О проблеме Шеметкова существования инъекторов в конечной группе[1]

Воробьев Н.Т., Ланцетова Е.Д.
Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, Витебск, Беларусь
ntvorobyov@mail.ru, ekaterina.lancetova@gmail.com

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. В терминологии и обозначениях мы следуем [1]. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Подгруппа V группы G называется $\mathfrak{F}$-*инъектором* G, если $V \cap N$ является максимальной из подгрупп G, принадлежащих $\mathfrak{F}$, для любой субнормальной подгруппы N группы G.

В теории классов Фиттинга известна следующая

Проблема [2, проблема 11.117]. *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый разрешимый непустой класс Фиттинга. Верно ли, что каждая конечная неразрешимая группа обладает $\mathfrak{X}$-инъектором?*

Данная проблема была решена Форстером [3] для случая, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп. В [4] В.С. Монаховым доказано существование $\mathfrak{X}$ -инъекторов для классов случая, когда $\mathfrak{X}$ — класс всех разрешимых π-групп.

А.Н. Скибой [5, 5–7] был предложен σ-метод изучения строения групп и их классов, который состоит в следующем. Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Тогда $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Символом $\pi(n)$ обозначим множество всех простых делителей числа n, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых делителей группы G. Пусть σ — некоторое разбиение $\mathbb{P}$, т.е. $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, $\mathbb{P} = \cup_{i\in I}\sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Этот метод был дуализирован в [6].

Всякое отображение вида $h : \sigma \to \{$ классы Фиттинга$\}$ назовем *σ-функцией Хартли* или просто *H_σ-функцией.* Пусть $LH_\sigma(h) = \cap_{\sigma_i\in\sigma} h(\sigma_i)\mathfrak{E}_{\sigma_i'}\mathfrak{E}_{\sigma_i}$, где $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma_i'}$ — классы всех σ_i-групп и всех σ_i'-групп соответственно. Класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ назовем *σ-классом Хартли*, если $\mathfrak{H} = LH_\sigma(h)$ для некоторой H_σ-функции h. В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, ...\}$, то $\mathfrak{H}$ называют *классом Хартли* [7].

Указанную проблему Шеметкова для σ-класса Хартли решает следующая

Теорема. *Для каждого σ-класса Хартли $\mathfrak{H}$ в любой конечной группе существуют $\mathfrak{H}$-инъекторы.*

В случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, ...\}$ — минимальное разбиение множества $\mathbb{P}$, получаем

Следствие 1. *Каждый разрешимый класс Хартли $\mathfrak{H}$ обладает $\mathfrak{H}$-инъекторами.*

Если H_σ-функция h такова, что $h(\sigma_i) = (1)$ для всех $i \in I$, где (1) — класс всех единичных групп, то справедливо

Следствие 2. *В любой конечной группе существуют σ-нильпотентные инъекторы.*

Для $\sigma = \sigma^1$ имеем

Следствие 3 (Форстер [3]). *В любой конечной группе существуют нильпотентные инъекторы.*

Следствие 3 решает задачу, предложенную Н. Т. Воробьеву профессором М. Иранцо на Международной алгебраической конферении (Львов, 2003).

Список литературы

[1] K. Doerk, T. Hawkes. Finite Soluble Groups. New-York: Walter de Gruyter, 1992.

[2] Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). Новосибирск: ИМ РАН. Изд-е 18, 2014.

[3] P. Forster. Nilpotent injrctors in finite groups. *Bull. Austral. Math.Soc.*, **32**: 4 (1985), 293–297.

[4] В. С. Монахов. Существование разрешимых инъекторов в конечных группах. *Докл.АН Беларуси*, **36**: 6 (1992), 494–496.

[1]Исследование выполнено в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь "Конвергенция-2025"(№ ГР 20210495).

[5] А. Н. Скиба. О σ-свойствах конечных групп I. *ПФМТ*, **21**: 4 (2014), 89–96.

[6] A. N. Skiba. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets. *J. Algebra*, **550** (2020), 69–85.

[7] A. N. Skiba. On one generalization of the local formations. *ПФМТ*, **34**: 1 (2018), 79–82.

[8] A. N. Skiba. Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups. *J. Algebra*, **495** (2018), 114–129.

[9] W. Guo, L. Zhang, N.T. Vorob'ev. On σ-local Fitting classes. *J. Algebra*, **542** (2020), 116–129.

[10] B. Hartley. On Fischer's dualization of formation theory. *Proc. London Math. Soc.*, **3**: 2 (1969), 193–207.