Об индуктивности решетки тотально σ-локальных классов Фиттинга[1]

Воробьев Н.Н., Стаселько И.И.
Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, Витебск, Беларусь
vornic2001@mail.ru, mars17906@mail.ru

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать терминологию, принятую в [1–5].

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, называется классом Фиттинга.

Следуя Л.А. Шеметкову [1], символом σ обозначается некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup\limits_{i\in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Если n — целое число, то символом $\pi(n)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих n; $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$; $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup\limits_{G\in\mathfrak{F}} \sigma(G)$.

Напомним, что для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$, где (1) — класс всех единичных групп, символом $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех нормальных подгрупп N таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Символами $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{G}_{\sigma_i'}$ обозначают соответственно класс всех σ_i-групп и класс всех σ_i'-групп.

Пусть f — произвольная функция вида

$$f : \sigma \to \{\text{классы Фиттинга}\}, \qquad (1)$$

называемая *σ-функцией Хартли* (или, более кратко, *H_σ-функцией*).
Следуя [5] рассмотрим класс групп

$$LR_\sigma(f) = \Big(G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma\big(G\big)\Big).$$

Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ для некоторой H_σ-функции f вида (1), то $\mathfrak{F}$ называется *σ-локальным классом Фиттинга*, а f — *σ-локальным* заданием класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ (см. [5]).

Всякий класс Фиттинга считается 0-*кратно σ-локальным.* При $n \geq 1$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *n-кратно σ-локальным*, если $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$, где каждое непустое значение $f(\sigma_i)$ H_σ-функции f является $(n-1)$-кратно σ-локальным классом Фиттинга (см. [5]). Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *тотально σ-локальным*, если он является n-кратно σ-локальным для всех натуральных n (см. [5]).

Совокупность классов Фиттинга Θ называется *полной решеткой классов Фиттинга* [3], если классы $\varnothing$ и $\mathfrak{G}$ принадлежат Θ и пересечение любого множества классов из Θ снова принадлежит Θ. Относительно включения $\subseteq$ множество всех тотально σ-локальных классов Фиттинга l_σ^∞ образует полную решетку.

Символ $l_\sigma^\infty\mathrm{fit}(\mathfrak{X})$ обозначает пересечение всех тотально σ-локальных классов Фиттинга, содержащих совокупность групп $\mathfrak{X}$. H_σ-Функция f называется *l_σ^∞-значной*, если каждое ее непустое значение принадлежит решетке l_σ^∞.

Пусть $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ — непустая совокупность тотально σ-локальных классов Фиттинга. Следуя [2] будем полагать

$$\vee_\sigma^\infty(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = l_\sigma^\infty\mathrm{fit}\Big(\bigcup_{j\in J}\mathfrak{F}_j\Big).$$

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ — совокупность l_σ^∞-значных H_σ-функций, где f_j — некоторая H_σ-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_j$. Тогда символом $\vee_\sigma^\infty(f_j \mid j \in J)$ обозначается такая H_σ-функция f, что

$$f(\sigma_i) = l_\sigma^\infty\mathrm{fit}\Big(\bigcup_{j\in J} f_j(\sigma_i)\Big)$$

[1]Исследование выполнено в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция—2025» (№ государственной регистрации 20210495).

для всех i, если по крайней мере один из классов Фиттинга $f_j(\sigma_i) \neq \varnothing$. Если же $f_j(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $j \in J$, то предполагают, что $f(\sigma_i) = \varnothing$.

Для произвольной полной решетки классов Фиттинга Θ символом Θ^{σ_l} обозначается совокупность всех таких классов Фиттинга, которые обладают Θ-значной H_σ-функцией. H_σ-Функция f называется Θ-*значной*, если каждое ее непустое значение принадлежит решетке Θ.

H_σ-Функция f называется *внутренней*, если $f(\sigma_i) \subseteq LR_\sigma(f)$ для всех i.

Пусть Θ — полная решетка классов Фиттинга. Тогда верхняя грань произвольной совокупности $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ элементов из Θ^{σ_l} обозначается через $\vee_{\Theta^{\sigma_l}}(\mathfrak{F}_j \mid j \in J)$. Решетка Θ^{σ_l} называется *индуктивной* (см. [2]), если для любого набора $\{\mathfrak{F}_j = LR_\sigma(f_j) \mid j \in J\}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}_j \in \Theta^{\sigma_l}$ и для всякого набора $\{f_j \mid j \in J\}$ Θ-значных H_σ-функций f_j, где f_j — внутренняя H_σ-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_j$, имеет место

$$\vee_{\Theta^{\sigma_l}}(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = LR_\sigma\big(\vee_\Theta(f_j \mid j \in J)\big),$$

где символ $\vee_\Theta(f_j \mid j \in J)$ обозначает такую H_σ-функцию f, что $f(\sigma_i)$ является верхней гранью для $\{f_j(\sigma_i) \mid j \in J\}$ в Θ, если $\bigcup\limits_{j \in J} f_j(\sigma_i) \neq \varnothing$, и $f(\sigma_i) = \varnothing$ в противном случае.

Основной результат представляет следующая

Теорема. *Решетка всех тотально σ-локальных классов Фиттинга l_σ^∞ индуктивна.*

В случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ из теоремы получаем

Следствие [6, лемма 5]. *Решетка всех тотально локальных классов Фиттинга l^∞ индуктивна.*

Список литературы

[1] Л. А. Шеметков. Формации конечных групп. М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1978 (Соврем. алгебра).

[2] А. Н. Скиба. Алгебра формаций. Мн.: Беларуская навука, 1997.

[3] А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Матем. труды*, **2**: 2 (1999), 114–147.

[4] Z. Chi, V. G. Safonov, A. N. Skiba. On n-multiply σ-local formations of finite groups. *Comm. Algebra*, **47**: 3 (2019), 957–968.

[5] W. Guo, Li Zhang, N. T. Vorob'ev. On σ-local Fitting classes. *Journal of Algebra*, **546** (2020), 116–129.

[6] Н. Н. Воробьев, А. Н. Скиба. О дистрибутивности решетки разрешимых тотально локальных классов Фиттинга. *Матем. заметки*, **67**: 5 (2000), 662–673.