Известия вузов. Математика
2022, №11, с. 1–7

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Н.Т. ВОРОБЬЕВ, Е.Д. ЛАНЦЕТОВА

О ГИПОТЕЗЕ ЛОКЕТТА ДЛЯ σ-ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Аннотация. В настоящей работе найдены семейства обобщенно локальных классов Фиттинга, для которых справедлива гипотеза Локетта. Доказано, что каждый обобщенно локальный класс Фиттинга определяется как пересечение класса Локетта и некоторого нормального класса Фиттинга.

Ключевые слова: класс Фиттинга, σ-локальный класс Фиттинга, гипотеза Локетта.

УДК: 512.542

DOI:

Введение

В работе рассматриваются только конечные группы, если не оговорено противное. В определениях и обозначениях следуем [1]. Совокупность групп $\mathfrak{X}$, которая наряду с каждой своей группой содержит и все ей изоморфные группы, называют *классом групп*. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга, то в любой группе G существует наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа, которую называют *$\mathfrak{F}$-радикалом* G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Центральное место в теории классов Фиттинга занимают исследования структуры классов Фиттинга, которые связаны с применением операторов Локетта «*» и «$_*$»(см. [2], а также главы [1, X-XI]). Напомним, что для каждого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ оператор «*» сопоставляет наименьший класс Фиттинга $\mathfrak{F}^*$, содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что $(G\times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*}\times H_{\mathfrak{F}^*}$ для всех групп G и H и оператор «$_*$» сопоставляет $\mathfrak{F}$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}_* = \cap\{\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга и $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*\}$. Для любого непустого класса Фиттинга справедливы включения [1, теорема X.1.15]

$$\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*. \tag{1}$$

Класс Фиттинга называют *нормальным* в классе $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ и для любой группы $G \in \mathfrak{S}$ ее $\mathfrak{F}$-радикал является максимальной из подгрупп G, принадлежащих $\mathfrak{F}$. Заметим, что если $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга разрешимых групп, то $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{S}_*$ [1, предложение X.1.18], где $\mathfrak{S}_*$ — наименьший неединичный нормальный класс Фиттинга разрешимых групп и $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{S}$ [2, теорема 2.2(c)] для любого неединичного нормального класса Фиттинга $\mathfrak{X}$. Это определяет включения

$$\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}. \tag{2}$$

Поступила в редакцию _._.202_, после доработки _._.202_. Принята к публикации _._.202_.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы научных исследований Республики Беларусь "Конвергенция–2025".

Сравнение (1) и (2) приводит к следующей проблеме, которая была сформулирована Локеттом и известна в теории классов групп под названием

Гипотеза Локетта [2, проблема стр. 135]. *Верно ли, что для каждого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ существует нормальный класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ такой, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{X}$?*

Очевидно, каждый разрешимый нормальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта, поскольку ввиду [1, теорема X.3.7] любой неединичный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является нормальным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}$. В работе [3] Брайсом и Косси было установлено, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в точности тогда, когда выполняется равенство

$$\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{S}_*. \tag{3}$$

Там же было доказано, что равенство (3) справедливо для всех локальных наследственных классов Фиттинга, т.е. классов Фиттинга, замкнутых относительно взятия подгрупп. В последующем Бейдлеманом и Хауком [4] была подтверждена гипотеза Локетта для локальных классов Фиттинга вида $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$, где $\mathfrak{X}$ — произвольный непустой класс Фиттинга. Справедливость гипотезы Локетта для любого локального класса Фиттинга была установлена Воробьевым [5]. Дерком и Хоуксом [1, теорема X.6.1] было показано, что гипотеза Локетта справедлива и для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в универсуме $\mathfrak{E}$ всех групп тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{E}_*. \tag{4}$$

Галлего [6] было доказано, что равенство (4) верно в случае, когда $\mathfrak{F}$ — локальный класс Фиттинга. Вместе с тем, Пинзом был построен пример класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, для которого $\mathfrak{F}_* \neq \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{E}_*$ (см. [7, пример 4.1]). Это приводит к задаче *описания семейств классов Фиттинга групп, в общем случае неразрешимых, для которых справедлива гипотеза Локетта.* В настоящей работе такая задача решена для обобщенно локальных классов Фиттинга.

Ориентиром для таких исследований является σ-метод, предложенный Скибой [8], для изучения строения групп и формаций (см., также, [9]–[11]), который был дуализирован для классов Фиттинга в работе [12] и состоит в следующем.

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Символом $\pi(n)$ обозначим множество всех простых делителей числа n, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых делителей группы G. Пусть σ — некоторое разбиение $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, $\mathbb{P} = \cup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Если $\mathfrak{F}$ — класс групп, то символом $\sigma(\mathfrak{F})$ обозначают множество $\sigma(\mathfrak{F}) = \cup\{\sigma(G) : G \in \mathfrak{F}\}$.

Всякое отображение вида $f : \sigma \to \{$ классы Фиттинга$\}$ называется *σ-функцией Хартли* или просто *H_σ-функцией.* Если f — H_σ-функция, то символом $Supp(f)$ обозначают носитель f, т.е. множество всех $\sigma_i \in \sigma$ таких, что $f(\sigma_i) \neq \emptyset$.

Пусть $LR_\sigma(f) = (G : G = 1$ или $G \neq 1$ и $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G))$, где $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ — классы всех σ_i-групп и всех σ_i'-групп соответственно, символом $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}}$ обозначен $\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$-корадикал группы G — наименьшая нормальная подгруппа G, факторгруппа по которой σ_i-замкнута.

Определение 1. [12] Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *σ-локальным*, если $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ для некоторой H_σ-функции f. В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, ...\}$, то $\mathfrak{F}$ называют *локальным* классом Фиттинга. В случае $\sigma = \sigma^1$ мы будем использовать символ $LR(f)$ вместо $LR_\sigma(f)$ и H_{σ_1}-функцию будем называть H-функцией.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Каждый σ-локальный класс Фиттинга удовлетворяет гипотезе Локетта.*

1. Предварительные сведения

Напомним, что *произведением* $\mathfrak{FH}$ *классов групп* $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс групп $(G : \exists N \trianglelefteq G, N \in \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{F})$; *произведением* $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ *классов Фиттинга* $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс групп $(G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Хорошо известно, что если $\mathfrak{H}$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов, то $\mathfrak{FH} = \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ (см. [1, стр. 566]). Более того, произведение двух любых классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна [1, теорема IX.1.12(a), (c)].

Лемма 1. [13, лемма 2.3] *Если* $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ *и* $\mathfrak{H}$ *— классы Фиттинга, то* $\mathfrak{H} \diamond (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2) = \mathfrak{H} \diamond \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{H} \diamond \mathfrak{F}_2$.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *радикальным гомоморфом*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно гомоморфных образов. Радикальный гомоморф $\mathfrak{H}$ называется *насыщенным*, если $G \in \mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{H}$, где $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G.

Следующие свойства операторов Локетта «*» и «$_*$» представляет

Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *— классы Фиттинга. Тогда*

1) $(\mathfrak{F}_*)_* = \mathfrak{F}_* = (\mathfrak{F}^*)_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F}_*)^* = (\mathfrak{F}^*)^*$ [1, теорема X.1.15];

2) если $\mathfrak{H}$ *— насыщенный радикальный гомоморф, то* $(\mathfrak{FH})^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{H}$ [5, лемма 3];

3) если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, *то* $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{H}_*$ [3, следствие 3.5].

Мы будем использовать общепринятые обозначения $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{E}$ для класса всех разрешимых и класса всех групп соответственно.

Если σ — разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$ и $\Pi \subseteq \sigma$, то подгруппу H группы G называют Π-*группой*, если $|H|$ — Π-число, т.е. $\pi(|H|) \subseteq \cup_{\sigma_i \in \Pi}\sigma_i$. Символом $\mathfrak{E}_\Pi$ будем обозначать класс всех Π-групп.

Лемма 3. [12, лемма 3.1] *Пусть* $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ *и* $\Pi = Supp(f)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$;
2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\Pi \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'})$.

Мы будем использовать следующую классификацию H_σ-функций σ-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, предложенную в работе [12].

Пусть $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ для H_σ-функции f и $\Pi = Supp(f)$. Тогда H_σ-функция f называется:

1) *внутренней*, если $f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$;
2) *полной* в случае, когда $f(\sigma_i) = f(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$;
3) *полной внутренней*, если f является одновременно полной и внутренней H_σ- функцией.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *классом Локетта*, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.

Лемма 4. [12, теорема 1.1] *Каждый σ-локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется единственной полной внутренней H_σ-функцией F такой, что $F(\sigma_i) = F(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}$ и $F(\sigma_i)$ — класс Локетта для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$.*

Функцию F называют *каноническим* σ-локальным заданием класса $\mathfrak{F}$.

Лемма 5. [12, теорема 1.2] *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — σ-локальные классы Фиттинга. Тогда произведение $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ является σ-локальным классом Фиттинга.*

Лемма 6. [12, следствие 3.4] *Для любого разбиения σ множества $\mathbb{P}$ σ-локальный класс Фиттинга является классом Локетта.*

Лемма 7. [12, предложение 7.3] *Пересечение любого непустого множества σ-локальных классов Фиттинга является σ-локальным классом Фиттинга.*

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} = Fit(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H})$, где $Fit(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H})$ — наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}$.

Для любого σ-локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ справедлива следующая модификация результата Галлего (см. [6, следствие 4.11]):

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{F}$ — σ-локальный класс Фиттинга, определяемый канонической H_σ-функцией F. Если $(\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \cap \mathfrak{F}) \vee F(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i} = \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{E}_* \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ для любого $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$.*

2. Основной результат

Лемма 9. *Если $\mathfrak{X}$ — непустой класс Фитинга, то $\mathfrak{X}\mathfrak{E}_\pi\mathfrak{E}_{\pi'}$ — класс Локетта для любого $\pi \subseteq \mathbb{P}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\mathfrak{E}_\pi\mathfrak{E}_{\pi'}$. Ввиду леммы 6 достаточно выяснить, что $\mathfrak{F}$ локален. Заметим, что если $\pi = \mathbb{P}$ или $\pi = \emptyset$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$ и $\mathfrak{F} = LR(f)$ для H-функции f такой, что $f(p) = \mathfrak{E}$ для всех простых $p \in \mathbb{P}$. Пусть $\emptyset \subset \pi \subset \mathbb{P}$. Построим H-функцию f следующим образом:

$$f(p) = \begin{cases} \mathfrak{X}\mathfrak{E}_\pi, & \text{если } p \in \pi, \\ \mathfrak{F}, & \text{если } p \in \pi'. \end{cases}$$

Тогда $LR(f) = (\cap_{p\in\pi}\mathfrak{X}\mathfrak{E}_\pi\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}) \cap (\cap_{p\in\pi'}\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})$. Поскольку $\mathfrak{E}_\pi\mathfrak{N}_p = \mathfrak{E}_\pi$ для всех $p \in \pi$ и $\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{E}_{\pi'}$ для всех $p \in \pi'$, по лемме 1 $LR(f) = \mathfrak{X}\mathfrak{E}_\pi(\cap_{p\in\pi}\mathfrak{E}_{p'}) \cap \mathfrak{F}(\cap_{p\in\pi'}\mathfrak{E}_{p'})$. Следовательно, $LR(f) = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}\mathfrak{E}_\pi = \mathfrak{F}$ и класс $\mathfrak{F}$ локален.

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — σ-локальный класс Фиттинга, определяемый канонической H_σ-функцией F. Тогда по утверждениям 1) и 2) леммы 3 $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\Pi \cap (\cap_{\sigma_i \in \Pi} F(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'})$, где $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$. Ввиду леммы 4

$$F(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq F(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma_i'} = F(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}. \tag{5}$$

для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$.

Вначале покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Поскольку класс групп $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ является насыщенным радикальным гомоморфом, по утверждению 2) леммы 2 $(\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i})^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Так как по лемме 6 $\mathfrak{F}$ — класс Локетта, то $(\mathfrak{F})^*\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i} = \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Следовательно, справедливо равенство

$$(\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i})^* = \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}. \tag{6}$$

По лемме 5 класс $\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ является классом Локетта, т.е. $(\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i})^* = \mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$. Тогда ввиду (6) $\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i} = \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и включение $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ доказано.

Таким образом, $G/G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и, учитывая (5), $G/G_{F(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ для всех $G \in \mathfrak{F}$ и $\sigma_i \in \Pi$. Поскольку, $G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} \in \mathfrak{F}$, $G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'}} = G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \cap \mathfrak{F}}$. Так как классы групп $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ — гомоморфы, то ввиду изоморфизмов

$$(G/G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'}})/(G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \cap \mathfrak{F}}G_{F(\sigma_i)}/G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'}}) \cong G/G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \cap \mathfrak{F}}G_{F(\sigma_i)}$$

и

$$(G/G_{F(\sigma_i)})/(G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \cap \mathfrak{F}}G_{F(\sigma_i)}/G_{F(\sigma_i)}) \cong G/G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \cap \mathfrak{F}}G_{F(\sigma_i)},$$

группа $G/G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \cap \mathfrak{F}}G_{F(\sigma_i)} \in \mathfrak{E}_{\sigma_i} \cap \mathfrak{E}_{\sigma_i'} = (1)$. Следовательно, $G = G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \cap \mathfrak{F}}G_{F(\sigma_i)}$. Поскольку $G_{\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \cap \mathfrak{F}} \in (\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \cap \mathfrak{F}) \vee F(\sigma_i)$ и $G_{F(\sigma_i)} \in (\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \cap \mathfrak{F}) \vee F(\sigma_i)$, $G \in (\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \cap \mathfrak{F}) \vee F(\sigma_i)$.

Значит, имеет место включение $\mathfrak{F} \subseteq (\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \cap \mathfrak{F}) \vee F(\sigma_i)$. Из (5) и $\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$ следует справедливость обратного включения.

Таким образом, $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'} \cap \mathfrak{F}) \vee F(\sigma_i)$ и по лемме 8 для всех $\sigma_i \in \Pi$ получаем

$$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{E}_* \subseteq \mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'}. \tag{7}$$

Так как по лемме 6 класс $\mathfrak{F}$ — класс Локетта, для завершения доказательства достаточно выяснить справедливость равенства

$$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{E}_* = \mathfrak{F}_*. \tag{8}$$

Ввиду утверждения 3) леммы 2 $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{E}_*$ и $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{E}_*$. Докажем обратное включение. Предположим, что оно не верно и G — группа минимального порядка из класса $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{E}_*) \setminus \mathfrak{F}_*$. Тогда G имеет единственную максимальную подгруппу M такую, что $M = G_{\mathfrak{F}_*}$. Так как группа $G \in \mathfrak{F}$, то $\sigma(G) \subseteq \sigma(\mathfrak{F}) = \Pi$ по утверждению 1 леммы 3. Следовательно, $G \in \mathfrak{E}_\Pi$. Поскольку класс $\mathfrak{E}_\Pi$ — гомоморф, $G/M \in \mathfrak{E}_\Pi$. С другой стороны, ввиду (7) из $G \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{E}_*$ получаем $G \in \mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$. Следовательно, по лемме 1 $G \in \cap_{\sigma_i \in \Pi}\mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\sigma_i'} = \mathfrak{F}_*(\cap_{\sigma_i \in \Pi}\mathfrak{E}_{\sigma_i'}) = \mathfrak{F}_*\mathfrak{E}_{\Pi'}$. Таким образом, $G/M \in \mathfrak{E}_\Pi \cap \mathfrak{E}_{\Pi'} = (1)$ и $G = G_{\mathfrak{F}_*}$. Полученное противоречие доказывает равенство (8).

Теорема доказана.

3. Следствия

Следствие 1. Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — σ-локальные классы Фиттинга, то для произведения $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ справедлива гипотеза Локетта, т.е. $(\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H})_* = (\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H})^* \cap \mathfrak{E}_*$.

Доказательство. По лемме 5 класс $\mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H}$ σ-локален и утверждение вытекает из теоремы 1. □

В случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{p\}, \{q\}, ...\}$ — минимальное разбиение множества $\mathbb{P}$, получаем

Следствие 2. (Галлего, [6]) Каждый локальный класс Фиттинга удовлетворяет гипотезе Локетта в универсуме $\mathfrak{E}$ всех групп.

Следствие 3. (Воробьев, [5, теорема]) Каждый локальный класс Фиттинга разрешимых групп удовлетворяет гипотезе Локетта.

В работе Лауэ [14] была сформулирована следующая проблема, известная в теории классов как

Гипотеза Лауэ[14, Проблема II]. *Верно ли, что если $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}_* \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_*$?*

Данная гипотеза подтверждена в работе Бергера [15, теорема 3.1]. Из теоремы 1 следует простое альтернативное доказательство теоремы Дерка-Хоукса [1, теорема X.6.15] и результата Бергера для пары классов $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{E}$, которое представляет

Следствие 4. Для пары классов Фиттинга $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{E}$ справедлива гипотеза Локетта и гипотеза Лауэ, т.е. $\mathfrak{S}_* = \mathfrak{S}^* \cap \mathfrak{E}_* = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{E}_*$.

Доказательство. Справедливость гипотез вытекает из теоремы 1, поскольку класс $\mathfrak{S}$ является локальным классом Фиттинга и по лемме 6 является классом Локетта. □

В "Коуровской тетради"[16] Лауш предложил следующую проблему.

Проблема Лауша [16, вопрос 8.30]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — разрешимые классы Фиттинга такие, что $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}_* = \mathfrak{F}_*$ и $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{S}_* = \mathfrak{H}_*$. Верно ли равенство $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{S}_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*$?*

Утвердительный ответ на проблему Лауша был получен для разрешимых локальных классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ Воробьевым [6]. Положительное решение вопроса Лауша в универсуме $\mathfrak{E}$ всех групп для σ-локальных классов Фиттинга дает

Следствие 5. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — σ-локальные классы Фиттинга, удовлетворяющие гипотезе Локетта. Тогда $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ удовлетворяет гипотезе Локетта и $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{E}_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*$.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — σ-локальные классы Фиттинга, по лемме 7 $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ — σ-локальный класс Фиттинга. Тогда по теореме 1 $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ удовлетворяет гипотезе Локетта. Кроме того, ввиду леммы 6, $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ — класс Локетта. Следовательно, $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})^* \cap \mathfrak{E}_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{E}_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*$. □

Замечание 1. (а) Теорема 1 верна и в случае обобщенного варианта гипотезы Локетта (см. [1, предложение X.6.1]). *Если классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ таковы, что $\mathfrak{F}$ — σ-локален, $\mathfrak{H}$ — класс Фишера и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}$ удовлетворяет обобщенной гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$, т.е. $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}_*$.* Доказательство этого утверждения легко осуществить с учетом очевидных изменений, следуя доказательству теоремы 1.

(б) Заметим, что следствиями теоремы 1 являются указанные во введении результаты, подтверждающие гипотезу Локетта, полученные Брайсом и Косси [3, теорема 3.6], Бейдлеманом и Хауком [4, следствие 1].

(в) Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *классом Фишера*, если из того, что $K \leq H \leq G \in \mathfrak{F}$, $K \trianglelefteq \trianglelefteq G$ и $H/K \in \mathfrak{E}_p$ для некоторого простого p, всегда следует $H \in \mathfrak{F}$. В работе Бергера и Косси [17] построен пример класса Локетта разрешимых групп, который не является классом Фишера, опровергающий в общем случае гипотезу Локетта. В связи с этим представляет интерес следующий вопрос, сформулированный первым автором работы.

Вопрос [18, проблема 11.15]. *Верно ли, что каждый класс Фишера (в частности, состоящий из разрешимых групп) удовлетворяет гипотезе Локетта?*

Литература

[1] Doerk K., Hawkes T. *Finite Soluble Groups* (Walter de Gruyter & Co., Berlin-New York, 1992).

[2] Lockett F.P. *The Fitting class $\mathfrak{F}^*$*, Math. Z. **137** (2), 131–136 (1974).

[3] Bryce R.A., Cossey J. *A problem in the Theory of Normal Fitting Classes*, Math. Z. **141**, 99–110 (1975).

[4] Beidleman J.C., Hauck P. *Über Fittingklassen und die Lockett-Vermuntung*, Math. Z. **167** (2), 161–167 (1979).

[5] Воробьев Н.Т. *О радикальных классах конечных групп с условием Локетта*, Мат. зам. **43** (2), 161–168 (1988).

[6] Gallego M.P. *Fitting pairs from direct limits and the Lockett conjecture*, Comm. Algebra. **24** (6), 2011–2023 (1996).

[7] Pense J. *Fittingmengen und Lockettabschnitte*, J. Algebra. **133**, 168–181 (1990).

[8] Skiba A.N. *On one generalization of the local formations*, PFMT **1(34)**, 79–82 (2018).

[9] Skiba A.N. *A generalization of a Hall theorem*, J. Algebra and Appl. **15** (5), 21–36 (2015).

[10] Skiba A.N. *Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups*, J. Algebra **495**, 114–129 (2018).

[11] Skiba A.N. *On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets*, J. Algebra **550** (5), 69–85 (2020).

[12] Guo W., Zhang L., Vorob'ev N.T. *On σ-local Fitting classess*, J. Algebra **542** (15), 116–129 (2020).

[13] Guo W., Shum K.P., Vorob'ev N.T. *Problems related to the Lockett Conjecture on Fitting classes of finite groups*, Indag. Mathem. N.S. **19** (3), 391–399 (2008).

[14] Laue H. *Über nichtauflösbare normale Fittingklassen*, J. Algebra. **45**, 274–283 (1977).

[15] Berger T.R. *Normal Fitting pairs and Lockett's conjecture*, Math. Z. **163**, 125–132 (1978).

[16] *Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). 18-е изд., дополненное* (Ин-т математики СО РАН, Новосибирск, 2014).

[17] Berger T.R., Cossey J. *An Example in the theory of Normal Fitting classes*, Math. Z. **154** (3), 287–293 (1977).

[18] Guo W. *Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups* ((Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2015).

Николай Тимофеевич Воробьев

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова,
Московский пр., д. 33, г. Витебск, 210038, Республика Беларусь,