УДК 512.542

Н. Н. ВОРОБЬЕВ[1], *А. П. МЕХОВИЧ*[2]

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПРЯМО РАЗЛОЖИМЫХ ОБОБЩЕННО НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Витебский государственный университет им. П. М. Машерова*

(Поступила в редакцию 04.03.2011)

Введение. Напомним, что подформация $\mathfrak{M}$ формации $\mathfrak{F}$ называется дополняемой в $\mathfrak{F}$ [1], если в $\mathfrak{F}$ имеется такая подформация $\mathfrak{H}$ (дополнение к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$), что $\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$ и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$. Изучение дополняемых подформаций было начато в [1]. В дальнейшем это понятие анализировалось и применялось в работах многих других авторов (см., в частности, [2–17]). В рамках теории дополняемых подформаций возникла следующая полезная конструкция. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – некоторая система непустых подклассов класса конечных групп $\mathfrak{F}$. Будем писать, следуя [3], $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, если для любых различных $i, j \in I$ имеет место $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ и, кроме того, каждая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид $G = A_1\times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$. Всякое представление класса $\mathfrak{F}$ в виде $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ называется прямым разложением этого класса.

В монографии [3, теорема 4.3.8] доказано, что всякая формация, представимая в виде прямого разложения некоторых формаций, является n-кратно насыщенной тогда и только тогда, когда n-кратно насыщена каждая из компонент этого разложения. Аналог этого результата справедлив для n-кратно ω-насыщенных формаций (см. [15]) и n-кратно ω-локальных классов Фиттинга (см. [8, 13]). Однако, как показывает пример работы [10] (см. также [16]) и пример монографии [3, замечание 4.3.10], аналогичный результат неверен для n-кратно ω-композиционных формаций и τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций. Тем не менее, верна следующая

Т е о р е м а. *Пусть* $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ *для некоторых формаций* $\mathfrak{F}_i$ *таких, что* $\pi(\mathfrak{F}_i)\cap\pi(\mathfrak{F}_j) = \varnothing$ *при всех* $i \neq j$. *Тогда формация* $\mathfrak{F}$ τ-*замкнута* n-*кратно* ($n \geq 1$) ω-*насыщена в том и только в том случае, когда* τ-*замкнута* n-*кратно* ω-*насыщена каждая из формаций* $\mathfrak{F}_i$.

Все рассматриваемые группы конечны. Используется стандартная терминология [2, 3, 18] и определения и обозначения, введенные в работе [19].

1. Предварительные сведения. Напомним, что формацией называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. В дальнейшем символ ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Через $\pi(G)$ обозначено множество всех различных простых делителей порядка группы G, $\pi(\mathfrak{X})$ – объединение множеств $\pi(G)$ для всех групп G из $\mathfrak{X}$. Для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$ символ $G^{\mathfrak{F}}$ обозначает пересечение всех таких нормальных подгрупп N, что $G / N \in \mathfrak{F}$. Неединичная группа называется монолитической, если она имеет единственную минимальную нормальную подгруппу. Символы $G_{\omega d}$, $F_p(G)$, $O_p(G)$, $O_\omega(G)$, $\mathfrak{N}_p$ обозначают соответственно наибольшую нормальную подгруппу N группы G со свойством $\omega \cap \pi(H / K) \neq \varnothing$ для каждого композиционного фактора H / K из N, наибольшую нормальную p-нильпотентную подгруппу группы G, наибольшую нормальную p-подгруппу группы G, наибольшую нормальную ω-подгруппу группы G и класс всех p-групп.

Нам необходимо следующее, предложенное А. Н. Скибой [3], определение: пусть со всякой группой G сопоставлена некоторая система ее подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что τ – подгрупповой функтор, если выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

2) для любого эпиморфизма φ: $A \mapsto B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Если $\tau(G) = \{G\}$, то подгрупповой функтор τ называется тривиальным. Формация $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутой [3], если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой ее группы G.

Пусть f – произвольная функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}. \qquad (*)$$

Следуя [19], сопоставим функции f класс групп

$$LF_{\omega}(f) = (G \mid G / G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G / F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)).$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$ для некоторой функции f вида $(*)$, то $\mathfrak{F}$ называется ω-насыщенной формацией с ω-локальным спутником f [19]. Спутник f называется τ-значным, если каждое его непустое значение является τ-замкнутой формацией. Полагают $f \leq h$, если $f(a) \leq h(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Если $\omega = \mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, то символ ω опускают.

Напомним концепцию кратной локализации А. Н. Скибы [19]: всякая формация считается 0-кратно ω-насыщенной, а при $n \geq 1$ формация $\mathfrak{F}$ называется n-кратно ω-насыщенной, если $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, где все непустые значения ω-локального спутника f являются $(n-1)$-кратно ω-насыщенными формациями. Если формация $\mathfrak{F}$ n-кратно ω-насыщена для всех натуральных n, то $\mathfrak{F}$ называется тотально ω-насыщенной.

Для доказательства основного результата нам необходим подход к определению ω-насыщенных формаций, предложенный В. А. Ведерниковым [12].

Пусть f – произвольная функция вида $(*)$. Функции f сопоставим класс групп $LF_{\omega}\langle f \rangle = (G \mid G / O_{\omega}(G) \in f(\omega')$ и $G / F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$.

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_{\omega}\langle f \rangle$ для некоторой функции f вида $(*)$, то говорят f – ω-локальный V-спутник этой формации [20].

Пусть $\mathfrak{X}$ – совокупность групп. Символом form $\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех формаций, содержащих $\mathfrak{X}$.

Следуя [19], полагают

$$\mathfrak{X}(F_p) = \begin{cases} \operatorname{form}\big(G / F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X}\big), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{X}), \\ \varnothing, & \text{если } p \notin \pi(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(F)$, где $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}(F_p)$ для всех $p \in \omega$. Тогда спутник F называется каноническим ω-локальным спутником формации $\mathfrak{F}$ [19]. Если же $\mathfrak{F} = LF_{\omega}\langle F \rangle$, то спутник F называется каноническим ω-локальным V-спутником формации $\mathfrak{F}$ [20].

Через $l^{\tau}_{\omega_n}$ обозначается совокупность всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций. Заметим, что если τ – тривиальный подгрупповой функтор, то $l^{\tau}_{\omega_n} = l^{\omega}_n$.

Напомним несколько известных утверждений, которые потребуются для доказательства основного результата.

Л е м м а 1 [20, лемма 2.8]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – n-кратно ω-насыщенная формация и F – канонический l^{ω}_{n-1}-значный ω-локальный V-спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(F)$;

2) $\mathfrak{F} = LF_{\omega}\langle F \rangle$.

Л е м м а 2 [20, лемма 2.2]. *Если $\mathfrak{F} = LF_{\omega}\langle f \rangle$ и $G / O_p(G) \in f(p) \cap \mathfrak{F}$ для некоторого $p \in \omega$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Л е м м а 3 [20, лемма 2.1]. *Если $\mathfrak{F} = LF_{\omega}\langle f \rangle$, где f – τ-значный ω-локальный V-спутник, то $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая формация.*

Л е м м а 4. *Пусть формация $\mathfrak{F} = LF_{\omega}\langle f \rangle$, где $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда либо $G^{\mathfrak{F}} \nsubseteq O_{\omega}(G)$, либо найдется такое $p \in \omega \cap \pi(G^{\mathfrak{F}})$, что $G / F_p(G) \notin f(p)$.*

Доказательство. Пусть $G^{\mathfrak{F}} \subseteq O_\omega(G)$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G^{\mathfrak{F}})$. Первое влечет
$$G/O_\omega(G) \simeq (G/G^{\mathfrak{F}})/(O_\omega(G)/G^{\mathfrak{F}}) = (G/G^{\mathfrak{F}})/O_\omega(G/G^{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{F} = f(\omega').$$
Пусть $p \in (\omega \cap \pi(G)) \setminus \pi(G^{\mathfrak{F}})$. Тогда
$$G^{\mathfrak{F}} \subseteq F_p(G) \text{ и } F_p(G/G^{\mathfrak{F}}) = F_p(G)/G^{\mathfrak{F}}.$$
Значит, для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$ имеет место
$$G/F_p(G) \simeq (G/G^{\mathfrak{F}})/(F_p(G)/G^{\mathfrak{F}}) = (G/G^{\mathfrak{F}})/F_p(G/G^{\mathfrak{F}}) \in f(p),$$
так как $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F} = LF_\omega\langle f\rangle$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Лемма доказана.

2. Основной результат.

Доказательство теоремы. Достаточность. Пусть каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$ τ-замкнута n-кратно ω-насыщена. По лемме 1 формация $\mathfrak{F}_i$ обладает минимальным $l^\tau_{\omega_{n-1}}$-значным ω-локальным V-спутником f_i. Пусть $\pi_i = \omega \cap \pi(\mathfrak{F}_i)$. Построим ω-локальный V-спутник f таким образом, что
$$f(a) = \begin{cases} f_i(a), & \text{если } a \in \pi_i \bigcup \{\omega'\} \text{ для некоторого } i \in I, \\ \varnothing, & \text{если } a \in \omega \setminus \bigcup\limits_{i \in I} \pi_i. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{F} = LF_\omega\langle f\rangle$ – τ-замкнутая n-кратно ω-насыщенная формация. Пусть $LF_\omega\langle f\rangle \not\subseteq \mathfrak{F}$, и G – группа минимального порядка из $LF_\omega\langle f\rangle \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G – монолитическая группа, и ее монолит $R = G^{\mathfrak{F}}$. Поскольку $G \in LF_\omega\langle f\rangle$, то $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, если $p \in \omega \cap \pi(G)$, то $G/F_p(G) \in f(p) \neq \varnothing$. Значит, найдется такое $i \in I$, что $p \in \pi_i$. Отсюда $\omega \cap \pi(G) \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} \pi_i$.
Если R – ω'-группа, т. е. $\omega \cap \pi(R) = \varnothing$, то $O_\omega(G) = 1$. Поэтому
$$G \simeq G/O_\omega(G) \in f(\omega') = f_i(\omega') \subseteq \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}.$$
Противоречие. Следовательно, R – pd-группа, т. е. $\omega \cap \pi(R) \neq \varnothing$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(R)$. Тогда $p \in \pi_i$ для некоторого $i \in I$. Если R – неабелева группа, то $F_p(G) = 1$. Поэтому
$$G \simeq G/F_p(G) \in f(p) = f_i(p) \subseteq \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}.$$
Противоречие. Пусть R – p-группа. Значит, $R = C_G(R) = F_p(G) = O_p(G)$. Но тогда
$$G/F_p(G) = G/R = G/O_p(G) \in f(p) = f_i(p)$$
и по лемме 2 $G \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие. Таким образом, $LF_\omega\langle f\rangle \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим, что обратное включение неверно, и G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus LF_\omega\langle f\rangle$. Тогда G – монолитическая группа. Поэтому найдется такое $i \in I$, что $G \in \mathfrak{F}_i = LF_\omega\langle f_i\rangle$. Значит,
$$G/O_\omega(G) \in f_i(\omega') = f(\omega')$$
и
$$G/F_p(G) \in f_i(p) = f(p)$$
для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, $G \in LF_\omega\langle f\rangle$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{F} \subseteq LF_\omega\langle f\rangle$. Таким образом, $\mathfrak{F} = LF_\omega\langle f\rangle$. Ввиду лемм 1 и 3 $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая n-кратно ω-насыщенная формация.

Необходимость. Пусть теперь формация $\mathfrak{F}$ τ-замкнута n-кратно ω-насыщена. По лемме 1 формация $\mathfrak{F}$ обладает минимальным $l^\tau_{\omega_{n-1}}$-значным ω-локальным V-спутником f. Пусть $i \in I$ и f_i – такой ω-локальный V-спутник, что
$$f_i(a) = \begin{cases} f(a), & \text{если } a \in \pi_i \bigcup \{\omega'\}, \\ \varnothing, & \text{если } a \in \omega \setminus \pi_i. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{F}_i = LF_\omega\langle f_i\rangle$ – τ-замкнутая n-кратно ω-насыщенная формация. Предположим, что $\mathfrak{F}_i \not\subseteq LF_\omega\langle f_i\rangle$, и G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_i \setminus LF_\omega\langle f_i\rangle$. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $R = G^{LF_\omega\langle f_i\rangle}$. Поскольку $G \notin LF_\omega\langle f_i\rangle$, то согласно лемме 4 либо

$G^{LF_\omega\langle f_i\rangle} \nsubseteq O_\omega(G)$, либо найдется такое $p \in \omega \cap \pi(G^{LF_\omega\langle f_i\rangle})$, что $G / F_p(G) \notin f_i(p)$. С другой стороны, так как $G \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$, то $G / O_\omega(G) \in f(\omega') = f_i(\omega')$ и для всех $q \in \omega \cap \pi(G)$ имеет место

$$G / F_q(G) \in f(q) = f_i(q).$$

Противоречие. Итак, $\mathfrak{F}_i \subseteq LF_\omega\langle f_i\rangle$.

Допустим, что обратное включение неверно, и G – группа минимального порядка из $LF_\omega\langle f_i\rangle \setminus \mathfrak{F}_i$. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}_i}$.

Пусть $p \in \omega \cap \pi(R) \subseteq \omega \cap \pi(G)$. Тогда из $G \in LF_\omega\langle f_i\rangle$ следует, что $G / F_p(G) \in f_i(p)$. Значит, $f_i(p) \neq \varnothing$ и по построению ω-локального V-спутника f_i имеем $p \in \pi_i$. Итак, $\omega \cap \pi(R) \subseteq \pi_i$. Кроме того, по построению ω-локального V-спутника f_i справедливо $f_i \leq f$. Значит, $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому, ввиду монолитичности группы G, найдется такое $j \in I$, что $G \in \mathfrak{F}_j$. Тогда $\omega \cap \pi(R) \subseteq \pi_j$ и

$$\omega \cap \pi(R) \subseteq \pi_i \cap \pi_j = \varnothing.$$

Значит, $i = j$, т. е. $G \in \mathfrak{F}_i$. Противоречие. Следовательно, $LF_\omega\langle f_i\rangle \subseteq \mathfrak{F}_i$. Таким образом, $\mathfrak{F}_i = LF_\omega\langle f_i\rangle$. Ввиду лемм 1 и 3 $\mathfrak{F}_i$ – τ-замкнутая n-кратно ω-насыщенная формация. Теорема доказана.

3. Некоторые приложения. Отметим некоторые следствия, получаемые из основного результата.

Если τ – тривиальный подгрупповой функтор, то получим

С л е д с т в и е 1 [15]. *Пусть* $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ *для некоторых формаций* $\mathfrak{F}_i$. *Тогда* $\mathfrak{F}$ *n-кратно* ($n \geq 1$) ω-*насыщена в том и только в том случае, когда n-кратно* ω-*насыщена каждая из формаций* $\mathfrak{F}_i$.

В случае $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ справедливо

С л е д с т в и е 2 [3, теорема 4.3.8; 6, теорема]. *Пусть* $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ *для некоторых формаций* $\mathfrak{F}_i$. *Тогда* $\mathfrak{F}$ *n-кратно* ($n \geq 1$) *насыщена в том и только в том случае, когда n-кратно насыщена каждая из формаций* $\mathfrak{F}_i$.

С л е д с т в и е 3 [15]. *Пусть* $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ *для некоторых формаций* $\mathfrak{F}_i$. *Тогда* $\mathfrak{F}$ *тотально* ω-*насыщена в том и только в том случае, когда тотально* ω-*насыщена каждая из формаций* $\mathfrak{F}_i$.

Если в следствии 3 положить $\omega = \mathbb{P}$, то получим

С л е д с т в и е 4 [3]. *Пусть* $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ *для некоторых формаций* $\mathfrak{F}_i$. *Тогда* $\mathfrak{F}$ *тотально насыщена в том и только в том случае, когда тотально насыщена каждая из формаций* $\mathfrak{F}_i$.

В случае $n = 1$ для тривиального подгруппового функтора τ справедливо

С л е д с т в и е 5 [8]. *Пусть* $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ *для некоторых формаций* $\mathfrak{F}_i$. *Тогда* $\mathfrak{F}$ ω-*насыщена в том и только в том случае, когда* ω-*насыщена каждая из формаций* $\mathfrak{F}_i$.

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (БРФФИ – РФФИ, грант Ф10Р-231).

Литература

1. *Скиба А. Н.* О формациях с заданными системами подформаций. Подгрупповое строение конечных групп: Труды Гомельского семинара. Минск, 1981. С. 155–180.
2. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. De Gruyter Expo Math., 4. Berlin; New York, 1992.
3. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск, 1997.
4. *Каморников С. Ф., Селькин М. В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск, 2003.
5. *Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н.* О решетках подгрупп конечных групп. Бесконечные группы и другие примыкающие алгебраические структуры. Киев, 1993. С. 27–54.
6. *Скиба А. Н.* // Вопросы алгебры. 1996. Вып. 9. С. 55–62.
7. *Сафонов В. Г.* // Вопросы алгебры. 1996. Вып. 9. С. 112–127.
8. *Воробьев Н. Н.* // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. 1997. № 3. С. 55–58.
9. *Жевнова Н. Г., Скиба А. Н.* // Изв. вузов. Математика. 1997. № 5. С. 23–29.
10. *Близнец И. В., Воробьев Н. Н.* // Вопросы алгебры. 1998. Вып. 12. С. 106–112.
11. *Воробьев Н. Н., Скиба А. Н.* // Сибирский математический журнал. 1999. Т. 40, № 3. С. 523–530.
12. *Ведерников В. А, Сорокина М. М.* // Матем. заметки. 2002. Т. 71, вып. 1. С. 43–60.
13. *Воробьев Н. Н.* // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры-18. 2002. № 5 (24). С. 43–46.
14. *Воробьев Н. Н., Побойнев В. О.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 37–42.
15. *Воробьев Н. Н., Мехович А. П.* // Проблемы физики, математики и техники. 2011. № 1 (6). С. 48–51.
16. *Близнец И. В., Скиба А. Н.* // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2011. № 4 (67). С. 45–48.

17. *Эйдинов М. И.* // О формациях с дополняемыми подформациями: Тезисы докл. IX Всесоюзн. симпозиума по теории групп. М., 1984. С. 101.
18. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М., 1978.
19. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* // Матем. труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
20. *Шабалина И. П.* // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры-18. 2002. № 5 (24). С. 59–67.

N. N. VOROB'EV, A. P. MEKHOVICH

ON ONE CLASS OF DIRECTLY REDUCIBLE GENERATED SATURATED FORMATIONS

Summary

It is proved that any formation represented in the form of a direct decomposition of some formations such that $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \varnothing$ for all $i \neq j$ is τ-closed n-multiply ($n \geq 1$) ω-saturated if and only if every component of this direct decomposition is τ-closed n-multiply ω-saturated.