УДК 517.9

С.М. Бородич

*Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,
г. Витебск, Беларусь*

О ПОВЕДЕНИИ ПРИ $t \to +\infty$ РЕШЕНИЙ ОДНОГО НЕАВТОНОМНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ $(n \ge 1)$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассматривается неавтономное параболическое уравнение

$$\partial_t u = a(t)\Delta u - f(u,t) - g(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{1}$$

с граничным условием

$$u\big|_{x\in\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где

$$a(t) \in C([0,+\infty)), \quad f(u,t) \in C^{1,0}(\mathbf{R} \times [0,+\infty)),$$
$$g(x,t) \in L_\infty([0,+\infty); L_2(\Omega)).$$

Предполагаем, что выполнены условия

$$a(t) \ge \alpha > 0, \quad \lim_{t\to+\infty} a(t) = \tilde{a} \quad (\tilde{a} < +\infty),$$
$$\lim_{t\to+\infty} f(u,t) = \tilde{f}(u), \quad \tilde{f}(u) \in C^1(\mathbf{R}),$$
$$C_0 |u|^p - C \le f(u,t)u \le C(|u|^p + 1),$$
$$p > 2, \quad C_0 > 0, \quad f'_u(u,t) \ge -C, \quad \tilde{f}'(u) \ge -C,$$
$$|f(u,t) - \tilde{f}(u)| \le k(t)(|u|^{p-1} + 1), \quad k(t) \in C([0,+\infty)), \quad \lim_{t\to+\infty} k(t) = 0,$$
$$|g(x,t)| \le h(x), \quad h(x) \in L_2(\Omega), \quad \lim_{t\to+\infty} g(x,t) = \tilde{g}(x).$$

Стандартными методами (см. [1]) устанавливается, что задача (1), (2) порождает в пространстве $E = L_2(\Omega)$ семейство эволюционных операторов $\{S_{t,\tau}, t \ge \tau \ge 0\}$:

$$S_{t,\tau} : u_0 \to u(t),$$

где $u_0 \in E$, $u(t)$ – решение задачи (1), (2) с начальным условием $u\big|_{t=\tau} = u_0$.

Для любых непустых множеств $X, Y \subset E$ положим $dist(X,Y) = \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} \| x - y \|$ ($\| \cdot \|$ – норма в E).

Максимальным аттрактором семейства $\{S_{t,\tau}\}$ называем такое компактное в E множество $\mathcal{A}$, которое притягивает при $t \to +\infty$ траекторию $S_{t,0}B$ любого ограниченного в E множества B (т. е. $dist(S_{t,0}B, \mathcal{A}) \to 0$ при $t \to +\infty$) и содержится в любом другом компактном множестве, обладающем таким же свойством притяжения.

Автономное уравнение

$$\partial_t v = \tilde{a}\Delta v - \tilde{f}(v) - \tilde{g}(x), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{3}$$

с граничным условием

$$v\big|_{x\in\partial\Omega} = 0 \tag{4}$$

порождает в E полугруппу операторов $\{S_t, t \ge 0\}$:

$$S_t : v_0 \to v(t),$$

где $v_0 \in E$, $v(t)$ – решение задачи (3), (4) с начальным условием $v\big|_{t=0} = v_0$.

Предположим, что полугруппа $\{S_t\}$ имеет конечное множество стационарных точек $\{z_1, \dots, z_N\}$. Обозначим через $M^H(z_i)$ $(i = 1, \dots, N)$ совокупность всех точек пространства E, через которые проходят траектории $v(t) = S_t v_0$, продолжаемые для всех $t \le 0$ и удовлетворяющие условию: $v(t) \to z_i$ в E при $t \to -\infty$.

Теорема. Семейство эволюционных операторов $\{S_{t,\tau}\}$, порожденное задачей (1), (2), обладает максимальным аттрактором $\mathcal{A}$, причем:

1) $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{N} M^H(z_i)$;

2) множество $\mathcal{A}$ строго инвариантно относительно операторов полугруппы $\{S_t\}$, т. е. $S_t\mathcal{A} = \mathcal{A} \quad \forall t \geq 0$.

Литература

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972.