УДК 512.542

О РЕШЕТОЧНЫХ СВОЙСТВАХ РАЗРЕШИМЫХ ТОТАЛЬНО ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

канд. физ.-мат. наук, доц. Н.Н. ВОРОБЬЕВ, А.А. ЦАРЕВ
(Витебский государственный университет им. П.М. Машерова)

Исследуется решетка разрешимых тотально локальных классов Фиттинга. Найдены новые свойства решеточных операций, связанные с произведением разрешимых тотально локальных классов Фиттинга. В частности, установлено, что оператор $\vee^{\infty}$ может быть определен рекурсивно посредством операций произведения и пересечения разрешимых тотально локальных классов Фиттинга.

Все рассматриваемые группы конечны и разрешимы.

Напомним, что, если **P** – множество всех простых чисел, то функции вида

$$f : \mathbf{P} \to \{\text{классы Фиттинга}\}$$

называются функциями Хартли, или H-функциями [1].

Если для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ имеет место

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})} \cap \left(\cap_{p\in\pi(\mathfrak{F})} f(p)\mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_{p'} \right),$$

где f – некоторая H-функция, то говорят, что $\mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга с H-функцией f и пишут $\mathfrak{F} = LR(f)$ [1]. Здесь $\pi(\mathfrak{F})$ – множество всех простых делителей порядков всех групп из $\mathfrak{F}$, символы $\mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}$, $\mathfrak{S}_p$ и $\mathfrak{S}_{p'}$ обозначают класс всех $\pi(\mathfrak{F})$-групп, класс всех p-групп и класс всех p'-групп соответственно.

В работе [1] впервые начали изучаться кратно локальные классы Фиттинга. Всякий класс Фиттинга считается 0-кратно локальным, а при $n \geq 1$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется n-кратно локальным, если $\mathfrak{F} = LR(f)$, где все непустые значения H-функции f являются $(n-1)$-кратно локальными классами Фиттинга. Класс Фиттинга называется тотально локальным, если он n-кратно локален для всех натуральных n. Относительно включения $\subseteq$ множество всех тотально локальных классов Фиттинга образует решетку с операциями $\wedge^{\infty}$, $\vee^{\infty}$, которые для любых тотально локальных классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ определяются следующим образом:

$$\mathfrak{F} \wedge^{\infty} \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H},$$

$$\mathfrak{F} \vee^{\infty} \mathfrak{H} = l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}),$$

где символ $l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H})$ обозначает наименьший тотально локальный класс Фиттинга, содержащий классы $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ [2]. В дальнейшем вместо $l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H})$ будем применять символ $l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$.

В данной работе найдены новые свойства решеточных операций $\wedge^{\infty}$, $\vee^{\infty}$, связанные с произведениями тотально локальных классов Фиттинга. В частности, установлено, что оператор $\vee^{\infty}$ может быть определен рекурсивно посредством операций произведения и пересечения тотально локальных классов Фиттинга. Заметим, что справедливость аналогичных свойств была доказана ранее Рейфершейд [3] лишь для тотально локальных классов Фиттинга специального вида (классов π_i-групп, где $\pi_i \subseteq \mathbf{P}$).

Напомним, что неединичная группа G называется монолитической, если в ней имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа (монолит группы G). Символом $O_{\pi}(G)$ обозначается наибольшая нормальная π-подгруппа группы G. В частности, при $\pi = \{p\}$ вместо $O_{\pi}(G)$ пишут $O_p(G)$.

Известно, что произведение двух любых локальных классов Фиттинга является локальным классом Фиттинга [4]. Используя этот факт, легко показать, что справедлива

ЛЕММА 1. Произведение двух любых тотально локальных классов Фиттинга является тотально локальным классом Фиттинга.

Для доказательства основного результата нам понадобится следующее утверждение

ЛЕММА 2 [3, утверждение 3.2]. *Пусть* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ *– классы групп и* $\mathfrak{Y}$ *– нетривиальный тотально локальный класс Фиттинга. Тогда*

$$\mathfrak{Y}(\mathfrak{M} \vee^{\infty} \mathfrak{H}) = \mathfrak{Y} \circ \mathfrak{M} \vee^{\infty} \mathfrak{Y} \circ \mathfrak{H}.$$

Символом $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ обозначается произведение классов групп $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, т. е.

$$\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H} = (G \mid G \text{ обладает нормальной подгруппой } N \in \mathfrak{M},\ G / N \in \mathfrak{H}).$$

Произведение классов Фиттинга $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ обозначается $\mathfrak{MH}$, т. е.

$$\mathfrak{MH} = (G \mid G / G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}).$$

ТЕОРЕМА. *Пусть* $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_r, \mathfrak{Y}_1, \dots, \mathfrak{Y}_t, \mathfrak{Y}$ – *тотально локальные классы Фиттинга таковы, что* $\mathfrak{X}_1^2 = \mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1^2 = \mathfrak{Y}_1$. *Тогда*

$$\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_1(\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) \wedge^{\infty} \mathfrak{Y}_1(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_2 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}).$$

Доказательство. Очевидно

$$\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \cup \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y},$$

тогда

$$\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}_1(\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}). \tag{1}$$

Аналогично

$$\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_2 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}_1(\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}). \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует

$$\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \cup \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_2 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}_1(\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}).$$

Тогда, согласно лемме 1

$$\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y} \subseteq l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1(\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y})) = \mathfrak{X}_1(\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}). \tag{3}$$

Рассуждая аналогично, получим

$$\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Y}_1(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_2 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}). \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует

$$\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}_1(\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) \wedge^{\infty} \mathfrak{Y}_1(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_2 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}).$$

Докажем обратное включение индукцией по $r + t$.

Пусть $\pi_i = \pi(\mathfrak{X}_i)$ и $\sigma_j = \pi(\mathfrak{Y}_j)$ для всех $i \in \{1, \dots, r\}$ и $j \in \{1, \dots, t\}$. Пусть $r + t = 2$.

Покажем, что

$$\mathfrak{X}_1(\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}) \wedge^{\infty} \mathfrak{Y}_1(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}) \subseteq \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}.$$

Пусть G – группа минимального порядка, для которой включение неверно. Тогда G – монолитическая группа с монолитом M, причем $M \in \mathfrak{S}_p$ для некоторого простого числа p.

Так как $|G / M| < |G|$, то $G / M \in \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}$. Следовательно,

$$(G / M) / (O_p(G) / M) \cong G / O_p(G) \in \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y},$$

значит, $G \in \mathfrak{S}_p(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y})$.

Если $p \in \pi_1 \cap \sigma_1$, то по лемме 2

$$G \in \mathfrak{S}_p(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}) = \mathfrak{S}_p\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{S}_p\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}.$$

Противоречие.

Если $p \in \pi_1 \setminus \sigma_1$, то $O_{\sigma_1}(G) = 1$. Действительно, если $O_{\sigma_1}(G) \neq 1$, то ввиду $M \subseteq O_{\sigma_1}(G)$ имеем $p \in \sigma_1$, что противоречит выбору p. Поэтому $\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}$. Отсюда

$$G / O_p(G) \in \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y} = l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}.$$

Значит, $G \in \mathfrak{S}_p\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}$. Противоречие.

Если $p \in \sigma_1 \setminus \pi_1$, то, рассуждая аналогично, $O_{\pi_1}(G) = 1$.

Отсюда $G \in \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}$.

Противоречие.

Пусть $r + t > 2$. Покажем, что

$$\mathfrak{X}_1(\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) \wedge^{\infty} \mathfrak{Y}_1(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_2 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) \subseteq \mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}.$$

Пусть G – группа минимального порядка, для которой включение неверно.

Тогда G – монолитическая группа с монолитом M, причем $M \in \mathfrak{S}_p$ для некоторого простого числа p. Значит, $G \in \mathfrak{S}_p(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y})$.

Если $p \in \pi_1 \cap \sigma_1$, то по лемме 2

$$G \in \mathfrak{S}_p(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) = \mathfrak{S}_p\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{S}_p\mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}.$$

Противоречие.

Если $p \in \pi_1 \setminus (\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \ldots \cup \sigma_t)$, то $O_\sigma(G) = 1$ для $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \ldots \cup \sigma_t$. Поэтому $\mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}$.

Следовательно,

$$G / O_p(G) \in \mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y} = l^{\infty}\mathrm{Fit}(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y}.$$

Значит,

$$G \in \mathfrak{S}_p\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}.$$

Противоречие.

Если $p \in \sigma_1 \setminus (\pi_1 \cup \pi_2 \cup \ldots \cup \pi_r)$, то $O_\pi(G) = 1$ для $\pi = \pi_1 \cup \pi_2 \cup \ldots \cup \pi_r$. Отсюда

$$G \in \mathfrak{S}_p\mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_r\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_r\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{\infty} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}.$$

Противоречие.

Теорема доказана.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – S-замкнутые классы Фиттинга. Тогда

$$\mathfrak{F} \wedge^{s} \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H},$$

$$\mathfrak{F} \vee^{s} \mathfrak{H} = \mathrm{SFit}(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}),$$

где S-замкнутый класс Фиттинга, порожденный объединением классов $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$, обозначается

$$\mathrm{SFit}(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}) = \cap \{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X} – S\text{-замкнутый класс Фиттинга, } \mathfrak{X} \supseteq \mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1 [3, лемма 2.2.8]. *Пусть* $\pi_1, \ldots, \pi_r, \sigma_1, \ldots, \sigma_t$ *– нетривиальные множества простых чисел*; $\mathfrak{Y}$ *– некоторый S-замкнутый класс Фиттинга. Тогда*

$$\mathfrak{S}_{\pi_1} \ldots \mathfrak{S}_{\pi_r}\mathfrak{Y} \vee^{s} \mathfrak{S}_{\sigma_1} \ldots \mathfrak{S}_{\sigma_t}\mathfrak{Y} =$$

$$= \mathfrak{S}_{\pi_1}(\mathfrak{S}_{\pi_2} \ldots \mathfrak{S}_{\pi_r}\mathfrak{Y} \vee^{s} \mathfrak{S}_{\sigma_1} \ldots \mathfrak{S}_{\sigma_t}\mathfrak{Y}) \wedge^{s} \mathfrak{S}_{\sigma_1}(\mathfrak{S}_{\pi_1} \ldots \mathfrak{S}_{\pi_r}\mathfrak{Y} \vee^{s} \mathfrak{S}_{\sigma_2} \ldots \mathfrak{S}_{\sigma_t}\mathfrak{Y}).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть* $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_r, \mathfrak{Y}_1, \ldots, \mathfrak{Y}_t, \mathfrak{Y}$ *– S-замкнутые классы Фиттинга таковы, что* $\mathfrak{X}_1^2 = \mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1^2 = \mathfrak{Y}_1$. *Тогда*

$$\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{s} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_1(\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{s} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) \wedge^{s} \mathfrak{Y}_1(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee^{s} \mathfrak{Y}_2 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}).$$

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – тотально локальные формации. Тогда

$$\mathfrak{F} \wedge_{\infty} \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H},$$

$$\mathfrak{F} \vee_{\infty} \mathfrak{H} = l_{\infty}\,\mathrm{form}(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}),$$

где символом $l_{\infty}\mathrm{form}(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H})$ обозначается [1] пересечение всех тех тотально локальных формаций, которые содержат формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть* $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_r, \mathfrak{Y}_1, \ldots, \mathfrak{Y}_t, \mathfrak{Y}$ *– тотально локальные формации таковы, что* $\mathfrak{X}_1^2 = \mathfrak{X}_1$, $_1^2 = \mathfrak{Y}_1$. *Тогда*

$$\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee_{\infty} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_1(\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee_{\infty} \mathfrak{Y}_1 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}) \wedge_{\infty} \mathfrak{Y}_1(\mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_r\mathfrak{Y} \vee_{\infty} \mathfrak{Y}_2 \ldots \mathfrak{Y}_t\mathfrak{Y}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114 – 147.
2. Шеметков Л.А. О произведении формаций // Докл. АН БССР. – 1984. – Т. 28, № 2. – С. 101 – 103.
3. Reifferscheid S. A note on subgroup-closed Fitting classes of finite soluble groups // J. Group Theory. – 2003. – V. 6. – P. 331 – 345.
4. Воробьев Н.Т. Локальные произведения классов Фиттинга // Весці АН БССР. Сер. фіз.-матэм. навук. – 1991. – № 6. – С. 22 – 26.