УДК 512.542

Н. Н. ВОРОБЬЕВ[1], *В. О. ПОБОЙНЕВ*[2]

О БУЛЕВЫХ РЕШЕТКАХ ЧАСТИЧНО НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Полоцкий государственный аграрно-экономический колледж*

(*Поступила в редакцию 01.02 2010*)

Все рассматриваемые группы конечны. Напомним, что непустая система формаций Θ называется полной решеткой формаций, если пересечение любой совокупности формаций из Θ снова принадлежит Θ, и во множестве Θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{H} \in \Theta$. Формации, принадлежащие Θ, называют Θ-формациями (см. [1, 2]). Один из методов исследования Θ-формаций $\mathfrak{F}$ состоит в изучении свойств решетки выделенной системы Θ-подформаций, входящих в $\mathfrak{F}$. В частности, рядом авторов исследовались Θ-формации, у которых решетка Θ-подформаций является булевой или решеткой с дополнениями для различных полных решеток формаций Θ [3–9].

Понятие дополняемой подформации введено в работе А. Н. Скибы [10], где были описаны разрешимые формации групп, у которых все их подформации дополняемы. Напомним, что подформация $\mathfrak{M}$ называется дополняемой в $\mathfrak{F}$, если для нее существует дополнение в решетке всех подформаций формации $\mathfrak{F}$. В последующем в работах М. И. Эйдинова [11] и В. А. Ведерникова [12] были описаны формации, состоящие из произвольных конечных групп, у которых все подформации дополняемы. В связи с этим в работе [12] была поставлена задача описания насыщенных формаций, у которых все насыщенные подформации дополняемы. Эта задача была решена независимо А. Н. Скибой [3] и Го Вэнь Бинем [4]. Оказалось, что насыщенные формации, у которых все насыщенные подформации дополняемы, имеют булеву решетку насыщенных подформаций [3, 4] (см. также гл. 4 монографии [1]). Отметим также, что в работе А. Н. Скибы и Л. А. Шеметкова [13] были описаны формации конечных алгебр с булевой решеткой подформаций, содержащихся в некотором мальцевском многообразии.

В теории классов Фиттинга Н. Н. Воробьевым и А. Н. Скибой [14] получено описание n-кратно локальных классов Фиттинга с булевой решеткой n-кратно локальных подклассов Фиттинга (см. также работу [15]). Заметим, что при изучении булевых решеток классов Фиттинга [14, 15] использован ряд новых наблюдений о прямых разложениях классов групп, восходящих идейно к вышеупомянутой монографии [1].

Дополняя результаты [3–13], в данной работе дается описание τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций с булевой решеткой τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных подформаций.

Определения и обозначения, которые мы не приводим, можно найти в [1, 2, 16].

Пусть ω – некоторое непустое множество простых чисел и $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Функции вида

$$f\colon \omega \bigcup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$$

называются ω-локальными спутниками [2]. Для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$ символ $G_{\mathfrak{F}}$ обозначает произведение всех нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G. В частности, через $G_{\omega d}$ обозначается наибольшая нормальная в G подгруппа N со свойством $\omega \cap \pi(H/K) \neq \varnothing$ для каждого композиционного фактора H/K из N ($G_{\omega d} = 1$, если $\omega \cap \pi(\mathrm{Soc}(G)) = \varnothing$); через $F_p(G)$ обозначается наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа группы G. Для всякого ω-локального спутника f определяют класс $LF_{\omega}(f) = (G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$, где $\pi(G)$ –

множество всех простых делителей порядка группы G. Если формация такова, что $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$ для некоторого ω-локального спутника f, то формацию $\mathfrak{F}$ называют ω-насыщенной и говорят, что f – ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$ [2].

Напомним концепцию кратной локализации А. Н. Скибы [2]: всякая формация считается 0-кратно ω-насыщенной, а при $n > 0$ формация $\mathfrak{F}$ называется n-кратно ω-насыщенной, если $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, где все непустые значения функции f являются (n–1)-кратно ω-насыщенными формациями.

Нам необходимо следующее, предложенное А. Н. Скибой [1], определение: пусть со всякой группой G сопоставлена некоторая система ее подгрупп $\tau(G)$. Говорят, что τ – подгрупповой функтор, если выполняются следующие условия: 1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G; 2) для любого эпиморфизма $\varphi: A \to B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$. Формация $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой ее группы G. Подгрупповой функтор τ называется замкнутым, если для любых двух групп G и $H \in \tau(G)$ имеет место $\tau(H) \subseteq \tau(G)$. Пусть τ – произвольный подгрупповой функтор, $\overline{\tau}$ – пересечение всех таких замкнутых функторов τ_i, для которых $\tau(G) \subseteq \tau_i(G)$ для любой группы G. Функтор $\overline{\tau}$ называется замыканием функтора τ.

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ – подформации формации $\mathfrak{F}$. Говорят, что $\mathfrak{H}$ – τ-дополнение к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{F} = \tau\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$ и $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая подформация. Здесь символом $\tau\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$ обозначается пересечение всех τ-замкнутых ω-насыщенных формаций, содержащих формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$. Подформация формации $\mathfrak{F}$ называется τ-дополняемой в $\mathfrak{F}$ [1], если к ней имеется τ-дополнение в $\mathfrak{F}$.

Для произвольной τ-замкнутой n-кратно ω-насыщенной формации $\mathfrak{F}$ через $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ будем обозначать решетку всех τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных подформаций из $\mathfrak{F}$.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – некоторая система непустых подклассов $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$. Следуя [1], будем писать $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$ (или иначе $\mathfrak{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{F}_n$ в случае, когда $I = \{1, \ldots, t\}$), если для любых двух различных $i, j \in I$ имеет место $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ и, кроме того, каждая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид $A_1 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \ldots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторого натурального t и $i_1, \ldots, i_t \in I$.

Используя конструкцию прямого разложения класса групп, нами доказана следующая

Т е о р е м а. *Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая n-кратно ω-насыщенная формация. Тогда следующие условия равносильны*:

1) *решетка* $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ *булева*;

2) $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$, *где* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *– набор всех атомов решетки* $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$;

3) *в* $\mathfrak{F}$ *τ-дополняема каждая подформация, являющаяся атомом решетки* $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$.

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие леммы.

Л е м м а 1 [17, лемма 1]. *Пусть A – монолитическая группа с неабелевым цоколем R, $\mathfrak{M}$ – некоторая τ-замкнутая полуформация и* $A \in l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}\,\mathfrak{M}$. *Тогда* $A \in \mathfrak{M}$.

Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ через $S_{\tau}\mathfrak{X}$ обозначают (см. [1]) множество всех таких групп H, что $H \in \tau(G)$ для некоторой группы $G \in \mathfrak{X}$.

Л е м м а 2 [1, лемма 1.2.21]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая полуформация, порожденная совокупностью групп $\mathfrak{X}$. Тогда* $\mathfrak{F} = QS_{\overline{\tau}}(\mathfrak{X})$.

Л е м м а 3 [1, следствие 4.3.6]. *Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – такая система τ-замкнутых подформаций формации $\mathfrak{F}$, что*

$$\mathfrak{F} = \vee^{\tau}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \tau\mathrm{form}\,(\bigcup_{i \in I}\mathfrak{F}_i)$$

и $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ *для любых различных i и j из I. Тогда* $\mathfrak{F} = \oplus_{i \in I}\mathfrak{F}_i$.

Л е м м а 4 [18, теорема 1]. *Пусть* $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ *для некоторых формаций* $\mathfrak{F}_i$. *Тогда формация* $\mathfrak{F}$ *n-кратно* ($n \geq 1$) ω*-насыщенна в том и только в том случае, когда n-кратно* ω*-насыщенна каждая из формаций* $\mathfrak{F}_i$.

Л е м м а 5 [1, лемма 4.3.4]. *Пусть* $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ *и* $\mathfrak{M}$ *– непустая подформация в* $\mathfrak{F}$. *Тогда* $\mathfrak{M} = \oplus_{i\in I}(\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{M})$.

Л е м м а 6 [1, лемма 4.3.5]. *Пусть* $I = \bigcup_{j\in J} I_j$ *– разбиение множества I (т. е. для любых* $j_1, j_2 \in J$, *где* $j_1 \neq j_2$, *имеет место* $I_{j_1} \cap I_{j_2} = \varnothing$ *). Тогда если* $\mathfrak{F}_j = \oplus_{i\in I_j}\mathfrak{H}_i, j \in J$ *и* $\mathfrak{F} = \oplus_{j\in J}\mathfrak{F}_j$, то $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{H}_i$.

Л е м м а 7. *Пусть* $\mathfrak{F} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}G$ *– однопорожденная* τ*-замкнутая n-кратно* ω*-насыщенная формация. Тогда решетка* $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ *имеет лишь конечное число атомов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{M}$ – атом решетки $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{M} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}A$, где A – простая группа. Если A – неабелева группа, то, согласно лемме 1, $A \in \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая полуформация, порожденная группой G. Но ввиду леммы 2 $\mathfrak{H} = \mathrm{QS}_{\bar{\tau}}(G)$. Это означает, что в $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ имеется лишь конечное число неразрешимых атомов.

Пусть A – группа простого порядка p. Поскольку p делит $|G|$ и группа G конечна, то в решетке $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ имеется лишь конечное число разрешимых атомов. Лемма доказана.

Л е м м а 8. *Пусть* $\Sigma = \{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ *– некоторый набор атомов решетки* $l^{\tau}_{\omega_n}$, $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{M}_i$. *Тогда формация* $\mathfrak{F}$ *принадлежит решетке* $l^{\tau}_{\omega_n}$ *и если* $\mathfrak{M} \neq \varnothing$ *– произвольная неединичная* τ*-замкнутая n-кратно* ω*-насыщенная подформация в* $\mathfrak{F}$, *то во множестве* $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ *найдется такое подмножество* $\{\mathfrak{M}_j \mid j \in J\}$, *что* $\mathfrak{M} = \oplus_{j\in J}\mathfrak{M}_j$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых двух различных $i, j \in I$ имеет место равенство $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M}_j = (1)$. Значит, ввиду леммы 3 $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{M}_i = \vee^{\tau}(\mathfrak{M}_i \mid i \in I)$ – τ-замкнутая формация, а ввиду леммы 4 формация $\mathfrak{F}$ – n-кратно ω-насыщенна. Итак, $\mathfrak{F} \in l^{\tau}_{\omega_n}$.

Согласно лемме 5, $\mathfrak{M} = \oplus_{i\in I}(\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M})$. Так как $\mathfrak{M}_i$ – атом решетки $l^{\tau}_{\omega_n}$, то $\mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M} \in \{(1), \mathfrak{M}_i\}$. Пусть J – такое подмножество в I, что $j \in J$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_j \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_j$. Тогда $\mathfrak{M} = \oplus_{j\in J}\mathfrak{M}_j$. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Покажем, что из 3) вытекает 2). Прежде докажем, что условие 2) выполняется относительно любой однопорожденной $l^{\tau}_{\omega_n}$-подформации $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$. Согласно лемме 7, в $\mathfrak{F}_1$ имеется лишь конечное число подформаций, являющихся атомами решетки $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_1)$. Пусть $\mathfrak{M}$ – один из таких атомов. Тогда по условию в $\mathfrak{F}$ найдется такая τ-замкнутая подформация $\mathfrak{H}$, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\tau} \mathfrak{H}$. Значит, по лемме 3 $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{H}$. А согласно лемме 4, последнее означает, что $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая n-кратно ω-насыщенная формация. Так как у $\mathfrak{H}$ число подформаций, являющихся атомами решетки $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_1)$, меньше чем у $\mathfrak{F}_1$, то по индукции $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_t$, где $\mathfrak{M}_i$ – атом решетки $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F}_1)$, $i = 1, \ldots, t$. Значит, согласно лемме 6, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_t$.

Пусть теперь $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ –– набор всех атомов решетки $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{H} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$. По лемме 8 $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая n-кратно ω-насыщенная подформация в $\mathfrak{F}$. Допустим, что $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$ и $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда, согласно уже доказанному, $\mathfrak{F}_1 = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}G = \mathfrak{M}_1\oplus\ldots\oplus\mathfrak{M}_t$ для некоторого набора атомов $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_t$ решетки $l^{\tau}_{\omega_n}$. Значит, $G \in \mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Противоречие. Итак, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Пусть имеет место условие 2). Покажем, что тогда выполняется и условие 1). Прежде установим, что решетка $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ является решеткой с дополнениями. Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольная τ-замкнутая n-кратно ω-насыщенная подформация формации $\mathfrak{F}$, $\{\mathfrak{F}_i \mid i\in I_1\}$ – набор всех тех подформаций из $\mathfrak{M}$, которые являются атомами решетки $l^{\tau}_{\omega_n}$. Ввиду леммы 8 $\mathfrak{M} = \oplus_{i\in I_1}\mathfrak{F}_i$. Пусть $I_2 = I \setminus I_1$, $\mathfrak{H} = \oplus_{i\in I_2}\mathfrak{F}_i$. Покажем, что $\mathfrak{H}$ – дополнение к $\mathfrak{M}$ в решетке $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$. Ясно, что $\mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n} \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Допустим, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \neq (1)$ и $\mathfrak{R}$ – подформация в $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$, являющаяся атомом решетки $l^{\tau}_{\omega_n}$. Тогда найдется такое $i \in I$, что $\mathfrak{R} = \mathfrak{F}_i$. Но $I_1 \cap I_2 = \varnothing$. Значит, согласно лемме 8, $\mathfrak{R}$ не входит в одну из формаций $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$. Противоречие. Итак, $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ – решетка с дополнениями.

Для доказательства дистрибутивности решетки $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ рассмотрим три произвольные τ-замкнутые n-кратно ω-насыщенные подформации $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{R}$ из $\mathfrak{F}$. Ясно, что

$$(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R}) \vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})\subseteq \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{R}\vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{H}).$$

Предположим, что обратное включение неверно. Пусть A– группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \cap (\mathfrak{R}\vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{H}) \setminus (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R}) \vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$. Тогда A – монолитическая группа. Следовательно, найдется такое $i \in I$, что $A \in \mathfrak{F}_i$. Так как при этом $\mathfrak{F}_i$ – атом решетки $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F}_i = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}A \subseteq \mathfrak{R}\vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{H}$. Отсюда, в силу условия 2) и леммы 8 получаем, что либо $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{R}$, либо $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{H}$. В любом из этих случаев оказывается, что $A\in(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R}) \vee^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$. Полученное противоречие показывает, что решетка $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ дистрибутивна. Итак, если выполняется условие 2), то $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ является булевой решеткой.

Предположим, что выполняется условие 1). Покажем, что из него вытекает условие 3). При $n = 0$ это очевидно. Пусть $n\geq 1$ и пусть $\mathfrak{M}$ – атом решетки $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{M} = l^{\tau}_{\omega_n}\mathrm{form}A$, где A – простая группа из $\mathfrak{M}$. Ввиду того, что $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$ – решетка с дополнениями, найдется такая τ-замкнутая n-кратно ω-насыщенная подформация $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} =(1)$. Пусть $\mathfrak{W} = \mathfrak{M} \oplus\mathfrak{H}$. Ввиду леммы 3 имеет место равенство $\mathfrak{W} = \mathfrak{M} \vee^{\tau}\mathfrak{H} = \mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_0}\mathfrak{H}$. Очевидно, $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{F}$. Согласно лемме 4 $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^{\tau}_{\omega_n}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{H} = \mathfrak{W}$. Итак, $\mathfrak{F} = \mathfrak{W}$, т. е. атом $\mathfrak{M}$ дополняем в решетке $L^{\tau}_{\omega_n}(\mathfrak{F})$. Теорема доказана.

При $\omega = \mathbb{P}$ из теоремы вытекает

Следствие 1 [1, теорема 4.3.13]. *Пусть $\mathfrak{F}$– τ-замкнутая n-кратно насыщенная формация. Тогда следующие условия равносильны*:

1) *решетка $L^{\tau}_n(\mathfrak{F})$ булева*;

2) $\mathfrak{F} = \oplus_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, *где $\{\mathfrak{F}_i \mid i\in I\}$ – набор всех атомов решетки $L^{\tau}_n(\mathfrak{F})$*;

3) *в $\mathfrak{F}$ τ-дополняема каждая подформация, являющаяся атомом решетки $L^{\tau}_n(\mathfrak{F})$*.

Если τ – тривиальный подгрупповой функтор и $\omega = \mathbb{P}$, то мы получаем

С л е д с т в и е 2 [3, теорема]. *Пусть* $\mathfrak{F}$– *n-кратно насыщенная формация,* $n \geq 0$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *решетка n-кратно насыщенных подформаций формации* $\mathfrak{F}$ *булева*;

2) $\mathfrak{F} = l_n \mathrm{form}\, \mathfrak{X}$, *где* $\mathfrak{X}$ – *некоторое множество простых групп, причем при* $n \geq 61$ *все группы из* $\mathfrak{X}$ *абелевы*;

3) *в* $\mathfrak{F}$ *дополняема каждая подформация, являющаяся атомом решетки n-кратно насыщенных формаций.*

При $n = 1$ и $\omega = \{p\}$ для тривиального подгруппового функтора τ имеем

С л е д с т в и е 3 [5, теорема 1]. *Пусть* $\mathfrak{F}$– *p-насыщенная формация. Тогда следующие условия равносильны*:

1) $\mathfrak{F}$ *есть прямое произведение своих минимальных p-насыщенных подформаций*;

2) *решетка p-насыщенных подформаций формации* $\mathfrak{F}$ *булева*;

3) *в* $\mathfrak{F}$ *дополняемы все минимальные p-насыщенные подформации.*

Если $n = 1$ и $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ получим

С л е д с т в и е 4 [3, 12]. *Пусть* $\mathfrak{F}$– *неединичная насыщенная формация. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *решетка насыщенных подформаций формации* $\mathfrak{F}$ *булева*;

2) *формация* $\mathfrak{F}$ *нильпотентна*;

3) *в* $\mathfrak{F}$ *дополняема каждая подформация вида* $\mathfrak{N}_p$, *где p – некоторое простое число.*

При $n = 0$ и $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ имеем

С л е д с т в и е 5 [3]. *Пусть* $\mathfrak{F}$– *неединичная формация. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *решетка подформаций формации* $\mathfrak{F}$ *булева*;

2) *каждая неединичная* $\mathfrak{F}$*-группа является прямым произведением некоторого конечного числа простых групп*;

3) *в* $\mathfrak{F}$ *дополняема каждая подформация вида* form A, *где* A – *некоторая простая группа*.

Если $n = 0$ и $\omega = \mathbb{P}$ для тривиального подгруппового функтора τ имеем также

С л е д с т в и е 6 [11, 12]. *Тогда и только тогда каждая подформация формации* $\mathfrak{F}$ *дополняема в* $\mathfrak{F}$, *когда* $\mathfrak{F}$= form $\mathfrak{X}$, *где* $\mathfrak{X}$ – *набор простых групп*.

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Ф08М-118; БРФФИ–РФФИ, грант Ф10Р-231).

Литература

1. С к и б а А. Н. Алгебра формаций. Минск, 1997.
2. С к и б а А. Н., Ш е м е т к о в Л. А. // Матем. труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
3. С к и б а А. Н. // Изв. вузов. Сер. Математика. 1994. № 10. С. 75–80.
4. G u o W e n b i n // Chinese Science Bulletin. 1997. Vol. 42, N 5. P. 364–368.
5. Ж е в н о в а Н. Г., С к и б а А. Н. // Изв. вузов. Сер. Математика. 1997. № 5. С. 1–7.
6. Ж е в н о в а Н. Г. // Докл. АН Беларуси. 1997. Т. 41, № 5. С. 15–19.
7. С к а ч к о в а Ю. А. // Дискретная математика. 2002. Т. 14, вып. 3. С. 42–46.
8. G u o W e n b i n, S h u m K. P. // Comm. Algebra. 2002. Vol. 30, N 5. P. 2117–2131.
9. S a f o n o v V. G. // Algebra and discrete math. 2008. N 2. P. 109–122.
10. С к и б а А. Н. О формациях с заданными системами подформаций. Подгрупповое строение конечных групп. Минск, 1981. С. 155–180.
11. Э й д и н о в М. И. // О формациях с дополняемыми подформациями: Тезисы докл. IX Всесоюзн. симпозиума по теории групп. М., 1984. С. 101.
12. В е д е р н и к о в В. А. // Вопросы алгебры. 1990. Вып. 5. С. 28–34.

13. С к и б а А. Н., Ш е м е т к о в Л. А. // Украинский матем. журн. 1991. Т. 43, № 7, 8. С. 1008–1012.
14. В о р о б ь е в Н. Н., С к и б а А. Н. // Сибирский матем. журн. 1999. Т. 40, № 3. С. 523–530.
15. В о р о б ь е в Н. Н. // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. 2002. № 5(14). С. 43–46.
16. Ш е м е т к о в Л. А. Формации конечных групп. М., 1978.
17. S h e m e t k o v L. A., S k i b a A. N., V o r o b' e v N. N. // Asian-European Journal of Math. 2009. Vol. 2, N 1. P. 155–169.
18. В о р о б ь е в Н. Н. // Вестник Витебск. ун-та. 1997. № 3. С. 55–58.

N. N. VOROB'EV, V. O. POBOINEV

BOOLEAN LATTICES OF PARTIALLY SATURATED FORMATIONS

Summary

A description of τ-closed *n*-multiply ω-saturated formations with Boolean sublattice of τ-closed *n*-multiply ω-saturated subformations is obtained.