1, \dots, a$), f_{j_d} — минимальный c_{n-1}^ω-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}_{j_d}$ (где $d = 1, \dots, b$). Тогда по лемме 16

$$\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) = CF_\omega(\bar{\xi_1}(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})), \quad \xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}) = CF_\omega(\bar{\xi_2}(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})).$$

Для произвольного простого $p \in \omega$ формации $f_{i_1}(p), \dots, f_{i_a}(p)$; $f_{j_1}(p), \dots, f_{j_b}(p)$, а также формации $f_{i_1}(\omega'), \dots, f_{i_a}(\omega')$; $f_{j_1}(\omega'), \dots, f_{j_b}(\omega')$ принадлежат решетке c_{n-1}^ω. Значит, по индукции

$$\begin{aligned}\bar{\xi_1}(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})(p) &= \bar{\xi_1}(f_{i_1}(p), \dots, f_{i_a}(p)) \\ &= \bar{\xi_2}(f_{j_1}(p), \dots, f_{j_b}(p)) = \bar{\xi_2}(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})(p)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\bar{\xi_1}(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})(\omega') &= \bar{\xi_1}(f_{i_1}(\omega'), \dots, f_{i_a}(\omega')) \\ &= \bar{\xi_2}(f_{j_1}(\omega'), \dots, f_{j_b}(\omega')) = \bar{\xi_2}(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})(\omega').\end{aligned}$$

Следовательно, $\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b})$. Таким образом, тождество (2) выполняется в решетке c_n^ω. Отсюда вытекает требуемое утверждение. Теорема доказана. □

Следствие 5 [20, теорема 5; 1, теорема 4]. *Решетка всех n-кратно ω-композиционных формаций c_n^ω модулярна, но не дистрибутивна.*

Доказательство. Поскольку решетка c_0^ω модулярна (см. [7]), ввиду теоремы 1 решетка c_n^ω модулярна.

Покажем, что решетка c_n^ω не дистрибутивна. Пусть $\mathfrak{M}$ — класс локально конечных групп, экспоненты которых делят данное простое число $p \neq 2$. Согласно [21] $\mathfrak{M}$ — многообразие. Пусть $L(\mathfrak{M})$ — решетка его подмногообразий. Тогда ввиду результатов Хигмана [22] (см. также [23, § 54.24]) решетка $L(\mathfrak{M})$ не дистрибутивна. Согласно лемме 11 решетка $L(\mathfrak{M})$ вкладывается в решетку c_0^ω. Следовательно, ввиду теоремы 1 решетка c_n^ω не дистрибутивна. $\square$

Лемма 17. *Пусть Θ — $\mathfrak{X}$-отделимая решетка формаций, η — ее подрешетка, которая со всякой своей формацией $\mathfrak{F}$ содержит и все ее однопорожденные Θ-подформации вида $\Theta \operatorname{form} A$, где $A \in \mathfrak{X}$. Тогда тождество $\xi_1 = \xi_2$ сигнатуры $\{\cap, \vee_\Theta\}$ истинно в η, если оно выполняется для всех однопорожденных Θ-формаций из η.*

Доказательство. Пусть $x_{i_1}, \dots, x_{i_a}$ — переменные, входящие в терм ξ_1; $x_{j_1}, \dots, x_{j_b}$ — переменные, входящие в терм ξ_2; и пусть $\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}; \mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b} \in \eta$. Покажем, что

$$\mathfrak{F} = \xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) \subseteq \xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}) = \mathfrak{M}.$$

Не теряя общности, можем считать, что $x_{j_1}, \dots, x_{j_t} \in \{x_{i_1}, \dots, x_{i_a}\}$, но $\{x_{j_{t+1}}, \dots, x_{j_b}\} \cap \{x_{i_1}, \dots, x_{i_a}\} = \varnothing$. Пусть $A \in \mathfrak{F}$. Тогда по условию найдутся такие $\mathfrak{X}$-группы $A_{i_1}, \dots, A_{i_a}$, что $A_{i_k} \in \mathfrak{F}_{i_k}$ (где $k = 1, \dots, a$) и $A \in \xi_1(\Theta \operatorname{form} A_{i_1}, \dots, \Theta \operatorname{form} A_{i_a})$.

Пусть $\mathfrak{H}_{i_k} = \Theta \operatorname{form} A_{i_k}$, и пусть

$$\mathfrak{H}_{j_k} = \begin{cases} \mathfrak{H}_{i_c}, & \text{где } x_{j_k} = x_{i_c}, \\ & \text{для некоторого } c \in \{1, \dots, a\} \text{ для всех } k \in \{1, \dots, t\}, \\ \Theta \operatorname{form} B_{j_k} & \text{для некоторой группы } B_{j_k} \in \mathfrak{F}_{j_k} \text{ для каждого } k > t. \end{cases}$$

По условию $\xi_1(\mathfrak{H}_{i_1}, \dots, \mathfrak{H}_{i_a}) = \xi_2(\mathfrak{H}_{j_1}, \dots, \mathfrak{H}_{j_b})$, но $\xi_2(\mathfrak{H}_{j_1}, \dots, \mathfrak{H}_{j_b}) \subseteq \mathfrak{M}$. Значит, $A \in \mathfrak{M}$. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Аналогично доказывается обратное включение. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Лемма доказана. $\square$

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 1$. Тогда если ω — бесконечное множество, то системы тождеств решеток c_0^ω и c_n^ω совпадают.*

Доказательство. Зафиксируем некоторое тождество

$$\xi_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_a}) = \xi_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_b}) \tag{4}$$

сигнатуры $\left\{\cap, \vee_n^{\omega_c}\right\}$. Пусть

$$\bar{\xi}_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_a}) = \bar{\xi}_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_b}) \tag{5}$$

— то же самое тождество, но уже в сигнатуре $\left\{\cap, \vee_{n-1}^{\omega_c}\right\}$.

Предположим, что тождество (4) выполняется в решетке c_n^ω. Покажем, что тождество (5) выполняется в решетке c_{n-1}^ω. Для этого ввиду леммы 17 и предложения достаточно установить, что если $\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}$; $\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}$ — произвольные однопорожденные $(n-1)$-кратно ω-композиционные формации, то $\bar{\xi}_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \bar{\xi}_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b})$. Пусть

$$\mathfrak{F}_{i_1} = c_{n-1}^\omega \operatorname{form} A_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a} = c_{n-1}^\omega \operatorname{form} A_{i_a};$$

$$\mathfrak{F}_{j_1} = c_{n-1}^{\omega} \operatorname{form} A_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b} = c_{n-1}^{\omega} \operatorname{form} A_{j_b}.$$

Выберем такое простое число $p \in \omega$, что $p \notin \pi(A_{i_1}, \dots, A_{i_a}, A_{j_1}, \dots, A_{j_b})$. Пусть

$$B_{i_1} = Z_p \wr A_{i_1}, \dots, B_{i_a} = Z_p \wr A_{i_a}, \quad B_{j_1} = Z_p \wr A_{j_1}, \dots, B_{j_b} = Z_p \wr A_{j_b},$$

где Z_p — группа простого порядка p. Поскольку формации

$$\mathfrak{M}_{i_1} = c_n^{\omega} \operatorname{form} B_{i_1}, \dots, \mathfrak{M}_{i_a} = c_n^{\omega} \operatorname{form} B_{i_a},$$

$$\mathfrak{M}_{j_1} = c_n^{\omega} \operatorname{form} B_{j_1}, \dots, \mathfrak{M}_{j_b} = c_n^{\omega} \operatorname{form} B_{j_b}$$

принадлежат решетке c_n^{ω}, то

$$\mathfrak{F} = \xi_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \dots, \mathfrak{M}_{i_a}) = \xi_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \dots, \mathfrak{M}_{j_b}) = \mathfrak{M}.$$

Пусть f_{i_c} — минимальный c_{n-1}^{ω}-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{M}_{i_c}$ (где $c = 1, \dots, a$), f_{j_d} — минимальный c_{n-1}^{ω}-значный ω-композиционный спутник формации $\mathfrak{M}_{j_d}$ (где $d = 1, \dots, b$). Ввиду леммы 16

$$\xi_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \dots, \mathfrak{M}_{i_a}) = CF_{\omega}(\bar{\xi}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})),$$

$$\xi_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \dots, \mathfrak{M}_{j_b}) = CF_{\omega}(\bar{\xi}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})).$$

Пусть f и m — минимальные c_{n-1}^{ω}-значные ω-композиционные спутники формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно. Тогда по леммам 3 и 14

$$\bar{\xi}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})(p) = \bar{\xi}_1(f_{i_1}(p), \dots, f_{i_a}(p)) = f(p),$$

$$\bar{\xi}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})(p) = \bar{\xi}_2(f_{j_1}(p), \dots, f_{j_b}(p)) = m(p).$$

Значит,

$$\bar{\xi}_1(f_{i_1}(p), \dots, f_{i_a}(p)) = \bar{\xi}_2(f_{j_1}(p), \dots, f_{j_b}(p)).$$

Так как $O_p(A_{i_c}) = 1$, по лемме 3 $f_{i_c}(p) = \mathfrak{F}_{i_c}$, где $c = 1, \dots, a$. Аналогично $f_{j_d}(p) = \mathfrak{F}_{j_d}$, где $d = 1, \dots, b$.

Следовательно, $\bar{\xi}_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \bar{\xi}_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b})$, т. е. тождество (5) истинно в решетке c_{n-1}^{ω}. Таким образом, каждое тождество решетки c_n^{ω} выполняется в решетке всех формаций c_0^{ω}. Отсюда ввиду теоремы 1 вытекает требуемое утверждение. Теорема доказана. □

Следствие 6. *Пусть ω — бесконечное множество. Тогда для любых целых неотрицательных m и n решетки c_m^{ω} и c_n^{ω} имеют одну и ту же систему тождеств.*

В случае $\omega = \mathbb{P}$ получаем

Следствие 7. *При любых целых неотрицательных m и n системы тождеств решеток c_m и c_n совпадают.*

В заключение отметим, что, как показано в работе [24], множество всех формаций решеточно упорядоченных групп образует полную брауэрову решетку.

Отметим, наконец, что в связи с теоремой 1 возникает следующий естественный вопрос: *верно ли, что для любых натуральных чисел m и n, где $m > n$, решетка всех m-кратно ω-композиционных формаций не является подрешеткой решетки всех n-кратно ω-композиционных формаций?*

Для n-кратно ω-насыщенных формаций это так (см. [25]).

Авторы выражают искреннюю глубокую благодарность рецензенту за ряд замечаний, позволивших существенно улучшить качество статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп // Укр. мат. журн. 2000. Т. 52, № 6. С. 783–797.
2. *Баллестер-Болинше А., Кальво К., Шеметков Л. А.* О частично насыщенных формациях конечных групп // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 6. С. 3–24.
3. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
4. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997.
5. *Guo Wenbin.* The theory of classes of groups. Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London: Sci. Press-Kluwer Acad. Publ., 2000.
6. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of finite groups. Dordrecht: Springer-Verl., 2006.
7. *Скиба А. Н.* О локальных формациях длины 5 // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Минск: Наука и техника, 1986. С. 135–149.
8. *Го Вэньбинь, Скиба А. Н.* Два замечания о тождествах решеток ω-локальных и ω-композиционных формаций конечных групп // Изв. вузов. Математика. 2002. № 5. С. 14–22.
9. *Shemetkov L. A., Skiba A. N., Vorob'ev N. N.* On laws of lattices of partially saturated formations // Asian-Europ. J. Math. 2009. V. 2, N 1. P. 155–169.
10. *Guo Wenbin, Shum K. P.* On totally local formations of groups // Comm. Algebra. 2002. V. 30, N 5. P. 2117–2131.
11. *Го Вэньбинь.* Об одном вопросе теории кратно локальных формаций // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1263–1270.
12. *Ведерников В. А., Сорокина М. М.* Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискрет. математика. 2001. Т. 13, № 3. С. 125–144.
13. *Ведерников В. А.* Максимальные спутники Ω-расслоенных формаций и классов Фиттинга // Тр. ИММ УрО РАН. 2001. Т. 7, № 2. С. 55–71.
14. *Скачкова Ю. А.* Решетки Ω-расслоенных формаций // Дискрет. математика. 2002. Т. 14, № 2. С. 85–94.
15. *Скачкова Ю. А.* Булевы решетки кратно Ω-расслоенных формаций // Дискрет. математика. 2002. Т. 14, № 3. С. 42–46.
16. *Воробьев Н. Н., Царев А. А.* О модулярности решетки τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62, № 4. С. 453–463.
17. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
18. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter & Co., 1992 (De Gruyter Expo. Math.; V. 4).
19. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* О минимальном композиционном экране композиционной формации // Вопросы алгебры. Минск: Университетское, 1992. Вып. 7. С. 39–43.
20. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* Частично композиционные формации конечных групп // Докл. НАН Беларуси. 1999. Т. 43, № 4. С. 5–8.
21. *Кострикин А. И.* Вокруг Бернсайда. М.: Наука, 1986.
22. *Higman G.* Representations of general linear groups and varieties of groups // Proc. Int. Conf. Theory of Groups. 1965. P. 167–173.
23. *Нейман X.* Многообразия групп. М.: Мир, 1969.
24. *Jakubík J.* Formations of lattice ordered groups and of GMV-algebras // Math. Slovaca. 2008. V. 58, N 5. P. 521–534.
25. *Shemetkov L. A., Skiba A. N., Vorob'ev N. N.* On lattices of formations of finite groups // Algebra Colloq. 2010. V. 17, N 4. P. 557–564.

Статья поступила 21 октября 2010 г.

Воробьев Николай Николаевич, Царев Александр Александрович
Витебский гос. университет им. П. М. Машерова, математический факультет,
Московский пр., 33, Витебск 210038, Беларусь
vornic2001@yahoo.com, alex_vitebsk@mail.ru

Скиба Александр Николаевич
Гомельский гос. университет им. Франциска Скорины, математический факультет,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
alexander.skiba49@gmail.com