Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Н. Н. Воробьев, О прямых произведениях классов конечных групп, *Тр. ИММ УрО РАН*, 2012, том 18, номер 3, 67–74

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 176.60.213.13
17 февраля 2023 г., 11:14:24

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 3 2012

УДК 512.542

О ПРЯМЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ КЛАССОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП[1]

Н. Н. Воробьев

Все рассматриваемые группы конечны. Совокупность $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ непустых классов групп $\mathfrak{F}_i$ называется *ортогональной* (А.Н. Скиба, 1999), если: 1) либо $|I| = 1$, либо $|I| > 1$ и 2) $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ для всех $i, j \in I$, $i \neq j$. Для произвольной ортогональной системы классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ через $\bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ мы обозначаем совокупность всех групп, изоморфных группам вида $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Говорят, что $\mathfrak{F}$ является *прямым произведением* классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$, если совокупность $\bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ является ортогональной системой классов и $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$. Пусть $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i$ — класс Фиттинга. Доказано, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ n-кратно ω-локален в том и только в том случае, когда n-кратно ω-локален каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$.

Ключевые слова: конечная группа, класс Фиттинга, n-кратно ω-локальный класс Фиттинга.

N. N. Vorob'ev. On direct products of classes of finite groups.

All groups considered are finite. A set $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ of non-empty classes of groups $\mathfrak{F}_i$ is called *orthogonal* (Skiba, 1999) if: (1) either $|I| = 1$ or $|I| > 1$ and (2) $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ for all $i, j \in I$, $i \neq j$. For any orthogonal system of classes $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ we denote by $\bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ the set of all groups isomorphic to groups of the form $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, where $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ for some $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$.

Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty class of groups. The class $\mathfrak{F}$ is said to be the *direct product* of classes $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ if the set $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ is an orthogonal system of classes and $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$. Let $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$, where $\mathfrak{F}_i$ is a Fitting class. We prove that the Fitting class $\mathfrak{F}$ is n-multiply ω-local if and only if each of the Fitting classes $\mathfrak{F}_i$ is n-multiply ω-local.

Keywords: finite group, Fitting class, n-multiply ω-local Fitting class.

Введение

В настоящей работе все рассматриваемые группы конечны.

Символом p всегда обозначается некоторое простое число, $\mathbb{P}$ обозначает множество всех простых чисел, ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел и $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Напомним, что группа G называется *ωd-группой,* если для каждого композиционного фактора H/K группы G имеет место $\omega \cap \pi(H/K) \neq \varnothing$.

Классом групп называется такая совокупность групп $\mathfrak{X}$, что если $G \in \mathfrak{X}$ и $H \cong G$, то $H \in \mathfrak{X}$. Символами (1), $\mathfrak{N}_p$, $\mathfrak{G}_{p'}$ и $\mathfrak{G}_{\omega d}$ обозначаются соответственно класс всех единичных групп, класс всех p-групп, класс всех p'-групп и класс всех таких групп, в которых каждый композиционный фактор является ωd-группой.

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется *гомоморфом,* если каждый гомоморфный образ любой группы A из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$. *Формацией* называется такой гомоморф групп $\mathfrak{F}$, что каждая группа G обладает наименьшей нормальной подгруппой (обозначаемой $G^{\mathfrak{F}}$), факторгруппа по которой снова принадлежит $\mathfrak{F}$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *S_n-замкнутым* или *нормально наследственным,* если $H \in \mathfrak{F}$ всякий раз, когда $H \trianglelefteq G \in \mathfrak{F}$. *Классом Фиттинга* называется такой нормально наследственный класс групп $\mathfrak{F}$, что каждая группа G обладает наибольшей нормальной подгруппой (обозначаемой $G_{\mathfrak{F}}$), которая принадлежит $\mathfrak{F}$.

О п р е д е л е н и е 1. Совокупность $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ непустых классов групп $\mathfrak{F}_i$ называется *ортогональной* (А.Н. Скиба [22]), если:

[1]Исследования автора выполнены при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований БРФФИ–РФФИ (проект Ф10Р-231).

1) либо $|I| = 1$, либо $|I| > 1$ и
2) $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ для всех $i, j \in I$, $i \neq j$.

Отметим, что всякая ортогональная система классов Фиттинга (формаций) является ортогональной системой элементов решетки всех классов Фиттинга (решетки всех формаций соответственно) в обычном смысле [15, с. 238].

Следуя [22], для произвольной ортогональной системы классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ через $\bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ (в частности, пишем $\mathfrak{F}_1 \bigotimes \mathfrak{F}_2 \bigotimes \ldots \bigotimes \mathfrak{F}_t$, если $I = \{1, 2, \ldots, t\}$) мы обозначаем совокупность всех групп, изоморфных группам вида $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Говорят, что $\mathfrak{F}$ является *прямым произведением* классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$, если совокупность $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ является ортогональной системой классов, и $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$.

Пусть L — решетка классов групп и $\mathfrak{F} \in L$. Будем говорить, что класс $\mathfrak{F}$ *прямо разложим* в решетке L, если $\mathfrak{F}$ является прямым произведением некоторых неединичных классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\} \subseteq L$. В противном случае $\mathfrak{F}$ называется *прямо неразложимым* в решетке L.

П р и м е р 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс всех p-разложимых групп. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \bigotimes \mathfrak{G}_{p'}$, т. е. $\mathfrak{F}$ прямо разложим в решетке всех классов Фиттинга и в решетке всех формаций.

П р и м е р 2. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп. Тогда $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in\mathbb{P}} \mathfrak{N}_p$, т. е. $\mathfrak{F}$ прямо разложим в решетке всех классов Фиттинга и в решетке всех формаций.

П р и м е р 3. Пусть $\mathfrak{F}_1$ — класс всех абелевых p-групп и $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{G}_{p'}$. Тогда согласно [22, следствие 4.3.6] класс $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \bigotimes \mathfrak{F}_2$ является формацией. Поэтому класс $\mathfrak{F}$ прямо разложим в решетке всех формаций. С другой стороны, $\mathfrak{F}$ не является классом Фиттинга. Значит, $\mathfrak{F}$ прямо неразложим в решетке всех классов Фиттинга.

П р и м е р 4. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ — класс всех p-групп. Тогда $\mathfrak{F}$ прямо неразложим в решетке всех классов Фиттинга. Действительно, если $\mathfrak{M}$ является собственным подклассом Фиттинга класса $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M} = (1)$ согласно [16].

Покажем теперь, что $\mathfrak{F}$ прямо неразложим в решетке всех формаций. Предположим, что это неверно. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \bigotimes \mathfrak{F}_2$ для некоторых неединичных формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$, и поэтому всякая группа порядка p принадлежит $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = (1)$, противоречие.

Прямые разложения классов групп оказались полезными при решении некоторых открытых вопросов теории классов групп и при построении классов Фиттинга (формаций) с различными заданными свойствами. Здесь мы лишь коротко отметим замечательные работы [1; 7], где на основе условия ортогональности классов групп было дано решение известной проблемы Кегеля — Шеметкова об описании всех насыщенных наследственных формаций, для которых множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует решетку в каждой конечной группе, и книгу А.Н. Скибы [22], в которой прямые разложения классов групп нашли применение при решении многих открытых вопросов теории классов.

Целью данной работы является дальнейшее изучение прямых разложений классов групп.

Все рассматриваемые обозначения и терминология стандартны. Читатель может воспользоваться [2–4], если это необходимо.

1. Предварительные результаты

Напомним, что для любой непустой формации $\mathfrak{H}$ через $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ обозначают класс всех групп G с $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$.

Функции вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{классы Фиттинга}\}$$

называются *ω-локальными функциями Хартли* или, короче, *ω-локальными H-функциями.* Для произвольной ω-локальной H-функции f символом $LR_\omega(f)$ обозначается класс $(G \mid G^{\omega d} \in$

$f(\omega')$ и $F^p(G) \in f(p)$ при всех $p \in \omega \cap \pi(G)$). Если класс Фиттинга $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$ для некоторой ω-локальной H-функции f, то $\mathfrak{F}$ называют *ω-локальным классом Фиттинга* с ω-локальной H-функцией f [24].

Напомним, что класс групп $\mathfrak{X}$ называется D_0-замкнутым, если прямое произведение любого набора групп из $\mathfrak{X}$ снова принадлежит $\mathfrak{X}$.

Всякий класс Фиттинга считается 0-кратно ω-локальным. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется n-кратно ω-локальным ($n \geqslant 1$), если $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$, где все непустые значения ω-локальной H-функции f $(n-1)$-кратно ω-локальны (см. [24]).

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{M}$ — непустой D_0-замкнутый подкласс класса групп $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{M} = \bigotimes_{i\in I}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_i)$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{M}$. Тогда, поскольку $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то найдутся такие $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$, что $G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$. Ввиду того, что класс $\mathfrak{M}$ является D_0-замкнутым, $A_1 \in \mathfrak{M}$, $A_2 \in \mathfrak{M}, \ldots, A_t \in \mathfrak{M}$. Следовательно,

$$G \in (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_{i_1}) \bigotimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_{i_2}) \bigotimes \ldots \bigotimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_{i_t}) \subseteq \bigotimes_{i\in I}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_i).$$

Значит,

$$\mathfrak{M} \subseteq \bigotimes_{i\in I}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_i).$$

Обратно. Пусть $G \in \bigotimes_{i\in I}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_i)$. Тогда найдутся такие $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$, что $G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, A_t \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_{i_t}$. Так как класс $\mathfrak{M}$ D_0-замкнут, получаем $G \in \mathfrak{M}$. Значит, $\bigotimes_{i\in I}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_i) \subseteq \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{M} = \bigotimes_{i\in I}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_i)$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — произвольная ортогональная система классов групп, где $I = \bigcup_{j\in J} I_j$ — разбиение множества I (для любых $j_1, j_2 \in J$, где $j_1 \neq j_2$, имеет место $I_{j_1} \cap I_{j_2} = \varnothing$). Тогда, если $\mathfrak{F}_j = \bigotimes_{i\in I_j} \mathfrak{H}_i$, $j \in J$ и $\mathfrak{F} = \bigotimes_{j\in J} \mathfrak{F}_j$, то $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{H}_i$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда найдутся такие $j_1, j_2, \ldots, j_k \in J$, что $G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{j_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{j_2}, \ldots, A_k \in \mathfrak{F}_{j_k}$. Следовательно, найдутся такие $i_1^1, i_2^1, \ldots, i_l^1; \ldots; i_1^k, i_2^k, \ldots, i_m^k \in I$, что $A_1 = B_1^1 \times B_2^1 \times \ldots \times B_l^1$, где $B_1^1 \in \mathfrak{H}_{i_1^1}$, $B_2^1 \in \mathfrak{H}_{i_2^1}, \ldots, B_l^1 \in \mathfrak{H}_{i_l^1}; \ldots; A_k = B_1^k \times B_2^k \times \ldots \times B_m^k$, где $B_1^k \in \mathfrak{H}_{i_1^k}$, $B_2^k \in \mathfrak{H}_{i_2^k}, \ldots, B_m^k \in \mathfrak{H}_{i_m^k}$. Значит, $G = B_1^1 \times B_2^1 \times \ \ldots \times B_l^1 \times \ \ldots \times B_1^k \times B_1^2 \times \ \ldots \times B_m^k$. Поэтому $G \in \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{H}_i$ и $\mathfrak{F} \subseteq \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{H}_i$.

Обратно. Пусть $G \in \bigotimes_{i\in I}\mathfrak{H}_i$. Тогда найдутся такие $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$, что $G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{H}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{H}_{i_2}, \ldots, A_t \in \mathfrak{H}_{i_t}$. Значит, найдутся такие $j_1, j_2, \ldots, j_s \in J$, что $\mathfrak{H}_{i_1} \subseteq \mathfrak{F}_{j_1}$, $\mathfrak{H}_{i_2} \subseteq \mathfrak{F}_{j_2}, \ldots, \mathfrak{H}_{i_t} \subseteq \mathfrak{F}_{j_s}$. Следовательно,

$$G \in \mathfrak{F}_{j_1} \bigotimes \mathfrak{F}_{j_2} \bigotimes \ldots \bigotimes \mathfrak{F}_{j_s} \subseteq \bigotimes_{j\in J} \mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \bigotimes \mathfrak{F}_2$, где $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ — некоторые D_0-замкнутые классы, и группа A имеет вид $A = A_1 \times A_2$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_1$, $A_2 \in \mathfrak{F}_2$, то подгруппы A_1, A_2 характеристичны в A.*

Доказательство. Пусть α — произвольный автоморфизм группы A. Допустим, что $A_1 \neq A_1^\alpha$. Тогда $A_1 \subset A_1 \times A_1^\alpha$ и

$$|A| = \frac{|A_1 \times A_1^\alpha||A_2|}{|A_1 \times A_1^\alpha \cap A_2|}.$$

Ясно, что $|A_1 \times A_1^\alpha||A_2| > |A_1||A_2| = |A|$. Поэтому $|A_1 \times A_1^\alpha \cap A_2| \neq 1$. Но $A_1 \times A_1^\alpha \in \mathfrak{F}_1$ и $A_2 \in \mathfrak{F}_2$. Следовательно,

$$A_1 \times A_1^\alpha \cap A_2 \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = (1).$$

Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_t$ *— ортогональная система* C*-замкнутых классов, где* $\mathrm{C} \in \{\mathrm{S}_n, \mathrm{N}_0, \mathrm{Q}, \mathrm{R}_0, \mathrm{D}_0\}$. *Тогда* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \bigotimes \mathfrak{F}_2 \bigotimes \dots \bigotimes \mathfrak{F}_t$ *—* C*-замкнутый класс.*

Доказательство. Предположим, что $\mathrm{C} = \mathrm{D}_0$. Пусть $A_1 \in \mathfrak{F}, A_2 \in \mathfrak{F}, \dots, A_t \in \mathfrak{F}$. Тогда найдутся такие $i_1^1, i_2^1, \dots, i_t^1; \dots; i_1^t, i_2^t, \dots, i_t^t \in I$, что $A_1 = B_1^1 \times B_2^1 \times \dots \times B_t^1$, где $B_1^1 \in \mathfrak{F}_1$, $B_2^1 \in \mathfrak{F}_2, \dots, B_t^1 \in \mathfrak{F}_t; \dots; A_t = B_1^t \times B_2^t \times \dots \times B_t^t$, где $B_1^t \in \mathfrak{F}_1$, $B_2^t \in \mathfrak{F}_2, \dots, B_t^t \in \mathfrak{F}_t$. Тогда

$$G = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t = B_1^1 \times B_2^1 \times \dots \times B_t^1 \times \dots \times B_1^t \times B_2^t \dots \times B_t^t$$

$$\cong (B_1^1 \times B_1^2 \times \dots \times B_1^t) \times (B_2^1 \times B_2^2 \times \dots \times B_2^t) \times \dots \times (B_t^1 \times B_t^2 \dots \times B_t^t),$$

где ввиду D_0-замкнутости классов $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_t$ имеем $B_1^1 \times B_1^2 \times \dots \times B_1^t \in \mathfrak{F}_1$, $B_2^1 \times B_2^2 \times \dots \times B_2^t \in \mathfrak{F}_2, \dots, B_t^1 \times B_t^2 \dots \times B_t^t \in \mathfrak{F}_t$. Значит, $G \in \mathfrak{F}$.

В случае $\mathrm{C} = \mathrm{Q}$ и $\mathrm{C} = \mathrm{R}_0$ см. доказательство [22, теорема 4.3.2], а в случае $\mathrm{C} = \mathrm{S}_n$ и $\mathrm{C} = \mathrm{N}_0$ см. доказательство [12, лемма 4].

Лемма доказана.

Заметим, что лемма 4 при $t = 2$ в разрешимом случае вытекает из работы В.А. Ведерникова [9, лемма 4].

Лемма 5. *Если* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \bigotimes \mathfrak{F}_2 \bigotimes \dots \bigotimes \mathfrak{F}_t$, *где* $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_t$ *— некоторые* D_0*-замкнутые классы, и группа* A *имеет вид* $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t$, *где* $A_1 \in \mathfrak{F}_1, A_2 \in \mathfrak{F}_2, \dots, A_t \in \mathfrak{F}_t$, *то подгруппы* $A_1, A_2, \dots, A_t$ *характеристичны в* A.

Доказательство. При $t = 2$ лемма верна в силу леммы 3.

Пусть $t > 2$. По лемме 1 $(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 \bigotimes \mathfrak{F}_3 \bigotimes \dots \bigotimes \mathfrak{F}_t) = (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2) \bigotimes (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3) \bigotimes \dots \bigotimes (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_t) = (1) \bigotimes (1) \bigotimes \dots \bigotimes (1) = (1)$. Таким образом, система $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2 \bigotimes \mathfrak{F}_3 \bigotimes \dots \bigotimes \mathfrak{F}_t$ ортогональна. Поэтому ввиду леммы 3 A_1 — характеристическая подгруппа группы $A = A_1 \times (A_2 \times \dots \times A_t)$.

Лемма доказана.

Лемма 6 (А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков [24]). *Пусть* $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$. *Если* $O^p(G) \in f(p) \cap \mathfrak{F}$, *где* $p \in \omega$, *то* $G \in \mathfrak{F}$.

Лемма 7 (А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков [24]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— класс Фиттинга и* $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$, *где* $f(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $G \notin \mathfrak{F}$. *Тогда либо* $G_{\omega d} \not\subseteq G_{\mathfrak{F}}$, *либо найдется такое простое число* $p \in \omega \cap \pi(G/G_{\mathfrak{F}})$, *что* $F^p(G) \notin f(p)$.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, *где* $\mathfrak{F}_i$ *— класс Фиттинга. Тогда класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ n*-кратно* ω*-локален в том и только в том случае, когда* n*-кратно* ω*-локален каждый класс Фиттинга* $\mathfrak{F}_i$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_i$ — n-кратно ω-локальный класс Фиттинга для любого $i \in I$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ — n-кратно ω-локальный класс Фиттинга.

Рассмотрим прежде случай, когда $n = 0$. Пусть H — нормальная подгруппа группы $G \in \mathfrak{F}$. Тогда найдутся такие индексы $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$, что $G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$. Следовательно, ввиду лемм 2 и 4

$$H \in \mathfrak{F}_{i_1} \bigotimes \left(\mathfrak{F}_{i_2} \bigotimes \ldots \bigotimes \mathfrak{F}_{i_t}\right) = \mathfrak{F}_{i_1} \bigotimes \mathfrak{F}_{i_2} \bigotimes \ldots \bigotimes \mathfrak{F}_{i_t} \subseteq \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}.$$

Итак, класс $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп.

Пусть $G = AB$, где A, B — нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G. Тогда найдутся такие индексы $i_1, i_2, \ldots, i_t; j_1, j_2, \ldots, j_a \in I$, что $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$ и $B = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_a$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, $A_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}; B_1 \in \mathfrak{F}_{j_1}$, $B_2 \in \mathfrak{F}_{j_2}, \ldots, B_a \in \mathfrak{F}_{j_a}$. Ввиду леммы 5 подгруппы $A_1, A_2, \ldots, A_t; B_1, B_2, \ldots, B_a$ нормальны в G. Следовательно, $G = C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_b$, где каждый сомножитель C_i удовлетворяет одному из следующих условий:

1) C_i совпадает с A_{i_l} для некоторого индекса $i_l \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_a\}$;

2) $C_i = B_{j_l}$ для некоторого индекса $j_l \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_t\}$;

3) $C_i = A_{i_l} B_{j_k}$ для некоторого индекса $i_l = j_k$.

Значит, $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть $n > 0$ и f_i — минимальная l_ω^{n-1}-значная H-функция n-кратно ω-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$ для каждого $i \in I$. Пусть $\pi_i = \omega \cap \pi(\mathfrak{F}_i)$. Тогда если $i \neq j$, то по условию $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$. Значит, $\pi_i \cap \pi_j = \varnothing$. Построим ω-локальную H-функцию f таким образом, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$,

$$f(p) = \begin{cases} f_i(p), & \text{если } p \in \pi_i \text{ для некоторого } i \in I, \\ \varnothing, & \text{если } p \in \omega \setminus \bigcup\limits_{i \in I} \pi_i. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$.

Пусть $LR_\omega(f) \not\subseteq \mathfrak{F}$ и G — группа минимального порядка из $LR_\omega(f) \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — комонолитическая группа и $M = G_{\mathfrak{F}}$ — ее комонолит. Поскольку $G \in LR_\omega(f)$, то $F^p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, если $p \in \omega \cap \pi(G)$, то по построению ω-локальной H-функции f найдется такое $i \in I$, что $f(p) = f_i(p) \neq \varnothing$. Последнее означает, что $p \in \pi_i$. Значит, $\omega \cap \pi(G) \subseteq \bigcup_{i \in I} \pi_i$.

Предположим, что $\omega \cap \pi(G/M) = \varnothing$. Тогда $G^{\omega d} = G$. Так как при этом $G \in LR_\omega(f)$, то

$$G = G^{\omega d} \in f(\omega') = \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Следовательно, $\omega \cap \pi(G/M) \neq \varnothing$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(G/M)$. Если G/M — неабелева группа, то $F^p(G) = G$. Поэтому

$$G = F^p(G) \in f(p) = f_i(p) \subseteq \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Пусть G/M – p-группа. Тогда

$$F^p(G) = O^p(G) \in f(p) = f_i(p).$$

Отсюда по лемме 6 $G \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие. Таким образом, справедливо включение $LR_\omega(f) \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим, что обратное включение неверно и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus LR_\omega(f)$. Тогда G — комонолитическая группа. Следовательно, найдется такое $i \in I$, что $G \in \mathfrak{F}_i = LR_\omega(f_i)$. Значит, $F^p(G) \in f_i(p) = f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$. Кроме того, поскольку $G \in \mathfrak{F}$ и $G^{\omega d}$ нормальна в G, получаем $G^{\omega d} \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Поэтому $G \in LR_\omega(f)$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F} \subseteq LR_\omega(f)$. Таким образом, $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$ — n-кратно ω-локальный класс Фиттинга.

Пусть теперь класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ n-кратно ω-локален и f — его минимальная l_ω^{n-1}-значная H-функция. Пусть $i \in I$ и f_i — такая ω-локальная H-функция, что $f_i(\omega') = \mathfrak{F}_i$,

$$f_i(p) = \begin{cases} f(p), & \text{если } p \in \pi_i, \\ \varnothing, & \text{если } p \in \omega \setminus \pi_i. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{F}_i = LR_\omega(f_i)$.

Предположим, что $\mathfrak{F}_i$ не входит в $LR_\omega(f_i)$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_i \setminus LR_\omega(f_i)$. Тогда G — комонолитическая группа и $M = G_{LR_\omega(f_i)}$ — ее комонолит. Поскольку $G \notin LR_\omega(f_i)$, то по лемме 7 либо $G^{\omega d} \nsubseteq G_{LR_\omega(f_i)}$, либо найдется такое $p \in \omega \cap \pi(G/G^{\omega d})$, что $F^p(G) \notin f_i(p)$. Но $G \in \mathfrak{F}_i$ и $G^{\omega d}$ нормальна в G. Значит, $G^{\omega d} \in \mathfrak{F}_i = f_i(\omega')$. К тому же, из того, что $G \in \mathfrak{F}$ для всех $q \in \omega \cap \pi(G)$, получаем

$$F^q(G) \in f(q) = f_i(q).$$

Следовательно, $G \in LR_\omega(f_i)$. Противоречие. Значит, имеет место включение $\mathfrak{F}_i \subseteq LR_\omega(f_i)$.

Допустим, что обратное включение неверно и G — группа минимального порядка из $LR_\omega(f_i) \setminus \mathfrak{F}_i$. Тогда группа G комонолитична с комонолитом $M = G_{\mathfrak{F}_i}$.

Пусть $p \in \omega \cap \pi(G/M) \subseteq \omega \cap \pi(G)$. Тогда из того, что $G \in LR_\omega(f_i)$, следует, что $F^p(G) \in f_i(p)$. Значит, $f_i(p) \neq \varnothing$, и по построению ω-локальной H-функции f_i получаем $p \in \pi_i$. Поэтому $\omega \cap \pi(G/M) \subseteq \pi_i$. Кроме того, $f_i \leqslant f$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Ввиду комонолитичности группы G найдется такое $j \in I$, что $G \in \mathfrak{F}_j$. Тогда $\omega \cap \pi(G/M) \subseteq \pi_j$. Поэтому

$$\omega \cap \pi(G/M) \subseteq \pi_i \cap \pi_j = \varnothing.$$

Значит, $i = j$, т. е. $G \in \mathfrak{F}_i$. Противоречие. Следовательно, $LR_\omega(f_i) \subseteq \mathfrak{F}_i$. Таким образом, $\mathfrak{F}_i = LR_\omega(f_i)$ — n-кратно ω-локальный класс Фиттинга.

Теорема доказана.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых классов Фиттинга $\mathfrak{F}_i$. Тогда в том и только в том случае класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ тотально ω-локален, когда тотально ω-локален каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$.*

При $n = 1$ из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 2. (Н.Н. Воробьев [11]). *Пусть $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых классов Фиттинга $\mathfrak{F}_i$. Тогда в том и только в том случае класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ ω-локален, когда ω-локален каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$.*

Если в теореме 1 положить $\omega = \mathbb{P}$, то получим

Следствие 3. (Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба [12]). *Пусть $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых классов Фиттинга $\mathfrak{F}_i$. Тогда в том и только в том случае класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ n-кратно локален, когда n-кратно локален каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$.*

При $n = 1$ и $\omega = \mathbb{P}$ из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых классов Фиттинга $\mathfrak{F}_i$. Тогда в том и только в том случае класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ локален, когда локален каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}_i$.*

Пусть C — операция на классах групп. Будем говорить, что непустой класс групп $\mathfrak{F}$ *прямо* C-*разложим*, если $\mathfrak{F}$ является прямым произведением некоторых неединичных C-замкнутых классов $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$. В противном случае $\mathfrak{F}$ называется *прямо* C-*неразложимым.*

Следующая теорема является аналогом теоремы Ремака — Шмидта.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I}\mathfrak{F}_i = \bigotimes_{j\in J}\mathfrak{M}_j$, *где для любых* $i \in I$, $j \in J$ C*-замкнутые неединичные классы* $\mathfrak{F}_i$ *и* $\mathfrak{M}_j$ *прямо* C*-неразложимы, где* $\mathrm{D}_0 \leq \mathrm{C}$. *Тогда* $|I| = |J|$, *и для некоторой биекции* $\varphi\colon I \longrightarrow J$ *равенство* $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{M}_{\varphi(i)}$ *имеет место при всех* $i \in I$.

Доказательство. Пусть $i \in I$. Тогда по лемме 1 имеет место равенство $\mathfrak{F}_i = \bigotimes_{j\in J}(\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M}_j)$. Понятно, что пересечение любых двух C-замкнутых классов снова является C-замкнутым классом. Значит, поскольку класс $\mathfrak{F}_i$ по условию прямо C-неразложим, то для некоторого $j \in J$ справедливо равенство $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M}_j$, т. е. $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{M}_j$.

Заметим, что если найдутся таких два различных индекса j_1, $j_2 \in J$, что $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{M}_{j_1}$ и $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{M}_{j_2}$, то $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{M}_{j_1} \cap \mathfrak{M}_{j_2} = (1)$, т. е. $\mathfrak{F}_i = (1)$, что противоречит условию. Следовательно, индекс $j = \varphi(i)$ такой, что $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{M}_j$ однозначно определен.

Покажем теперь, что если $j = \varphi(i)$, т. е. $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{M}_j$, то $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{M}_j$. По лемме 1 получаем $\mathfrak{M}_j = \bigotimes_{k\in I}(\mathfrak{F}_k \cap \mathfrak{M}_j)$. Значит, $\mathfrak{M}_j \subseteq \mathfrak{F}_k$ для некоторого $k \in I$. В свою очередь, $\mathfrak{F}_k \subseteq \mathfrak{M}_{\varphi(k)}$. Значит, $\mathfrak{M}_j = \mathfrak{F}_k = \mathfrak{M}_{\varphi(k)}$, и поэтому $\varphi(j) = k$, т. е. отображение φ сюръективно и $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{M}_{\varphi(i)}$ для любого $i \in I$.

Покажем теперь, что отображение φ инъективно. Предположим, что для $i_1 \neq i_2$ и i_1, $i_2 \in I$ имеет место $\varphi(i_1) = \varphi(i_2) = j$. Тогда по определению отображения φ $\mathfrak{F}_{i_1} \subseteq \mathfrak{M}_j$ и $\mathfrak{F}_{i_2} \subseteq \mathfrak{M}_j$. Кроме того, по доказанному выше найдется такой индекс k, что $\mathfrak{M}_j \subseteq \mathfrak{F}_k$. Значит, $\mathfrak{F}_{i_1} \subseteq \mathfrak{M}_j \subseteq \mathfrak{F}_k$ и $\mathfrak{F}_{i_2} \subseteq \mathfrak{M}_j \subseteq \mathfrak{F}_k$. Поэтому $\mathfrak{F}_{i_1} = \mathfrak{F}_{i_2} = \mathfrak{F}_k$. Следовательно, $i_1 = i_2$. Противоречие. Значит, отображение φ инъективно. Поэтому $|I| = |J|$.

Теорема доказана.

Следствие 5 (А.Н. Скиба [22]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I}\mathfrak{F}_i = \bigotimes_{j\in J}\mathfrak{M}_j$, *где для любых* $i \in I$, $j \in J$ *формации* $\mathfrak{F}_i$ *и* $\mathfrak{M}_j$ *прямо неразложимы в решетке всех формаций. Тогда* $|I| = |J|$, *и для некоторой биекции* $\varphi\colon I \longrightarrow J$ *равенство* $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{M}_{\varphi(i)}$ *имеет место при всех* $i \in I$.

Следствие 6 (Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба [12]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I}\mathfrak{F}_i = \bigotimes_{j\in J}\mathfrak{M}_j$, *где для любых* $i \in I$, $j \in J$ *классы Фиттинга* $\mathfrak{F}_i$ *и* $\mathfrak{M}_j$ *прямо неразложимы в решетке всех классов Фиттинга. Тогда* $|I| = |J|$, *и для некоторой биекции* $\varphi\colon I \longrightarrow J$ *равенство* $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{M}_{\varphi(i)}$ *имеет место при всех* $i \in I$.

Следствие 7. *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigotimes_{i\in I}\mathfrak{F}_i = \bigotimes_{j\in J}\mathfrak{M}_j$, *где для любых* $i \in I$, $j \in J$ *разрешимые классы Шунка* $\mathfrak{F}_i$ *и* $\mathfrak{M}_j$ *прямо неразложимы в решетке всех классов Шунка. Тогда* $|I| = |J|$, *и для некоторой биекции* $\varphi\colon I \longrightarrow J$ *равенство* $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{M}_{\varphi(i)}$ *имеет место при всех* $i \in I$.

Отметим, наконец, что в серии работ В.А. Ведерникова и его учеников (см., например, [8;10;14;17]) аналогичные вопросы исследовались в рамках оригинальной теории расслоенных формаций и биканонических классов Фиттинга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ballester-Bolinches A., Doerk K., Perez-Ramos M.D.** On the lattice of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups // J. Algebra. 1992. Vol. 148, no. 1. P. 42–52.
2. **Ballester-Bolinches A., Ezquerro L.M.** Classes of finite groups. Dordrecht: Springer, 2006. 385 p.
3. **Doerk K., Hawkes T.** Finite soluble groups. Ser.: De Gruyter Expo. Math., 4. Berlin; New York: Walter de Gruyter & Co, 1992. 891 p.
4. **Guo Wenbin.** The theory of classes of groups. Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London: Science Press; Kluwer Academic Publishers, 2000. 258 p.
5. **Guo Wenbin, Shum K.P.** On totally local formations of groups // Comm. Algebra. 2002. Vol. 30, no. 5. P. 2117–2131.
6. **Safonov V.G.** On τ-closed totally saturated group formations with Boolean sublattices // Algebra and Discrete Math. 2008. No. 2. P. 109–122.

7. **Васильев А.Ф., Каморников С.Ф., Семенчук В.Н.** О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и другие примыкающие алгебраические структуры: сб. тр. / Ин-т математики АН Украины; отв. ред. Н.С. Черников. Киев, 1993. С. 27–54.
8. **Ведерников В.А.** Максимальные спутники Ω-расслоенных формаций и классов Фиттинга // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 2. С. 55–71.
9. **Ведерников В.А.** О локальных формациях конечных групп // Мат. заметки. 1989. Т. 46, вып. 6. С. 32–37.
10. **Ведерников В.А., Сорокина М.М.** Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискрет. математика. 2001. Т. 13, вып. 3. С. 125–144.
11. **Воробьев Н.Н.** О прямых разложениях ω-локальных формаций и классов Фиттинга // Вестн. Витебского ун-та. 1997. № 3. С. 55–58.
12. **Воробьев Н.Н., Скиба А.Н.** О булевых решетках n-кратно локальных классов Фиттинга // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 3. С. 523–530.
13. **Го Вэньбинь.** Об одном вопросе теории кратно локальных формаций // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1263–1270.
14. **Камозина О.В.** Булевы решетки кратно Ω-биканонических классов Фиттинга // Дискрет. математика. 2002. Т. 14, вып. 3. С. 47–53.
15. Общая алгебра. Т. 2 / В.А. Артамонов, В.Н. Салий, Л.А. Скорняков [и др.]; под общ. ред. Л.А. Скорнякова. М.: Наука, 1991. 480 с.
16. **Савельева Н.В., Воробьев Н.Т.** О проблеме существования максимальных подклассов Фиттинга в минимальном π-нормальном классе Фиттинга // Весцi НАН Беларусi. Сер. физ.-мат. навук. 2009. № 1. С. 29–37.
17. **Скачкова Ю.А.** Булевы решетки кратно Ω-расслоенных формаций // Дискрет. математика. 2002. Т. 14, вып. 3. С. 42–46.
18. **Скиба А.Н.** О локальных формациях длины 5 // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Тр. Гомельского семинара. Минск: Наука и техника, 1986. С. 135–149.
19. **Скиба А.Н.** Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины // Вопросы алгебры. 1987. Вып. 3. С. 21–31.
20. **Скиба А.Н.** О локальных формациях с дополняемыми локальными подформациями // Изв. вузов. Математика. 1994. № 10. С. 75–80.
21. **Скиба А.Н.** О дополняемых подформациях // Вопросы алгебры. 1996. Вып. 9. С. 114–118.
22. **Скиба А.Н.** Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997. 240 с.
23. **Шеметков Л.А., Скиба А.Н.** Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989. 256 с.
24. **Шеметков Л.А., Скиба А.Н.** Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. тр. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.

Воробьев Николай Николаевич
канд. фiз.-мат. наук, доцент
докторант
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: vornic2001@yahoo.com

Поступила 12.12.2011