Известия вузов. Математика
2018, №1, с. 21–26 *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Н.Н. ВОРОБЬЕВ

О ПОЛНОТЕ ПОДРЕШЕТОК ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Аннотация. Доказано, что решетка всех τ-замкнутых насыщенных формаций конечных групп является полной подрешеткой решетки всех τ-замкнутых разрешимо насыщенных формаций конечных групп.

Ключевые слова: конечная группа, формация групп, подгрупповой функтор, τ-замкнутая формация, насыщенная формация, разрешимо насыщенная формация, полная решетка формаций, полная подрешетка.

УДК: 512.542

Введение

Все рассматриваемые группы конечны. Известно, что относительно включения $\subseteq$ множество всех формаций $\mathcal{F}$ образует полную решетку. Напомним, что непустое множество формаций Θ называется *полной решеткой формаций* ([1], с. 151), если пересечение любого множества формаций из Θ снова принадлежит Θ, и в множестве Θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{H}$ из Θ. Различные семейства формаций могут образовывать полные решетки. В частности, такими семействами являются множества всех насыщенных формаций $\mathcal{L}$ и всех разрешимо насыщенных формаций $\mathcal{C}$ ([1], с. 151; [2], с. 97).

Хорошо известно, что подрешетка полной решетки $\mathcal{P}$ может быть полной решеткой, вместе с тем, не являясь полной подрешеткой решетки $\mathcal{P}$ ([3], гл. V, с. 195). *Подрешетка* $\mathcal{H}$ полной решетки $\mathcal{P}$ называется *полной*, если для любого непустого подмножества $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{H}$ имеет место $\sup_{\mathcal{P}} \mathcal{X} \in \mathcal{H}$ и $\inf_{\mathcal{P}} \mathcal{X} \in \mathcal{H}$. В этом случае имеем $\sup_{\mathcal{H}} \mathcal{X} = \sup_{\mathcal{P}} \mathcal{X}$ и $\inf_{\mathcal{H}} \mathcal{X} = \inf_{\mathcal{P}} \mathcal{X}$.

Свойство полноты подрешеток формаций исследовалось в ([1], [4]–[6]; [7], с. 273). Отметим, что полнота подрешеток насыщенных и разрешимо насыщенных формаций была установлена благодаря развитию функторных методов исследования формаций, что нашло отражение в монографии А.Н. Скибы [1]. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$; *разрешимо насыщенной*, если из условия $G/\Phi(R(G)) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Символом $R(G)$ обозначается наибольшая разрешимая нормальная подгруппа группы G. Для непустой насыщенной формации $\mathfrak{F}$ пишут $\mathfrak{F} = LF(f)$ и говорят, что $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация с локальным спутником f ([2], с. 20; [8], с. 356).

А.Н. Скибой в [9] были введены кратно насыщенные и тотально насыщенные формации. При этом всякая формация считается 0-*кратно насыщенной*, а при $n \geq 1$ формация $\mathfrak{F}$ называется n-*кратно насыщенной*, если $\mathfrak{F} = LF(f)$, где все непустые значения локального спутника f являются $(n-1)$-кратно насыщенными формациями. Формация называется *тотально насыщенной*, если она n-кратно насыщена для всех натуральных n.

Поступила 03.09.2016

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований “Конвергенция-2020” (номер госрегистрации 20160350), Республика Беларусь.

В произвольной группе G выберем систему подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что τ — *подгрупповой функтор* (в смысле А.Н. Скибы [1], с. 16), если выполняются следующие условия:
1) $G \in \tau(G)$;
2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \mapsto B$ и любых групп $H \in \tau(A)$, $T \in \tau(B)$ имеем

$$H^{\varphi} \in \tau(B) \ \text{ и } \ T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A).$$

Если $\tau(G) = \{G\}$, то функтор τ называется *тривиальным*. Будем рассматривать лишь такие подгрупповые функторы τ, что для любой группы G все подгруппы, входящие в $\tau(G)$, субнормальны в G. Формация $\mathfrak{F}$ называется *τ-замкнутой* ([1], с. 23), если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для всякой группы G из $\mathfrak{F}$.

В ([1], с. 158) доказано, что решетка всех τ-замкнутых n-кратно насыщенных формаций $\mathcal{L}_n^{\tau}$ является полной подрешеткой решетки всех n-кратно насыщенных формаций $\mathcal{L}_n$ и сформулирован

Вопрос 1 ([1], вопрос 4.1.15, с. 159)**.** Верно ли, что решетка всех τ-замкнутых тотально насыщенных формаций $\mathcal{L}_{\infty}^{\tau}$ является полной подрешеткой решетки всех тотально насыщенных формаций $\mathcal{L}_{\infty}$?

Положительный ответ на вопрос 1 получен В.Г. Сафоновым и Л.А. Шеметковым [4]. Представляет интерес следующий аналог вопроса 1.

Вопрос 2. Верно ли, что решетка всех τ-замкнутых насыщенных формаций $\mathcal{L}^{\tau}$ является полной подрешеткой решетки всех τ-замкнутых разрешимо насыщенных формаций $\mathcal{C}^{\tau}$?

Ответ на вопрос 2 — основной результат настоящей работы. Доказана

Теорема. *Решетка всех τ-замкнутых насыщенных формаций $\mathcal{L}^{\tau}$ является полной подрешеткой решетки всех τ-замкнутых разрешимо насыщенных формаций $\mathcal{C}^{\tau}$.*

Если τ — тривиальный подгрупповой функтор, то из теоремы вытекает

Следствие ([6], теорема 1.1)**.** Решетка всех насыщенных формаций $\mathcal{L}$ является полной подрешеткой решетки всех разрешимо насыщенных формаций $\mathcal{C}$.

Будем использовать стандартную терминологию, принятую в [1], [2], [7], [8], [10]–[14].

1. Предварительные сведения

Напомним, что символом $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G. Для произвольной совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $\mathrm{Com}\,(\mathfrak{X})$ обозначают класс всех простых абелевых групп A таких, что $A \cong H/K$, для некоторого композиционного фактора H/K группы $G \in \mathfrak{X}$.

Символом $C^p(G)$ обозначают пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, у которых композиционные факторы имеют простой порядок p (если в группе G нет таких факторов, то полагают $C^p(G) = G$).

Символы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}_p$, $\mathfrak{G}_{p'}$ и $\mathfrak{S}$ обозначают класс всех групп, класс всех p-групп, класс всех p'-групп и класс всех разрешимых групп соответственно. Для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$ символ $G_{\mathfrak{F}}$ обозначает произведение всех нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G. В частности, будем писать

$$O_p(G) = G_{\mathfrak{N}_p}, \quad R(G) = G_{\mathfrak{S}}, \quad F_p(G) = G_{\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p}.$$

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Тогда для всякой формационной функции вида

$$f : \mathbb{P} \to \ \{\text{формации групп}\} \tag{1}$$

символ $LF(f)$ обозначает совокупность всех таких групп G, что $G = 1$ либо $G \neq 1$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \pi(G)$. Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF(f)$ для некоторой функции f вида (1), то $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной формацией* с *локальным спутником* f ([2], с. 20; [8], с. 356). Если $\mathfrak{F} = LF(f)$ и $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \mathbb{P}$, то f называется *внутренним локальным спутником* формации $\mathfrak{F}$. Символ $\mathfrak{G}_pF(p)$ обозначает множество всех таких групп A, что $A^{F(p)}$ является p-группой. Согласно ([8], гл. IV, предложение 3.8, с. 360) для любой непустой насыщенной формации $\mathfrak{F}$ существует единственная формационная функция F такая, что $\mathfrak{F} = LF(F)$ и $F(p) = \mathfrak{N}_pF(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех простых p. Формационная функция F называется *каноническим локальным спутником* формации $\mathfrak{F}$.

Для любой формационной функции

$$f : \mathbb{P} \cup \{0\} \rightarrow \ \{\text{формации групп}\} \qquad (2)$$

полагаем [14], что $CF(f) = (G \mid G/R(G) \in f(0)$ и $G/C^p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \pi(\mathrm{Com}\,(G)))$. Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF(f)$ для некоторой функции f вида (2), то $\mathfrak{F}$ называется *разрешимо насыщенной формацией* с *композиционным спутником* f. Если $\mathfrak{F} = CF(f)$ и $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \mathbb{P}$, то f называется *внутренним композиционным спутником* формации $\mathfrak{F}$. Согласно [14] для любой непустой разрешимо насыщенной формации $\mathfrak{F}$ существует единственная формационная функция F вида (2) такая, что $\mathfrak{F} = CF(F)$, $F(p) = \mathfrak{N}_pF(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех простых p и $F(0) = \mathfrak{F}$. Формационная функция F называется *каноническим композиционным* спутником формации $\mathfrak{F}$.

Пусть Θ — полная решетка формаций. Формационная функция f вида (1) либо (2) называется Θ-*значной*, если все ее значения принадлежат решетке Θ. Символом Θ^l обозначают множество всех формаций, обладающих локальным Θ-значным спутником ([2], с. 78); аналогично символом Θ^c обозначают множество всех формаций, обладающих композиционным Θ-значным спутником.

Символом $\mathcal{L}^\tau$ будем обозначать множество всех τ-замкнутых насыщенных формаций; символом $\mathcal{C}^\tau$ — множество всех τ-замкнутых разрешимо насыщенных формаций. Относительно включения $\subseteq$ множества $\mathcal{L}^\tau$ и $\mathcal{C}^\tau$ являются полными решетками ([1], с. 151). В решетке $\mathcal{L}^\tau$ ($\mathcal{C}^\tau$) для произвольной непустой совокупности $\Sigma = \{\mathcal{H}_i \mid i \in \Lambda\}$ ее элементов $\bigcap\limits_{i \in \Lambda} \mathcal{H}_i$ — точная нижняя грань для Σ в решетке $\mathcal{L}^\tau$ (соответственно, в решетке $\mathcal{C}^\tau$); $l^\tau\,\mathrm{form}\left(\bigcup\limits_{i\in\Lambda} \mathcal{H}_i\right)$ — точная верхняя грань для Σ в решетке $\mathcal{L}^\tau$ (соответственно, $c^\tau\,\mathrm{form}\left(\bigcup\limits_{i\in\Lambda} \mathcal{H}_i\right)$ — точная верхняя грань для Σ в решетке $\mathcal{C}^\tau$). Символ $l^\tau\,\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ (соответственно, $c^\tau\,\mathrm{form}(\mathfrak{X})$) обозначает пересечение всех τ-замкнутых насыщенных (τ-замкнутых разрешимо насыщенных) формаций, содержащих совокупность групп $\mathfrak{X}$.

Для доказательства теоремы будем использовать следующие известные утверждения.

Лемма 1 ([1], теорема 1.3.7, с. 29). *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если $\mathfrak{F}$ имеет внутренний τ-значный локальный спутник, то $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая формация*;

2) *если $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая формация, то ее канонический локальный спутник является τ-значным.*

Лемма 2 ([2], лемма 18.3, с. 168). *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — формации, причем $\mathfrak{H}$ насыщена и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G монолитична, ее монолит совпадает с $G^{\mathfrak{H}}$ и если $G^{\mathfrak{H}}$ — p-группа, то $G^{\mathfrak{H}} = C_G(G^{\mathfrak{H}}) = F_p(G)$.*

Лемма 3 ([8], гл. IV, предложение 1.5, с. 335). *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и R/S — нормальная секция $\mathfrak{F}$-группы G и пусть K — нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в*

$C_G(R/S)$. *Относительно следующего действия группы* G/K *на* R/S:

$$(rS)^{gK} = g^{-1}rgS, \quad r \in R, \quad g \in G,$$

составим полупрямое произведение $H = (R/S) \rtimes (G/K)$. *Тогда* $H \in \mathfrak{F}$.

Пусть Θ — полная решетка формаций. Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $\Theta\,\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ обозначается пересечение всех формаций из Θ, которые содержат все группы из $\mathfrak{X}$. В случае, если $\Theta = \mathcal{F}^\tau$ — решетка всех τ-замкнутых формаций, пишут $\tau\,\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ вместо $\Theta\,\mathrm{form}(\mathfrak{X})$.

Для любой совокупности формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ из Θ полагаем

$$\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \Theta\,\mathrm{form}\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\right).$$

В случае если $\Theta = \mathcal{F}^\tau$ пишут $\vee^\tau(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$ вместо $\vee_\Theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — произвольная совокупность Θ-значных спутников. Тогда символом $\vee_\Theta(f_i \mid i \in I)$ обозначают такой спутник f, что $f(p) = \Theta\,\mathrm{form}\Big(\bigcup\limits_{i\in I} f_i(p)\Big)$ для всех $p \in \mathbb{P}$.

Полная решетка формаций Θ^l называется *индуктивной* ([1], с. 151), если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i$ из Θ^l и для всякого такого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ внутренних Θ-значных локальных спутников f_i формаций $\mathfrak{F}_i$ имеем

$$\vee_{\Theta^l}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = LF\big(\vee_\Theta\,(f_i \mid i \in I)\big).$$

Лемма 4 ([1], теорема 4.1.1, с. 152)**.** *Решетка всех* τ*-замкнутых насыщенных формаций* $\mathcal{L}^\tau$ *индуктивна.*

Аналогично, полная решетка формаций Θ^c называется *индуктивной* ([1], с. 151; [12], с. 220), если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ формаций $\mathfrak{F}_i$ из Θ^c и всякого такого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ внутренних Θ-значных композиционных спутников f_i формаций $\mathfrak{F}_i$ имеем

$$\vee_{\Theta^c}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = CF\big(\vee_\Theta\,(f_i \mid i \in I)\big).$$

Лемма 5 ([5], теорема 2.1)**.** *Решетка* $\mathcal{C}^\tau$ *всех* τ*-замкнутых разрешимо насыщенных формаций индуктивна.*

2. Доказательство теоремы

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор τ-замкнутых насыщенных формаций и F_i — канонический локальный спутник формации $\mathfrak{F}_i$. Тогда согласно лемме 1 спутник F_i τ-значен. Пусть

$$\mathfrak{F} = \vee_{\mathcal{L}^\tau}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = l^\tau\,\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\Big) \;\text{ и }\; \mathfrak{H} = \vee_{\mathcal{C}^\tau}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = c^\tau\,\mathrm{form}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\Big).$$

Ясно, что $\bigcap\limits_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ — τ-замкнутая насыщенная формация, которая является точной нижней гранью для $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ в решетке $\mathcal{L}^\tau$. С другой стороны, ясно, что $\mathfrak{F}$ является точной верхней гранью для $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ в решетке $\mathcal{L}^\tau$ и $\mathfrak{H}$ является точной верхней гранью для $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ в решетке $\mathcal{C}^\tau$. Докажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Включение $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ очевидно. Значит, необходимо лишь показать, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Пусть $\mathfrak{H}_i = CF(H_i)$, где композиционный спутник H_i таков, что

$$H_i(a) = \begin{cases} \mathfrak{F}_i, & \text{если } a = 0; \\ F_i(a), & \text{если } a = p \in \mathbb{P}. \end{cases}$$

Покажем сначала, что $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{H}_i$ для всех i.

Предположим $\mathfrak{H}_i \not\subseteq \mathfrak{F}_i$. Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{H}_i \setminus \mathfrak{F}_i$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}_i}$.

Если R — неабелева группа, то $R(G) = 1$. Поэтому $G \cong G/1 = G/R(G) \in H_i(0) = \mathfrak{F}_i$. Противоречие. Следовательно, R — абелева p-группа, где $p \in \pi(\mathrm{Com}\,(R))$. Согласно лемме 2 $R = C_G(R) = F_p(G)$. Значит, $R = O_p(G) = C^p(G)$. Поэтому

$$G/F_p(G) = G/C^p(G) \in H_i(p) = F_i(p).$$

Значит, $G \in \mathfrak{F}_i$. Противоречие. Поэтому, $\mathfrak{H}_i \subseteq \mathfrak{F}_i$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{H}_i$. Предположим, что это неверно. Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_i \setminus \mathfrak{H}_i$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{H}_i}$. Пусть $p \in \pi(R)$.

Если R — неабелева группа, то $F_p(G) = 1$. Поэтому $G \cong G/1 = G/F_p(G) \in F_i(p) = H_i(p) \subseteq \mathfrak{H}_i$. Противоречие.

Значит, R — абелева p-группа. Пусть $T = R \rtimes (G/C_G(R))$. Поскольку $G \in \mathfrak{F}_i$, то согласно лемме 3 имеем $T \in \mathfrak{F}_i$.

Если $|T| < |G|$, то $T \in \mathfrak{H}_i$ согласно выбору группы G. Следовательно,

$$G/C_G(R) \cong T/R = T/C_T(R) = T/C^p(T) \in H_i(p).$$

Значит, $G \in \mathfrak{H}_i$. Противоречие.

Поэтому $|T| = |G|$. Следовательно, $R = C_G(R)$, что влечет $R = C_G(R) = O_p(G) = C^p(G) = F_p(G)$. Значит, $G/C^p(G) = G/F_p(G) = G/O_p(G) \in F_i(p) = H_i(p)$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}_p H_i(p) = H_i(p) \subseteq \mathfrak{H}_i$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}_i$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{H}_i$. Таким образом, $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{H}_i$ для всех $i \in I$.

Поскольку согласно лемме 4 решетка $\mathcal{L}^\tau$ индуктивна, то справедливо равенство

$$\mathfrak{F} = \vee_{\mathcal{L}^\tau}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = LF\big(\vee^\tau\,(F_i \mid i \in I)\big).$$

По лемме 5 решетка $\mathcal{C}^\tau$ индуктивна, тогда справедливо

$$\mathfrak{H} = \vee_{\mathcal{C}^\tau}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = CF\big(\vee^\tau\,(H_i \mid i \in I)\big).$$

Теперь приступим непосредственно к доказательству равенства $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Легко видеть, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{H}}$. Пусть $p \in \pi(R)$.

Если R — неабелева группа, то $F_p(G) = 1$. Следовательно, так как канонический локальный спутник F_i является внутренним, то

$$G \cong G/1 = G/F_p(G) \in \big(\vee^\tau\,(F_i \mid i \in I)\big)(p) = \vee^\tau(F_i(p) \mid i \in I) \subseteq \\ \subseteq \vee^\tau(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) \subseteq \vee_{\mathcal{C}^\tau}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \mathfrak{H}.$$

Противоречие. Значит, R — абелева p-группа. Пусть $T = R \rtimes (G/C_G(R))$. Поскольку $G \in \mathfrak{F}$, то согласно лемме 3 имеем $T \in \mathfrak{F}$.

Если $|T| < |G|$, то $T \in \mathfrak{H}$ согласно выбору группы G. Следовательно,

$$G/C_G(R) \cong T/R = T/C_G(R) = T/C_T(R) = T/C^p(T) \in \big(\vee^\tau\,(H_i \mid i \in I)\big)(p).$$

Значит, $G \in \mathfrak{H}$. Противоречие. Поэтому $|T| = |G|$. Следовательно, согласно лемме 2 имеем $R = C_G(R) = O_p(G) = C^p(G) = F_p(G)$. Поскольку $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{H}_i$ для всех $i \in I$, то

$$G/C^p(G) = G/F_p(G) \in \big(\vee^\tau\,(F_i \mid i \in I)\big)(p) = \vee^\tau(F_i(p) \mid i \in I) = \\ = \vee^\tau(H_i(p) \mid i \in I) = \big(\vee^\tau\,(H_i \mid i \in I)\big)(p).$$

Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$. Значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Теорема доказана.

Автор выражает глубокую признательность рецензенту за полезные замечания, способствовавшие улучшению качества статьи.

Литература

[1] Скиба А.Н. *Алгебра формаций* (Беларуск. навука, Минск, 1997).
[2] Шеметков Л.А., Скиба А.Н. *Формации алгебраических систем*, Современ. алгебра (Наука, М., 1989).
[3] Артамонов В.А., Салий В.Н., Скорняков Л.А. [и др.] *Общая алгебра:* в 2 т.; под общ. ред. Л.А. Скорнякова, Т. 2, Справ. матем. б-ка (Наука, М., 1991).
[4] Сафонов В.Г., Шеметков Л.А. *О подрешетках решетки тотально насыщенных формаций конечных групп*, Докл. НАН Беларуси **52** (4), 34–37 (2008).
[5] Воробьев Н.Н., Царев А.А. *О модулярности решетки τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций*, Украинск. матем. журн. **62** (4), 453–463 (2010).
[6] Skiba A.N., Vorob'ev N.N. *On the lattices of saturated and solubly saturated formations of finite groups*, Southeast Asian Bull. Math. **37** (5), 771–780 (2013).
[7] Guo Wenbin. *Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups* (Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2015).
[8] Doerk K., Hawkes T. *Finite Soluble Groups*, De Gruyter Expo. Math. (Walter de Gruyter & Co., Berlin–New York, 1992), Vol. 4.
[9] Скиба А.Н. *Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины*, в сб. "Вопросы алгебры" (Минск, 1987), вып. 3, с. 21–31.
[10] Guo Wenbin. *The Theory of Classes of Groups*, Mathematics and its Applications (Sci. Press/Kluwer Academic Publishers, Beijing–New York–Dordrecht–Boston–London, 2000), Vol. 505.
[11] Ballester-Bolinches A., Ezquerro L.M. *Classes of Finite Groups*, Math. and Appl. (Springer, Dordrecht, 2006), Vol. 584.
[12] Воробьев Н.Н. *Алгебра классов конечных групп* (Изд-во ВГУ имени П.М. Машерова, Витебск, 2012).
[13] Скиба А.Н., Шеметков Л.А. *Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп*, Матем. тр. **2** (2), 114–147 (1999).
[14] Скиба А.Н., Шеметков Л.А. *Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп*, Украинск. матем. журн. **52** (6) 783–797 (2000).

Николай Николаевич Воробьев

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,

Московский пр., д. 33, г. Витебск, 2100, Республика Беларусь,

e-mail: vornic2001@mail.ru

N.N. Vorob'ev

On complete sublattices of formations of finite groups

Abstract. We prove that the lattice of all τ-closed saturated formations of finite groups is a complete sublattice of the lattice of all τ-closed solubly saturated formations of finite groups.

Keywords: finite group, formation of groups, subgroup functor, τ-closed formation, saturated formation, solubly saturated formation, complete lattice of formations, complete sublattice.

Nikolai Nikolaevich Vorob'ev

P.M. Masherov Vitebsk State University,

33 Moscow Ave., Vitebsk, 2100 Republic of Belarus,

e-mail: vornic2001@mail.ru