Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (90), 2015

УДК 512.542

Два замечания о порожденных ω-локальных классах Фиттинга

И.В. Близнец[1], Н.Н. Воробьев[2], И.А. Григорьев[2]

Найдены новые свойства порожденных частично локальных классов Фиттинга.
Ключевые слова: класс Фиттинга, комонолит группы, коцоколь группы, комонолитическая группа, нормально наследственный класс, ω-локальная H-функция, минимальная ω-локальная H-функция, ω-локальный класс Фиттинга.

New properties of generated partially local Fitting classes were found.
Keywords: Fitting class, comonolith of group, cosocle of group, comonolithic group, normally hereditary class, ω-local H-function, minimal ω-local H-function, ω-local Fitting class.

В работе рассматриваются только конечные группы. Мы будем использовать стандартную терминологию, принятую в [1], [2]. Напомним, что *классом Фиттинга* называется класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп из $\mathfrak{F}$.

В дальнейшем ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел и $\omega = \mathbb{P}\setminus\omega$. Символы (1), $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{G}_{p'}$ обозначают соответственно класс всех единичных групп, класс всех p-групп и класс всех p'-групп. Символ $\mathfrak{G}_{\omega d}$ обозначает класс всех единичных и таких неединичных групп, у которых каждый композиционный фактор A таков, что $\omega \cap \pi(A) \neq \varnothing$, где $\pi(\mathrm{A})$ – множество всех различных простых делителей порядка группы A.

Для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$ через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначено пересечение всех таких нормальных подгрупп N, что $G/N \in \mathfrak{F}$. В частности, $O^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p}$, $G^{\omega d} = G^{\mathfrak{G}_{\omega d}}$ и $F^p(G) = (G^{\mathfrak{G}_{p'}})^{\mathfrak{N}_p}$.

Пусть f – произвольная функция вида

$$f\colon \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{классы Фиттинга}\} \quad (*)$$

где $f(\omega') \neq \varnothing$. Следуя [2], сопоставим функции f класс групп

$$LR_\omega(f) = (G \mid G_{\omega d}(\mathrm{G}) \in f(\omega') \text{ и } F^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)).$$

Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$ для некоторой функции f вида (*), то $\mathfrak{F}$ называется *ω-локальным классом Фиттинга* с *ω-локальной функцией Хартли f* (более кратко – *ω-локальной H-функцией*). В случае, когда $\omega = \{p\}$, класс Фиттинга называется *p-локальным*, а в случае, когда $\omega = \mathbb{P}$, символ ω опускается и класс Фиттинга называется *локальным*.

Настоящая работа посвящена изучению свойств порожденных ω-локальных классов Фиттинга. Следующая теорема дуализирует результаты, полученные А.Н. Скибой в теории формаций, связанные с доказательством индуктивности решетки всех функторно замкнутых n-кратно насыщенных формаций [1].

Теорема. Пусть $\mathfrak{M}$ – *разрешимый нормально наследственный класс и* $A \in l_\omega\mathrm{fit}\mathfrak{M}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $O^p(A) = A$ *и* $p \in \omega$, *то* $A \in l_\omega\mathrm{fit}\mathfrak{M}_1$, *где* $\mathfrak{M}_1 = (O^p(G) \mid G \in \mathfrak{M})$;

2) *если* $A^{\omega d} = A$, *то* $A \in l_\omega\mathrm{fit}\mathfrak{M}_2$, *где* $\mathfrak{M}_2 = (G^{\omega d} \mid G \in \mathfrak{M})$.

Через $l_\omega\mathrm{fit}\mathfrak{X}$ обозначено пересечение всех таких ω-локальных классов Фиттинга, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$. Символом $l_p\mathrm{fit}\mathfrak{X}$ обозначено пересечение всех таких p-локальных классов Фиттинга, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$. В частности, $l\mathrm{fit}\mathfrak{X}$ – пересечение всех локальных классов Фиттинга, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$, а $\mathrm{fit}\mathfrak{X}$ – пересечение всех таких классов Фиттинга, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$.

Напомним несколько известных утверждений, которые потребуются для доказательства основного результата.

Лемма 1 ([2, лемма 21]). *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, *где* $\mathfrak{F}_i = LR_\omega(f_i)$. *Тогда* $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$, *где* $f = \bigcap_{i\in I} f_i$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – набор всех ω-локальных H-функций класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда по лемме 1 $\bigcap_{i\in I} f_i$ – ω-локальная H-функция класса $\mathfrak{F}$, называемая *минимальной ω-локальной H-функцией* класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ [2].

Следующее утверждение дает способ построения минимальной ω-локальной H-функции класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Лемма 2 ([2, лемма 22]). *Если $\mathfrak{F} = l_\omega \mathrm{fit}\mathfrak{X}$ и f – минимальная ω-локальная H-функция класса $\mathfrak{F}$, то справедливы следующие утверждения*:

1) $f(\omega') = \mathrm{fit}(G^{\omega d} \mid G\in \mathfrak{X})$;

2) $f(p) = \mathrm{fit}(F^p(G) \mid G\in \mathfrak{X})$ *для всех* $p\in\omega$;

3) $\mathfrak{F} = LR_\omega(h)$, *где* $h(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $h(p) = f(p)$ *для всех* $p\in\omega$.

Лемма 3 ([2, лемма 1]). *Пусть N – нормальная подгруппа группы G. Справедливы следующие утверждения*:

1) *если G/N – p'-группа, то* $F^p(G) = F^p(N)$;

2) *если $G/N \in \mathfrak{G}_{\omega d}$, то* $G^{\omega d} = N^{\omega d}$.

Лемма 4 ([3, гл. IX, лемма 2.12]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – фиттингова формация и пусть $G = N_1N_2$, где N_1 и N_2 – нормальные подгруппы группы G. Тогда $G^{\mathfrak{F}} = (N_1)^{\mathfrak{F}} (N_2)^{\mathfrak{F}}$.*

Лемма 5. *Если M – максимальная нормальная подгруппа группы G и N – любая, не содержащаяся в M, нормальная подгруппа группы G, то подгруппа $N\cap M$ также является максимальной нормальной в N.*

Лемма 6. *Пусть $N_1,\dots,N_t$ – такие максимальные нормальные подгруппы группы G ($t > 2$), что для любых трех попарно различных индексов i, j, k имеет место $N_i\cap N_j \nsubseteq N_k$. Тогда*

$$\prod_{\{i_1,\dots,i_r\}}^{t} (N_{i_1}\cap\dots\cap N_{i_r}) = G,$$

где $\{i_1, \dots , i_r\}$ пробегает всевозможные выборки по r элементов из $\{1, \dots, t\}$ и $1 < r < t$.

Доказательство. Проведем индукцию по r. Пусть $r = 2$. Заметим, что, если найдутся такие попарно различные индексы $p, q, s \in \{1, \dots, t\}$, что $N_p\cap N_q = N_p\cap N_s$, то получаем $N_p\cap N_q \cap N_s = N_p \cap N_s$, т. е. $N_p \cap N_s \subseteq N_q$. Последнее невозможно по условию. Значит, $N_p\cap N_q \neq N_p \cap N_s$ для любых трех попарно различных индексов $p, q, s \in \{1, \dots, t\}$. Поэтому ввиду леммы 5

$$\prod_{\{i,j\}\subseteq\{1,\dots,t\}} (N_i\cap N_j) = ((N_1\cap N_2)(N_1\cap N_3)\dots(N_1\cap N_t))$$

$$((N_2\cap N_3)(N_2\cap N_4)\dots(N_2\cap N_t))\dots(N_{t-1}\cap N_t) = N_1N_2\dots N_{t-2}(N_{t-1}\cap N_t) = G$$

Допустим теперь, что $r > 2$ и при $r - 1$ лемма верна. Пусть $\{j_1, \dots, j_{r-1}\} \subseteq \{1, \dots, t\}$. Допустим, что найдутся два таких различных индекса a, $b \in \{1, \dots, t\}\backslash\{j_1, \dots, j_{r-1}\}$, что $N_a\cap N_{j_1}\cap\dots\cap N_{j_{r-1}} = N_b\cap N_{j_1}\cap\dots\cap N_{j_{r-1}}$. Тогда

$$N_a\cap N_{j_1}\cap\dots\cap N_{j_{r-1}} \subseteq N_b \text{ и } N_b\cap N_{j_1}\cap\dots\cap N_{j_{r-1}} \subseteq N_a.$$

Поэтому $(N_a\cap N_{j_1}\cap\dots\cap N_{j_{r-1}})(N_b\cap N_{j_1}\cap\dots\cap N_{j_{r-1}}) = N_{j_1}\cap\dots\cap N_{j_{r-1}}$.

Если же $N_a\cap N_{j_1}\cap\dots\cap N_{j_{r-1}} \neq N_b\cap N_{j_1}\cap\dots\cap N_{j_{r-1}}$, то по лемме 5 снова получаем

$$(N_a\cap N_{j_1}\cap\dots\cap N_{j_{r-1}})(N_b\cap N_{j_1}\cap\dots\cap N_{j_{r-1}}) = N_{j_1}\cap\dots\cap N_{j_{r-1}}.$$

Таким образом, для любой выборки $\{j_1, \dots, j_{r-1}\}$ множества индексов из $\{1, \dots, t\}$ в

$$\prod_{\{i_1,\dots,i_r\}\subseteq\{1,\dots,t\}} (N_{i_1}\cap\dots\cap N_{i_r})$$

всегда найдутся два таких сомножителя, произведение которых равно $N_{j_1}\cap\dots\cap N_{j_{r-1}}$. Значит,

$$\prod_{\{j_1,\dots,j_{r-1}\}\subseteq\{1,\dots,t\}} (N_{j_1}\cap\dots\cap N_{j_{r-1}}) \subseteq \prod_{\{i_1,\dots,i_r\}\subseteq\{1,\dots,t\}} (N_{i_1}\cap\dots\cap N_{i_r}).$$ Но по индукции

$$\prod_{\{j_1,\dots,j_{r-1}\}\subseteq\{1,\dots,t\}} (N_{j_1}\cap\dots\cap N_{j_{r-1}}) = G.$$

Значит, $\prod\limits_{\{j_1,\dots,j_{r-1}\}\subseteq\{1,\dots,t\}}(N_{j_1}\cap\ldots\cap N_{j_{r-1}}) = \prod\limits_{\{i_1,\dots,i_r\}\subseteq\{1,\dots,t\}}(N_{i_1}\cap\ldots\cap N_{i_r}) = G$.

Лемма доказана.

Группа G называется *комонолитической*, если в G имеется такая нормальная подгруппа M (*комонолит группы* G), что G/M – простая группа и любая собственная нормальная подгруппа N группы G содержится в M. Напомним, что *коцоколем* группы G (обозначается $\mathrm{Cosoc}(G)$) называется пересечение всех максимальных нормальных подгрупп группы G.

Лемма 7. *Пусть* $\mathrm{Cosoc}(G) = N_1\cap\ldots\cap N_t$, *где* N_i *– максимальная нормальная подгруппа группы* G *и* $t > 1$, $\mathrm{Cosoc}(G) \neq N_1\cap\ldots\cap N_{i-1}\cap N_{i+1}\cap\ldots\cap N_t$ *для всех* $i \in \{1, \dots, t\}$ *и* G *– группа с* $O^p(G) = G$, *где* $p\in\omega$. *Пусть* M_i *– наименьшая нормальная в* G *подгруппа, содержащаяся в* $N_1\cap\ldots\cap N_{i-1}\cap N_{i+1}\cap\ldots\cap N_t$, *но не содержащаяся в* N_i. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *для любого* $i \in \{1, \dots, t\}$ *группа* M_i *комонолитична с комонолитом* $M_i\cap N_i$, *причем* $O^p(M_i) = M_i$;

2) $\prod\limits_{i=1}^{t} M_i = \mathrm{G}$.

Доказательство. Пусть G – группа с $O^p(G) = G$, где $p \in \omega$, удовлетворяющая условиям леммы. Докажем выполнимость первого утверждения леммы.

Предложим, что группа M_i – не комонолитична. Тогда M_i обладает по крайней мере двумя различными максимальными нормальными подгруппами T и $M_i \cap N_i$.

Если $T \subseteq N_i$, то $T \subseteq M_i \bigcap N_i$, что противоречит максимальности T. Следовательно, $T \not\subseteq N_i$ и $T \subseteq N_1\cap\ldots\cap N_{i-1}\cap N_{i+1}\cap\ldots\cap N_t$. Но ввиду того, что M_i – наименьшая из нормальных подгрупп группы G с этими двумя свойствами, то $M_i \subseteq T$. Поэтому $M_i = T$. Противоречие. Следовательно, M_i – комонолитическая группа и ее комонолит совпадает с $M_i \cap N_i$.

Покажем, что $O^p(M_i) = M_i$. Предположим, что $O^p(M_i) \neq M_i$. Тогда $O^p(M_i) \subseteq M_i \cap N_i = \mathrm{Cosoc}(M_i) \subseteq N_i$. Поскольку $O^p(M_i)O^p(N_i)/O^p(N_i) \subseteq N_i/O^p(N_i)\in \mathrm{N}_p$, тогда

$$O^p(M_i)/O^p(M_i)\cap O^p(N_i) \cong O^p(M_i)O^p(N_i)/O^p(N_i) \in \mathrm{N}_p.$$

Отсюда $O^p(M_i) = O^p(O^p(M_i)) \subseteq O^p(M_i)\cap O^p(N_i) \subseteq O_p(N_i)$. Итак, $O^p(M_i) \subseteq O^p(N_i)$. Ввиду того, что $M_i \not\subseteq N_i$ имеем $G = M_iN_i$. Вместе с тем по условию $O^p(G) = G$. Значит, $G = O^p(M_iN_i)$. По лемме 4 $G = O^p(M_i)O^p(N_i)$. Так как $O^p(M_i) \subseteq O^p(N_i)$, то $G = O^p(M_i)O^p(N_i) = O^p(N_i)$. Значит, $GN_i = G = O^p(N_i)N_i = N_i$. Противоречие. Следовательно, $O^p(M_i) = M_i$.

Докажем теперь второе утверждение леммы.

Предположим, что $\prod\limits_{i=1}^{t} M_i \subset G$ и пусть R – максимальная нормальная подгруппа группы G, содержащая $\prod\limits_{i=1}^{t} M_i$. Если R = Ni, для некоторого $i \in \{1, \dots , t\}$, то $M_i \subseteq \prod\limits_{i=1}^{t} M_i \subseteq N_i$. Противоречие. Значит, $R \neq N_i$ для всех $i \in \{1, \dots , t\}$. Поэтому R совпадает с одной из максимальных нормальных подгрупп группы G не входящих в $\mathrm{Cosoc}(G)$. Значит, $N_1\cap\ldots\cap N_{i-1}\cap N_{i+1}\cap\ldots\cap N_t \subset R$.

Следовательно, $\prod\limits_{i=1}^{t}(N_1\cap\ldots\cap N_{i-1}\cap N_{i+1}\cap\ldots\cap N_t) \subset R$.

Вместе с тем по лемме 6 $\prod\limits_{i=1}^{t}(N_1\cap\ldots\cap N_{i-1}\cap N_{i+1}\cap\ldots\cap N_t) = \mathrm{G}$. Полученное противоречие показывает, что $\prod\limits_{i=1}^{t} M_i = G$. Лемма доказана.

Аналогично из лемм 4 и 6 получаем следующее утверждение.

Лемма 8. *Пусть* Cosoc(G) = $N_1 \cap ... \cap N_t$, *где Ni – максимальная нормальная подгруппа группы G и t* > 1, Cosoc(G) ≠ $N_1 \cap ... \cap N_{i-1} \cap N_{i+1} \cap ... \cap N_t$ *для всех* $i \in \{1, ..., t\}$ *и G – группа с* $G^{\omega d} = G$. *Пусть* M_i *– наименьшая нормальная в G подгруппа, содержащаяся в* $N_1 \cap ... \cap N_{i-1} \cap N_{i+1} \cap ... \cap N_t$, *но не содержащаяся в* N_i. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *для любого* $i \in \{1, ..., t\}$ *группа* M_i *комонолитична с комонолитом* $M_i \cap N_i$, *причем* $M_i^{\omega d} = M_i$;

2) $\prod_{i=1}^{t} M_i = G$.

Доказательство. Пусть G – группа с $G^{\omega d} = G$, удовлетворяющая условиям леммы. Докажем выполнимость первого утверждения леммы. Рассмотрев доказательство леммы 7 и заменив условие $O^p(G) = G$ условием $G^{\omega d} = G$, аналогично можно показать, что M_i – комонолитическая группа с комонолитом $M_i \cap N_i$.

Покажем, что $M_i^{\omega d} = M_i$. Предположим, что $M_i^{\omega d} \neq M_i$. Тогда $M_i^{\omega d} \subseteq M_i \cap N_i$ = Cosoc(M_i)$\subseteq N_i$. Поскольку $M_i^{\omega d} N_i^{\omega d} / N_i^{\omega d} \subseteq N_i / N_i^{\omega d} \in G^{\omega d}$, тогда $M_i^{\omega d} / M_i^{\omega d} \cap N_i^{\omega d} \cong M_i^{\omega d} N_i^{\omega d} / N_i^{\omega d} \in G^{\omega d}$.

Отсюда $M_i^{\omega d} = (M_i^{\omega d})^{\omega d} \subseteq M_i^{\omega d} \cap N_i^{\omega d} \subseteq N_i^{\omega d}$. Ввиду того, что $M_i \nsubseteq N_i$ имеем $G = M_i N_i$. Вместе с тем по условию $G^{\omega d} = G$. Значит, $G = (M_i N_i)^{\omega d}$. По лемме 4 $G = M_i^{\omega d} N_i^{\omega d}$, а так как $M_i^{\omega d} \subseteq N_i^{\omega d}$, то G = $M_i^{\omega d} N_i^{\omega d} = N_i^{\omega d}$. Отсюда $GN_i = G = M_i^{\omega d} N_i = N_i$. Противоречие. Значит, $M_i^{\omega d} = M_i$.

Применяя рассуждения, используемые при доказательстве утверждения 2 леммы 7, получаем второе утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть f – внутренняя ω-локальная H-функция класса Фиттинга* $\mathfrak{F}$, $\pi = \omega \cap \pi(A / \mathrm{Cosoc}(A))$. *Тогда если для каждого* $p \in \pi$ *имеет место* $F^p(A) \in f(p)$, *то* $A \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Пусть $\pi = \{p_1, ..., p_t\}$, $A^{\mathfrak{G}_{p'_i}} = D^{p_i}$ и $D = D^{p_1} ... D^{p_t}$. Тогда поскольку $D^{p_i} \subseteq D$, то $A/D^{p_i} / D/D^{p_i} \cong A/D \in \mathfrak{G}_{p'_i}$ для всех $p_i \in \pi$. Следовательно, $A/D \in \bigcap_{p_i \in \pi} \mathfrak{S}_{p'_i} = \mathfrak{S}_{\pi'}$.

Покажем, что $A = D$. Допустим $A \neq D$. Тогда $D \subseteq M$ для некоторой максимальной нормальной подгруппы M группы A. Так как Cosoc(A) $\subseteq M$, то

$$\omega \cap \pi(A / M) \subseteq \omega \cap \pi(A / \mathrm{Cosoc}(A)).$$

Поэтому $A/M \in \mathfrak{G}_\pi$. Следовательно, $A/D / M/D \cong A/M \in \mathfrak{G}_\pi \cap \mathfrak{G}_{\pi'} = (1)$. Противоречие. Значит, $A = D$. Поскольку по условию $F^{p_i}(A) \in f(p_i)$, то $D^{p_i} \in f(p)\mathfrak{N}_{p_i} \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $A = D^{p_1} \dots D^{p_i} \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Докажем первое утверждение теоремы.

Если $A \in \mathfrak{M}$, то $A = O^p(A) \in (O^p(G) \mid G \in \mathfrak{M}) \subseteq l_\omega \mathrm{fit}(O^p(G) \mid G \in \mathfrak{M})$. Пусть $A \notin \mathfrak{M}$. Предположим, что A – комонолитическая группа с комонолитом R. Поскольку группа A – разрешима, то A/R – q-группа, для некоторого $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$. Пусть $\mathfrak{F}_1 = l_\omega \mathrm{fit}\mathfrak{M}$ и f – минимальная ω-локальная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_1$.

Пусть $\mathfrak{H}_1 = l_\omega \mathrm{fit}(O^p(G) \mid G \in \mathfrak{M})$ и h – минимальная ω-локальная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{H}_1$. Тогда ввиду леммы 2

$$f(\omega') = \mathrm{fit}(G^{\omega d} \mid G \in \mathfrak{M}), \qquad f(q) = \mathrm{fit}(F^q(G) \mid G \in \mathfrak{M});$$

$$h(\omega') = \mathrm{fit}((O^p(G))^{\omega d} \mid G \in \mathfrak{M}), \qquad h(q) = \mathrm{fit}(F^q(O^p(G)) \mid G \in \mathfrak{M}) \text{ для всех } q \in \omega \setminus \{p\}.$$

Так как $G/O^p(G)$ – ωd-группа, то по лемме 3 имеет место $(O^p(G))^{\omega d} = G^{\omega d}$. Поэтому $f(\omega') = h(\omega')$. Кроме того, фактор-группа $G/O^p(G)$ является q'-группой. Значит, по лемме 3 имеем $F^q(G) = F^q(O^p(G))$, где $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$. Поэтому $f(q) = h(q)$.

Поскольку $A \in \mathfrak{F}_1$, то $F^q(A) \in f(q)$ для всех $q \in \omega \cap \pi(A)$. Заметим, что по лемме 3 $F^q(O^p(A)) = F^q(A)$. Следовательно, $F^q(O^p(A)) \in h(q)$ для всех $q \in \omega \cap \pi(O^p(A))$. Значит, согласно лемме 9, $A \in \mathfrak{H}_1$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathrm{Cosoc}(A) = N_1 \cap ... \cap N_t$ $(t > 1)$ и

$$\mathrm{Cosoc}(A) \neq N_1 \cap ... \cap N_{i-1} \cap N_{i+1} \cap ... \cap N_t \text{ для всех } i \in \{1, ..., t\}.$$

Пусть M_i – наименьшая нормальная в A подгруппа, содержащаяся в

$$N_1 \cap ... \cap N_{i-1} \cap N_{i+1} \cap ... \cap N_t,$$

но не содержащаяся в N_i. Тогда по лемме 7 $A = M_1 ... M_t$, где M_i – комонолитическая группа с комонолитом $M_i \cap N_i$. Поскольку $A \in \mathfrak{F}_1$, то $M_i \in \mathfrak{F}_1$. Следовательно, по доказанному выше $M_i \in \mathfrak{H}_1$. Отсюда $A \in \mathfrak{H}_1$.

Докажем второе утверждение теоремы.

Если $A \in \mathfrak{M}$, то $A = A^{\omega d} \in (G^{\omega d} \mid G \in \mathfrak{M}) \subseteq l_\omega \mathrm{fit}(G^{\omega d} \mid G \in \mathfrak{M})$. Пусть $A \notin \mathfrak{M}$. Предположим, что A – комонолитическая группа с комонолитом R. Поскольку группа A – разрешима, то A/R – q-группа, для некоторого $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$. Пусть $\mathfrak{F}_2 = l_\omega \mathrm{fit}\mathfrak{M}$ и f – минимальная ω-локальная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_2$. Пусть $\mathfrak{H}_2 = l_\omega \mathrm{fit}(G^{\omega d} \mid G \in \mathfrak{M})$ и h – минимальная ω-локальная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{H}_2$. Тогда ввиду леммы 2

$$f(\omega') = \mathrm{fit}(G^{\omega d} \mid G \in \mathfrak{M});$$

$$h(\omega') = \mathrm{fit}((G^{\omega d})^{\omega d} \mid G^{\omega d} \in \mathfrak{M}).$$

Так как $G^{\omega d} = (G^{\omega d})^{\omega d}$, то $f(\omega') = h(\omega')$.

Поскольку $A = A^{\omega d}$ и $A \in \mathfrak{F}_2$, то

$$A = A^{\omega d} \in f(\omega') = h(\omega') = \mathrm{fit}((G^{\omega d})^{\omega d} \mid G \in \mathfrak{M}) \subseteq \mathrm{fit}\mathfrak{M} \subseteq \mathrm{fit}(G^{\omega d} \mid G \in \mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{H}_2.$$

Таким образом, $A \in \mathfrak{H}_2$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathrm{Cosoc}(A) = N_1 \cap ... \cap N_t$ $(t > 1)$ и

$$\mathrm{Cosoc}(A) \neq N_1 \cap ... \cap N_{i-1} \cap N_{i+1} \cap ... \cap N_t$$

для всех $i \in \{1, ..., t\}$. Пусть M_i – наименьшая нормальная в A подгруппа, содержащаяся в $N_1 \cap ... \cap N_{i-1} \cap N_{i+1} \cap ... \cap N_t$, но не содержащаяся в N_i. Применяя теперь лемму 8, снова получаем $A \in \mathfrak{H}_2$. Теорема доказана.

Из теоремы непосредственно вытекает

Следствие 1. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *– разрешимый нормально наследственный класс и* $A \in l\mathrm{fit}\mathfrak{M}$. *Тогда*

$$O^p(A) \in l\mathrm{fit}(O^p(G) \mid G \in \mathfrak{M}).$$

Следствие 2. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *– разрешимый нормально наследственный класс и* $A \in l_p\mathrm{fit}\mathfrak{M}$. *Тогда*

$$A^{pd} \in l_p\mathrm{fit}(G^{pd} \mid G \in \mathfrak{M}).$$

Литература

1. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

2. Скиба, А.Н. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.

3. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter & Co. – 1992. – Vol. 4. – 891 p.

4. Воробьев, Н.Н. Алгебра классов конечных групп : монография / Н.Н. Воробьев. – Витебск : ВГУ им. П.М. Машерова, 2012. – 322 с.

[1]Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

[2]Витебский государственный
университет им. П.М. Машерова

Поступила в редакцию 27.03.2015