О методах построения σ-классов Хартли[1]

Ланцетова Е.Д.
Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, Витебск, Беларусь
ekaterina.lancetova@gmail.com

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. В терминологии и обозначениях мы следуем [1].

σ-Метод изучения строения групп и их классов был предложен А. Н. Скибой [2–5] и состоит в следующем. Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Символом $\pi(n)$ обозначим множество всех простых делителей числа n, $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых делителей группы G. Пусть σ — некоторое разбиение $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, $\mathbb{P} = \cup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Если $\mathfrak{X}$ — класс групп, то $\sigma(\mathfrak{X}) = \cup\{\sigma(G) : G \in \mathfrak{X}\}$. Этот метод был дуализирован в [6].

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп.

Функциональный подход к изучению структуры классов Фиттинга был впервые предложен Хартли [7].

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга. Тогда в любой группе G существует наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа, которую называют *$\mathfrak{F}$-радикалом* G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$. *Произведением* классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Хорошо известно, что произведение двух любых классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна [1, теорема IX.1.12(a), (c)].

Следуя [6], всякое отображение вида $h : \sigma \to \{$ классы Фиттинга$\}$ назовем *σ-функцией Хартли* или просто *H_σ-функцией*. Пусть $LH_\sigma(h) = (G : G = 1$ или $G \neq 1$ и $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G))$, где $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ — классы всех σ_i-групп и всех σ_i'-групп соответственно; символом $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}}$ обозначают $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$-корадикал группы G — наименьшую нормальную подгруппу G, факторгруппа по которой σ_i-замкнута.

Определение. Класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ назовем *σ-классом Хартли*, если $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ для некоторой H_σ-функции h. В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, ...\}$, то $\mathfrak{H}$ называют *классом Хартли* [7].

Пусть $\Pi = \{\sigma_i : h(\sigma_i) \neq \emptyset\}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ — σ-класс Хартли, определяемый H_σ-функцией h. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$*;*

2) $G \in \mathfrak{H}$ *в том и только том случае, если* $G \in h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ *для всех* $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$

3) $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}_\Pi \cap (\cap_{\sigma_i\in\Pi} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i})$.

Пусть h — H_σ-функция σ-класса Хартли $\mathfrak{H}$. Тогда h назовем:

1) *приведенной*, если $h(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$;

2) *устойчивой* [8], если $h(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_j)\mathfrak{E}_{\sigma_j'}$ для всех $i \neq j$;

3) *устойчивой приведенной*, если h является одновременно устойчивой и приведенной H_σ-функцией.

Следующая теорема описывает общие методы построения σ-класса Хартли при помощи H_σ-функций.

Теорема 2. *Любой σ-класс Хартли $\mathfrak{H}$ определяется устойчивой приведенной H_σ-функцией.*

Список литературы

[1] K. Doerk, T. Hawkes. Finite Soluble Groups. New-York: Walter de Gruyter, 1992.

[1] Исследование выполнено при поддержке Белорусского республиканского фонда научных исследований (грант № Ф21М-030, № государственной регистрации 20213279).

[2] A. N. Skiba. On one generalization of the local formations. *ПФМТ*, **34**: 1 (2018), 79–82.

[3] A. N. Skiba. A generalization of a Hall theorem. *J. Algebra and Appl.*, **15**: 5 (2015), 21–36.

[4] A. N. Skiba. Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups. *J. Algebra*, **495** (2018), 114–129.

[5] A. N. Skiba. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets. *J. Algebra*, **550** (2020), 69–85.

[6] W. Guo, L. Zhang, N.T. Vorob'ev. On σ-local Fitting classes. *J. Algebra*, **542** (2020), 116–129.

[7] B. Hartley. On Fischer's dualization of formation theory. *Proc. London Math. Soc.*, **3**: 2 (1969), 193–207.

[8] Н. Т. Воробьев, Т. Б. Караулова. Множества Хартли и инъекторы конечной группы. *Мат. заметки*, **105**: 2 (2019), 214–227.