Об аналоге гипотезы Шеметкова для фиттинговых множеств[1]

Караулова Т.Б., Воробьёв Н.Т.
Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, Витебск, Беларусь
tatyana.vasilevich.1992@mail.ru, ntvorobyov@mail.ru

В работе рассматриваются только конечные группы. В терминологии и обозначениях мы следуем [1, 2]. Следуя [3], группу G будем называть E_π-группой, если в G имеется хотя бы одна холлова π-подгруппа, и C_π-группой, если G является E_π-группой и любые две холловы π-подгруппы G сопряжены. Если $\mathfrak{F}$ — класс групп, то $C_\pi\mathfrak{F}$ — класс $C_\pi \cap E_\pi\mathfrak{F}$. Шеметковым Л. А. была сформулирована следующая

Проблема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Доказать, что $C_\pi\mathfrak{F}$ — локальная формация* (см. [4], проблема 19).

Напомним, что множество $\mathcal{F}$ подгрупп группы G называют фиттинговым множеством G [5], когда выполняются следующие условия:

(1) если $T \trianglelefteq S \in \mathcal{F}$, то $T \in \mathcal{F}$;

(2) если $S, T \in \mathcal{F}$ и $S, T \trianglelefteq ST$, то $ST \in \mathcal{F}$;

(3) если $S \in \mathcal{F}$ и $x \in G$, то $S^x \in \mathcal{F}$.

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. При этом, $\Pi \subseteq \sigma$ и $\Pi^{'} = \sigma \setminus \Pi$. Обозначим через $\mathfrak{S}_\Pi$ класс всех Π-разрешимых групп. Следуя [6], группу G назовем Π-разрешимой, если каждый главный фактор группы G либо $\Pi^{'}$-группа, либо σ_i-группа для некоторого $\sigma_i \in \Pi$. Подгруппа H группы G называется холловой Π-подгруппой группы G, если H является Π-подгруппой G и $\mid G : H \mid$ — $\Pi^{'}$-число.

В этом направлении исследований в теории классов известны результаты П. Хаука [7], В. Го и Б. Ли [8], Н. Т. Воробьева и В. Н. Загурского [9], Е. Н. Залесской и С. Н. Воробьева [10], А. Ф. Васильева и Л. А. Шеметкова [11].

Определение. *Пусть Π — подмножество множества σ и $\mathcal{F}$ — фиттингово множество Π-разрешимой группы G. Обозначим через $\mathcal{C}_\Pi(\mathcal{F})$ множество всех подгрупп группы G, которое определяется следующим образом: $\mathcal{C}_\Pi(\mathcal{F}) = \{H \leq G : Hall_\Pi(G) \subseteq \mathcal{F}\}$.*

Задачу подтверждения аналога гипотезы Л. А. Шеметкова о локальности формаций в теории фиттинговых множеств конечной группы решает следующая

Теорема. *Пусть $\mathcal{F}$ — σ-локальное фиттингово множество группы G и $G \in \mathfrak{S}_\Pi$. Тогда множество $\mathcal{C}_\Pi(\mathcal{F})$ является σ-локальным фиттинговым множеством G.*

Список литературы

[1] K. Doerk, T. Hawkes. Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

[2] A. N. Skiba. A generalization of a Hall theorem. *J. Algebra and its Application*, **15**: 5 (2016), 1650085.

[3] P. Hall. Theorems like Sylow's. *Proc. London Math. Soc.*, **3**: 22 (1956), 286–304.

[4] Л. А. Шеметков. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

[5] Л. А. Шеметков. О подгруппах π-разрешимых групп. В кн.: Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1975.

[6] A. N. Skiba. On σ-properties of finite groups II. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, **24**: 3 (2015), 70–83.

[1]Исследование выполнено в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь "Конвергенция – 2025" и проекта Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф21М-030, № государственной регистрации 20213279).

[7] P. Hauck. Eine Bemerkung zur kleinsten normalen Fittingklasse. *J. Algebra*, **53** (1978), 395–401.

[8] W. Guo, B. Li. On the Shemetkov problem for Fitting classes. *Beiträge zur Algebra und Geom.*, **48**: 1 (2007), 281–289.

[9] Н. Т. Воробьев, В. Н. Загурский. Классы Фиттинга с заданными свойствами подгрупп Холла. *Матем. заметки*, **78**: 2 (2005), 234–240.

[10] Е. Н. Залесская, С. Н. Воробьев. Об аналоге гипотезы Шеметкова для классов Фишера конечных групп. *Сиб. мат. журн.*, **54**: 5 (2013), 989–999.

[11] А. Ф. Васильев, Л. А. Шеметков. Нелокальные формации конечных групп. *Докл. НАН Беларуси*, **39**: 4 (1995), 5–8.