Н. Н. Воробьев, А. П. Мехович, О прямых разложениях n-кратно ω-насыщенных формаций, *ПФМТ*, 2011, выпуск 1, 48–51

УДК 512.542

О ПРЯМЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ n-КРАТНО ω-НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ

Н.Н. Воробьев[1], А.П. Мехович[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель*
[2]*Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск*

ON DIRECT DECOMPOSITIONS OF n-MULTIPLY ω-SATURATED FORMATIONS

N.N. Vorob'ev[1], A.P. Mekhovich[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University, Gomel*
[2]*P.M. Masherov Vitebsk State University, Vitebsk*

Все рассматриваемые группы конечны. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — некоторая система непустых подклассов класса групп $\mathfrak{F}$. Будем писать $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, если для любых различных $i, j \in I$ имеет место $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ и, кроме того, каждая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид $G = A_1 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$. Доказана следующая

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций $\mathfrak{F}_i$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ n-кратно ($n \geqslant 1$) ω-насыщена в том и только в том случае, когда n-кратно ω-насыщена каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$.*

Ключевые слова: *формация конечных групп, дополняемая подформация, прямое разложение класса групп, ω-локальный спутник, n-кратно ω-насыщенная формация.*

All groups considered are finite. Let $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ be a set of non-empty subclasses of a class of groups $\mathfrak{F}$ such that $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ for all distinct $i, j \in I$. We write $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ to denote the collection of all groups of the form $A_1 \times \ldots \times A_t$, where $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ for some $i_1, \ldots, i_t \in I$. We proved the following theorem.

Theorem. *Let $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, where $\mathfrak{F}_i$ is a formation. Then $\mathfrak{F}$ is n-multiply ($n \geqslant 1$) ω-saturated formation if and only if $\mathfrak{F}_i$ is n-multiply ω-saturated for all $i \in I$.*

Keywords: *formation of finite groups, complemented subformation, direct decomposition of a class of groups, ω-local satellite, n-multiply ω-saturated formation.*

Введение

Напомним, что подформация $\mathfrak{M}$ формации $\mathfrak{F}$ называется дополняемой в $\mathfrak{F}$ [1], если в $\mathfrak{F}$ имеется такая подформация $\mathfrak{H}$ (дополнение к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$), что $\mathfrak{F} = \mathrm{form}\,(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$ и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$. Изучение дополняемых подформаций было начато в [1]. В дальнейшем это понятие анализировалось и применялось в работах многих других авторов (см., в частности, [2]–[22]). В рамках теории дополняемых подформаций возникла следующая полезная конструкция. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – некоторая система непустых подклассов класса конечных групп $\mathfrak{F}$. Будем писать

$$\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i,$$

если для любых различных $i, j \in I$ имеет место $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ и, кроме того, каждая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид

$$G = A_1 \times \ldots \times A_t, \text{ где } A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}.$$

Всякое представление класса конечных групп $\mathfrak{F}$ в виде $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ называется прямым разложением этого класса [3].

В монографии [3, теорема 4.3.8] доказано, что всякая формация, представимая в виде прямого разложения некоторых формаций, n-кратно насыщена тогда и только тогда, когда n-кратно насыщена каждая из компонент этого разложения. Аналог этого результата для n-кратно локальных классов Фиттинга получен в работе [14]. Однако, как показывает пример работы [13], аналогичный результат для n-кратно композиционных формаций и n-кратно ω-композиционных формаций (см. [21]) неверен.

В данной работе мы показываем, что справедлива следующая

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций $\mathfrak{F}_i$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ n-кратно ($n \geqslant 1$) ω-насыщена в том и только в том случае, когда n-кратно ω-насыщена каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$.*

Все рассматриваемые группы конечны. Используется стандартная терминология [2], [3], [23], [24] и определения и обозначения, введенные в работе [25].

1 Предварительные сведения

Напомним, что формацией называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. В дальнейшем символ ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Через $\pi(G)$ обозначено множество всех различных простых делителей порядка группы G. Напомним, что для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$ символ $G^{\mathfrak{F}}$ обозначает пересечение всех таких нормальных подгрупп N, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Неединичная группа называется монолитической, если она имеет единственную минимальную нормальную подгруппу. Символы $G_{\omega d}$, $F_p(G)$, $O_p(G)$, $O_\omega(G)$ обозначают соответственно наибольшую нормальную подгруппу N группы G со свойством $\omega \cap \pi(H/K) \neq \varnothing$ для каждого композиционного фактора H/K из N, наибольшую нормальную p-нильпотентную подгруппу группы G, наибольшую нормальную p-подгруппу группы G и наибольшую нормальную ω-подгруппу группы G. Пусть f – произвольная функция вида

$$f\colon \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}. \quad (1.1)$$

Следуя [25], сопоставим функции f класс групп

$$LF_\omega(f) = (G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega')$$
$$\text{и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)).$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ для некоторой функции f вида (1.1), то $\mathfrak{F}$ называется ω-насыщенной формацией с ω-локальным спутником f [25].

Если $\omega = \{p\}$, то ω-насыщенную формацию называют p-насыщенной. Если $\omega = \mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, то символ ω опускают.

Всякая формация считается 0-кратно ω-насыщенной, а при $n \geqslant 1$ формация $\mathfrak{F}$ называется n-кратно ω-насыщенной [25], если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где все непустые значения ω-локального спутника f являются $(n-1)$-кратно ω-насыщенными формациями. Если формация $\mathfrak{F}$ n-кратно ω-насыщена для всех натуральных n, то $\mathfrak{F}$ называется тотально ω-насыщенной.

Напомним несколько известных утверждений, которые потребуются для доказательства основного результата.

***Лемма* 1.1** [25, лемма 4]. *Если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ и $G/O_p(G) \in f(p) \cap \mathfrak{F}$ для некоторого $p \in \omega$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

***Лемма* 1.2** [25, лемма 9]. *Пусть формация $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда либо $G^{\mathfrak{F}} \nsubseteq G_{\omega d}$, либо найдется такое $p \in \omega \cap \pi(G^{\mathfrak{F}})$, что $G/F_p(G) \notin f(p)$.*

2 Основной результат

Доказательство теоремы. Достаточность. Пусть каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$ n-кратно ω-насыщена, и f_i – ее минимальный l_{n-1}^{ω}-значный ω-локальный спутник. Пусть $\pi_i = \omega \cap \pi(\mathfrak{F}_i)$. Тогда если $i \neq j$, то по условию $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$. Значит, $\pi_i \cap \pi_j = \varnothing$. Построим ω-локальный спутник f таким образом, что

$$f(a) = \begin{cases} \mathfrak{F}, & \text{если } a = \omega', \\ f_i(a), & \text{если } a = p \in \pi_i \text{ для некоторого } i \in I, \\ \varnothing, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \bigcup\limits_{i \in I} \pi_i. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$.

Пусть $LF_\omega(f) \nsubseteq \mathfrak{F}$, и G – группа минимального порядка из $LF_\omega(f) \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G – монолитическая группа и ее монолит $R = G^{\mathfrak{F}}$. Поскольку $G \in LF_\omega(f)$, то $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, если $p \in \omega \cap \pi(G)$, то $G/F_p(G) \in f(p) \neq \varnothing$. Значит, найдется такое $i \in I$, что $p \in \pi_i$. Отсюда $\omega \cap \pi(G) \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} \pi_i$. Если R – ω'-группа, т. е. $\omega \cap \pi(R) = \varnothing$, то $G_{\omega d} = 1$. Значит,

$$G \simeq G/G_{\omega d} \in f(\omega') = \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Значит, R – pd-группа, т.е. $\omega \cap \pi(R) \neq \varnothing$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(R)$. Тогда $p \in \pi_i$ для некоторого $i \in I$. Если R – неабелева группа, то $F_p(G) = 1$. Поэтому

$$G \simeq G/F_p(G) \in f(p) = f_i(p) \subseteq \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Пусть R – p-группа. Значит, $R = C_G(R) = F_p(G) = O_p(G)$. Но тогда

$$G/F_p(G) = G/R = G/O_p(G) \in f(p) = f_i(p).$$

Значит, по лемме 1.1 $G \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие. Таким образом, $LF_\omega(f) \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим, что обратное включение неверно, и G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus LF_\omega(f)$. Тогда G – монолитическая группа. Поэтому найдется такое $i \in I$, что

$$G \in \mathfrak{F}_i = LF_\omega(f_i).$$

Значит,

$$G/F_p(G) \in f_i(p) = f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)$$

и из того, что $G \in \mathfrak{F}$, получаем

$$G/G_{\omega d} \in \mathfrak{F} = f(\omega').$$

Следовательно,

$$G \in LF_\omega(f).$$

Противоречие. Значит, $\mathfrak{F} \subseteq LF_\omega(f)$. Таким образом, $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где f – l_{n-1}^{ω}-значный ω-локальный спутник. Поэтому $\mathfrak{F}$ – n-кратно ω-насыщенная формация.

Необходимость. Пусть теперь формация $\mathfrak{F}$ n-кратно ω-насыщена, и f – ее минимальный l_{n-1}^{ω}-значный ω-локальный спутник. Пусть $i \in I$ и f_i – такой ω-локальный спутник, что

$$f_i(a) = \begin{cases} \mathfrak{F}_i, & \text{если } a = \omega', \\ f(a), & \text{если } a = p \in \pi_i, \\ \varnothing, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi_i. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{F}_i = LF_\omega(f_i)$.

Предположим, что $\mathfrak{F}_i \nsubseteq LF_\omega(f_i)$, и G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_i \setminus LF_\omega(f_i)$. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $R = G^{LF_\omega(f_i)}$. Поскольку $G \notin LF_\omega(f_i)$, то, согласно лемме 1.2, либо $G^{LF_\omega(f_i)} \nsubseteq G_{\omega d}$, либо найдется такое $p \in \omega \cap \pi(G^{LF_\omega(f_i)})$, что $G/F_p(G) \notin f_i(p)$. С другой стороны, так как $G \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$, то $G/G_{\omega d} \in \mathfrak{F}_i = f_i(\omega')$ и для всех $q \in \omega \cap \pi(G)$ имеет место

$$G/F_q(G) \in f(q) = f_i(q).$$

Противоречие. Итак, $\mathfrak{F}_i \subseteq LF_\omega(f_i)$.

Допустим, что обратное включение неверно, и G – группа минимального порядка из $LF_\omega(f_i) \setminus \mathfrak{F}_i$. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}_i}$.

Пусть $p \in \omega \cap \pi(R) \subseteq \omega \cap \pi(G)$. Тогда из $G \in LF_\omega(f_i)$ следует, что $G/F_p(G) \in f_i(p)$. Значит, $f_i(p) \neq \varnothing$ и по построению ω-локального спутника f_i имеем $p \in \pi_i$. Итак, $\omega \cap \pi(R) \subseteq \pi_i$.

Кроме того, по построению ω-локального спутника f_i справедливо $f_i \le f$. Значит, $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому, ввиду монолитичности группы G, найдется такое $j \in I$, что $G \in \mathfrak{F}_j$. Тогда $\omega \cap \pi(R) \subseteq \pi_j$. Поэтому

$$\omega \cap \pi(R) \subseteq \pi_i \cap \pi_j = \varnothing.$$

Значит, $i = j$, т.е. $G \in \mathfrak{F}_i$. Противоречие. Следовательно, $LF_\omega(f_i) \subseteq \mathfrak{F}_i$. Таким образом, $\mathfrak{F}_i = LF_\omega(f_i)$, где f_i – l_{n-1}^{ω}-значный ω-локальный спутник. Поэтому $\mathfrak{F}_i$ – n-кратно ω-насыщенная формация.

Теорема доказана.

3 Некоторые приложения

Отметим некоторые следствия, получаемые из основного результата.

***Следствие* 3.1.** *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций $\mathfrak{F}_i$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ тотально ω-насыщена в том и только в том случае, когда тотально ω-насыщена каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$.*

Если в следствии 3.1 положить $\omega = \mathbb{P}$, то получим

***Следствие* 3.2** [3]. *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций $\mathfrak{F}_i$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ тотально насыщена в том и только в том случае, когда тотально насыщена каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$.*

При $n = 1$ из теоремы вытекает

***Следствие* 3.3** [11, теорема 1].

Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций $\mathfrak{F}_i$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ ω-насыщена в том и только в том случае, когда ω-насыщена каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$.

В случае $\omega = \mathbb{P}$ получим

***Следствие* 3.4** [3, теорема 4.3.8; 9, теорема]. *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций $\mathfrak{F}_i$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ n-кратно насыщена в том и только в том случае, когда n-кратно насыщена каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$.*

При $\omega = \{p\}$ справедливо

***Следствие* 3.5.** *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций $\mathfrak{F}_i$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ n-кратно p-насыщена в том и только в том случае, когда n-кратно p-насыщена каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$.*

Если $n = 1$ и $\omega = \{p\}$, то справедливо

***Следствие* 3.6.** *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций $\mathfrak{F}_i$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ p-насыщена в том и только в том случае, когда p-насыщена каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скиба, А.Н.* О формациях с заданными системами подформаций / А.Н. Скиба // Подгрупповое строение конечных групп : Труды Гомельского семинара / Ин-т математики АН БССР ; под ред. В.С. Монахова. – Минск, 1981. – С. 155–180.

2. *Doerk, K.* Finite soluble groups, de Gruyter Exp. Math., 4 / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p.

3. *Скиба, А.Н.* Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

4. *Каморников, С.Ф.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 2003. – 254 с.

5. *Каморников, С.Ф.* Пронормальные проекторы конечных ω-разрешимых групп / С.Ф. Каморников // Вопросы алгебры. – 1986. – Вып. 2. – С. 80–86.

6. *Ведерников, В.А.* Вполне факторизуемые формации конечных групп / В.А. Ведерников // Вопросы алгебры. – 1990. – Вып. 5. – С. 28–34.

7. *Васильев, А.Ф.* О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников,

В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и другие примыкающие алгебраические структуры : сб. ст. / Ин-т математики АН Украины ; отв. ред. Н.С. Черников. – Киев, 1993. – С. 27–54.

8. *Скиба, А.Н.* О локальных формациях с дополняемыми локальными подформациями / А.Н. Скиба // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 10. – С. 75–80.

9. *Скиба, А.Н.* О дополняемых подформациях / А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. – 1996. – Вып. 9. – С. 55–62.

10. *Сафонов, В.Г.* О кратно локальных формациях с ограниченным нильпотентным дефектом / В.Г. Сафонов // Вопросы алгебры. – 1996. – Вып. 9. – С. 112–127.

11. *Воробьев, Н.Н.* О прямых разложениях ω-локальных формаций и классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. – 1997. – № 3. – С. 55–58.

12. *Жевнова, Н.Г.* p-насыщенные формации с дополняемыми p-насыщенными подформациями / Н.Г. Жевнова, А.Н. Скиба // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 23–29.

13. *Близнец, И.В.* О прямых разложениях композиционных формаций / И.В. Близнец, Н.Н. Воробьев // Вопросы алгебры. – 1998. – Вып. 12. – С. 106–112.

14. *Воробьев, Н.Н.* О булевых решетках n-кратно локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба // Сибирский математический журнал. – 1999. – Т. 40, № 3. – С. 523–530.

15. *Воробьев, Н.Н.* О булевых решетках n-кратно ω-локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры–18. – 2002. – № 5 (14). – С. 43–46.

16. *Васильев, А.Ф.* К проблеме Кегеля-Шеметкова о решетках обобщенно субнормальных подгрупп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников // Алгебра и логика. – 2002. – Т. 41, № 4. – С. 411–428.

17. *Скачкова, Ю.А.* Булевы решетки кратно Ω-расслоенных формаций / Ю.А. Скачкова // Дискретная математика. – 2002. – Т. 14, вып. 3. – С. 42–46.

18. *Камозина, О.В.* Булевы решетки n-кратно Ω-биканонических классов Фиттинга / О.В. Камозина // Дискретная математика. – 2002. – Т. 14, вып. 3. – С. 47–53.

19. *Воробьев, Н.Н.* О булевых решетках частично насыщенных формаций / Н.Н. Воробьев, В.О. Побойнев // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 37–42.

20. *Aniskov, V.V.* On local formations with complemented local subformations / V.V. Aniskov, A.N. Skiba. – Gomel, 1993. – 10 p. – (Preprint / Gomel State University ; № 5).

21. *Близнец, И.В.* Разложимые ω-композиционные формации / И.В. Близнец, А.Н. Скиба. – Гомель, 2002. – 15 с. – (Препринт / Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины ; № 33).

22. *Эйдинов, М.И.* О формациях с дополняемыми подформациями / М.И. Эйдинов // Тезисы докл. IX Всесоюзн. симпозиума по теории групп. – М., 1984. – С. 101.

23. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

24. *Скиба, А.Н.* Формации алгебраических систем / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1989. – 256 с.

25. *Скиба, А.Н.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант БРФФИ–РФФИ Ф10Р-231).

Поступила в редакцию 31.01.11.