УДК 512.622

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, г. Витебск, Беларусь

СВОЙСТВА СТРУКТУР ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ РЕЗУЛЬТАНТА МНОГОЧЛЕНА СО СВОЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПРИ НАЛИЧИИ КРАТНЫХ КОРНЕЙ

В классических и современных книгах, посвященных алгебре полиномов и способам отыскания нулей алгебраических полиномов, почти не уделяется внимание нахождению кратных корней полиномов в символьном виде. Там же практически отсутствуют явные аналитические формулы, выражающие значения кратного корня через коэффициенты. Основной трудностью для развития данного направления являлась высокая трудоемкость ручных вычислений. В XXI веке ситуация принципиально изменилась в связи с развитием систем компьютерной математики.

Основным исследуемым объектом в настоящей работе являются частные производные второго порядка от результанта двух многочленов комплексного аргумента, одним из которых является многочлен, имеющий кратный корень, а вторым – производная от этого многочлена. В работе авторов [1] рассмотрена идея получения семейств точных формул для кратных корней в виде рациональных функций от коэффициентов полинома, в основе которой лежит анализ частных производных от упоминаемого результанта по коэффициентам второго многочлена.

Напомним, что одним из определений результанта двух многочленов комплексного аргумента $f(z)=a_0\prod_{i=1}^{n}(z-\alpha_i)$ и $g(z)=b_0\prod_{j=1}^{m}(z-\beta_j)$ является произведение [2, с. 336]:

$$R = a_0^m g(\alpha_1) g(\alpha_2) \cdot \ldots \cdot g(\alpha_n) =$$

$$= (-1)^{mn} b_0^n f(\beta_1) f(\beta_2) \cdot \ldots \cdot f(\beta_m). \qquad (1)$$

Пусть $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$, а $g(z) = f'(z)$ – его производная.

Рассмотрим результант (1) многочлена с первой производной в виде

$$R = g_1 g_2 \cdots g_{n-1} g_n = g_1 g_2 \cdot \prod_{i=3}^{n} g_i ,$$

где $g_i \equiv b_0 z_i^{n-1} + b_1 z_i^{n-2} + \ldots + b_{n-2} z_i + b_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j z_i^{n-1-j}$ – значение производной на i-м корне многочлена. Тогда $\dfrac{\partial g_i}{\partial b_j} = z_i^{n-1-j}$ $(j = 0, 1, ..., n-1)$. Запишем семейство производных первого порядка $(j = 0, 1, ..., n-1)$ от результанта.

$$\frac{\partial R}{\partial b_j} = \frac{\partial}{\partial b_j}(g_1 g_2) \cdot \prod_{i=3}^{n} g_i + g_1 g_2 \frac{\partial}{\partial b_j} \prod_{i=3}^{n} g_i =$$

$$= \left(z_1^{n-1-j} g_2 + z_2^{n-1-j} g_1\right) \cdot \prod_{m=3}^{n} g_m + g_1 g_2 \frac{\partial}{\partial b_j} \prod_{i=3}^{n} g_i .$$

В случае единственного кратного корня $z_1 = z_2 = w$, $g_1 = g_2 = 0$ как значение производной на кратном корне, а $g_m \neq 0$ $(m = 3, 4, \ldots, n)$. Видим, что все частные производные первого порядка по коэффициентам b_j равны нулю.

Вычислим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial b_j \partial b_k} = \frac{\partial}{\partial b_k}\left(\frac{\partial R}{\partial b_j}\right) = \frac{\partial}{\partial b_k}\left(z_1^{n-1-j} g_2 + z_2^{n-1-j} g_1\right) \cdot \prod_{m=3}^{n} g_m +$$

$$+ \left(z_1^{n-1-j} g_2 + z_2^{n-1-j} g_1\right) \frac{\partial}{\partial b_k} \prod_{m=3}^{n} g_m + \frac{\partial}{\partial b_k}(g_1 g_2) \cdot \frac{\partial}{\partial b_j} \prod_{m=3}^{n} g_m +$$

$$+ g_1 g_2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial b_j \partial b_k} \prod_{m=3}^{n} g_m = \left(z_1^{n-1-j} z_2^{n-1-k} + z_2^{n-1-j} z_1^{n-1-k}\right) \prod_{m=3}^{n} g_m +$$

$$+\left(z_1^{n-1-j}g_2+z_2^{n-1-j}g_1\right)\cdot\frac{\partial}{\partial b_k}\prod_{m=3}^{n}g_m+$$

$$+\left(z_1^{n-1-k}g_2+z_2^{n-1-k}g_1\right)\cdot\frac{\partial}{\partial b_j}\prod_{m=3}^{n}g_m+g_1g_2\cdot\frac{\partial^2}{\partial b_j\partial b_k}\prod_{m=3}^{n}g_m.$$

Подставим в последнее выражение $z_1=z_2=w$, $g_1=g_2=0$. Тогда все слагаемые, кроме первого, равны нулю. В итоге

$$\frac{\partial^2 R}{\partial b_j\partial b_k}=2w^{2(n-1)-(j+k)}\prod_{m=3}^{n}g_m\quad\left(j,k=0,1,\ldots,n-1\right).$$

Для удобства восприятия этот результат удобно представить в виде матрицы из вторых частных производных. Например, пусть $f(z)=(z-w)^2(z-z_3)$, $g(z)=b_0z^2+b_1z+b_2$. Тогда

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 R}{\partial b_0^2} & \frac{\partial^2 R}{\partial b_0\partial b_1} & \frac{\partial^2 R}{\partial b_0\partial b_2}\\ \frac{\partial^2 R}{\partial b_1\partial b_0} & \frac{\partial^2 R}{\partial b_1^2} & \frac{\partial^2 R}{\partial b_1\partial b_2}\\ \frac{\partial^2 R}{\partial b_2\partial b_0} & \frac{\partial^2 R}{\partial b_2\partial b_1} & \frac{\partial^2 R}{\partial b_2^2}\end{pmatrix}=2g_3\begin{pmatrix}w^4 & w^3 & w^2\\ w^3 & w^2 & w\\ w^2 & w & 1\end{pmatrix}.$$

Литература

1. *Чернявский М.М., Трубников Ю.В.* Модификация формул Эйткена и алгоритмы аналитического нахождения кратных корней полиномов // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2021. – № 1 (110). – С. 13–25.
2. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – СПб.: Лань, 2013.