О парах Локетта и гипотезе Локетта для σ-локальных классов Фиттинга[1]

Ланцетова Е.Д., Воробьев Н.Т.
Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, Витебск, Беларусь
ekaterina.lancetova@gmail.com, ntvorobyov@mail.ru

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными и разрешимыми. В терминологии и обозначениях мы следуем [1]. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп.

Если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга, то в любой группе G существует наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа, которую называют $\mathfrak{F}$-*радикалом* G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$. В теории конечных разрешимых групп многие известные результаты посвящены исследованию структуры классов Фиттинга и канонических подгрупп при помощи операторов «*» и «$_*$», которые были определены Локеттом [2]. Напомним, что каждогму непустому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ оператор «*» сопоставляет наименьший класс Фиттинга $\mathfrak{F}^*$, содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$ для всех групп G и H и оператор «$_*$», сопоставляющий $\mathfrak{F}$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}_* = \cap\{\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*\}$. Если $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}$ называется *классом Локетта.*

Локеттом [2] была сформулирована следующая проблема, известная в теории классов групп под названием

Гипотеза Локетта [2, проблема стр. 135]. *Верно ли, что для каждого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ существует нормальный класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ такой, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{X}$?*

Брайс и Косси [3] доказали справедливость гипотезы Локетта для всех локальных наследственных классов Фиттинга. Развитие и обобщение указанных результатов (см. [3, раздел 5]) привело к определению понятия пары Локетта. Упорядоченная пара $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется *парой Локетта* или просто L-*парой*, если справедливо равенство $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}_* = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})_*$. Брайсом и Косси [3] (см. также [1, теорема X.6.12]) было установлено, что если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — локальные наследственные классы Фиттинга, то $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ — L-пара. Построению L-пар для случая, когда $\mathfrak{F}$ — локальный класс вида $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$ или $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$ ($\mathfrak{X}$ — произвольный непустой класс Фиттинга) и $\mathfrak{H}$ — класс Фиттинга, замкнутый относительно $\mathfrak{F}$-инъекторов специального вида, была посвящена работа Бейдлемана и Хаука [4] (см. также [1, теоремы X.6.8 и X.6.11]). Бризоном [5] было доказано, что классы Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ образуют L-пару и $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{H}$, если $\mathfrak{F}$ — локальный класс Фиттинга всех π-групп и $\mathfrak{H}$ — класс Фиттинга, замкнутый относительно холловых π-подгрупп. Дёрком и Хоуксом [1] было показано, что $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ является L-парой в случае, когда $\mathfrak{F}$ либо локальный наследственный класс Фиттинга, либо класс Фиттинга, определяемый локально функцией, все значения которой постоянны, и $\mathfrak{H}$ — локальный наследственный класс Фиттинга. В работе Н.Т. Воробьева [6], где была подтверждена гипотеза

[1]Исследование выполнено в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь "Конвергенция-2025"(№ ГР 20210495).

Локетта для произвольного локального класса Фиттинга при помощи построения L-пары $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ для случая, когда класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ локален и класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ f-инъекторно замкнут (f — функция, определяющая локально $\mathfrak{F}$). В универсуме $\mathfrak{S}^{\pi}$ всех π-разрешимых групп в работе [7] были построены L-пары $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ для локального класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и класса Фиттинга $\mathfrak{H}$, состоящего из всех групп таких, холловы π-подгруппы которых нильпотентны.

Все это приводит к *задаче нахождения новых семейств классов Фиттинга, для которых упорядоченная пара* $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ *классов Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *является* L*-парой, в частности, описания классов Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *таких, что* $\mathfrak{F}$ *удовлетворяет гипотезе Локетта в* $\mathfrak{H}$.

В настоящей работе такая задача решена для случая σ-локальных классов Фиттинга. Ориентиром для таких исследований является σ-метод, предложенный А.Н. Скибой [8], для изучения строения групп и формаций (см. также [9–11]), который был дуализирован для классов Фиттинга в работе [12] и состоит в следующем.

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Через $\pi(n)$ обозначим множество всех простых делителей числа n, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых делителей группы G. Пусть σ — некоторое разбиение $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$; $\sigma(n) = \{\sigma_i : \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Если $\mathfrak{F}$ — класс групп, то через $\sigma(\mathfrak{F})$ обозначают множество $\sigma(\mathfrak{F}) = \cup\{\sigma(G) : G \in \mathfrak{F}\}$.

Всякое отображение вида $f : \sigma \to \{$ классы Фиттинга$\}$ называется *σ-функцией Хартли* или просто *H_σ-функцией.* Если f — H_σ-функция, то символом $Supp(f)$ обозначают носитель f, т. е. множество всех σ_i таких, что $f(\sigma_i) \neq \emptyset$.

Пусть $LR_\sigma(f) = (G : G = 1$ или $G \neq 1$ и $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}} \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G))$, где $\mathfrak{E}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{E}_{\sigma'_i}$ — классы всех σ_i-групп и всех σ'_i-групп соответственно, символом $G^{\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}}$ обозначен $\mathfrak{E}_{\sigma_i}\mathfrak{E}_{\sigma'_i}$-корадикал группы G — наименьшая нормальная подгруппа G, факторгруппа по которой σ_i-замкнута.

Определение [12]. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *σ-локальным*, если $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ для некоторой H_σ-функции f. В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, ...\}$, то $\mathfrak{F}$ называют *локальным* классом Фиттинга.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{F} = LR_\sigma(F)$ *— σ-локальный класс Фиттинга, определяемый полной приведенной* H_σ*-функцией* F *и* $\mathfrak{H}$ *— класс Фиттинга. Если* $\mathfrak{H}$ *—* F*-инъекторно замкнутый класс, то* $(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ *является* L*-парой.*

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{F} = LR_\sigma(F)$ *— σ-локальный класс Фиттинга, определяемый полной приведенной* H_σ*-функцией* F *и* $\mathfrak{H}$ *— класс Фиттинга. Тогда если* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$*, то* $\mathfrak{F}$ *удовлетворяет гипотезе Локетта в* $\mathfrak{H}$.

Список литературы

[1] K. Doerk, T. Hawkes. Finite Soluble Groups. New-York: Walter de Gruyter, 1992.

[2] F. P. Lockett. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$. *Math. Z.*, **137**: 2 (1974), 131–136.

[3] R. A. Bryce, J. Cossey. A problem in the Theory of Normal Fitting Classes. *Math. Z.*, **141** (1975), 99–110.

[4] J. C. Beidleman, P. Hauck. Über Fittingklassen und die Lockett-Vermuntun. *Math. Z.*, **167**:2 (1979), 161–167.

[5] O.J. Brison. Hall operators for Fitting classes. *Arch. Math. (Basel).*, **33**:1 (1979), 1–9.

[6] Н. Т. Воробьев. Hall operators for Fitting classes. *Мат. зам.*, **43**:2 (1988), 161–168.

[7] Lujin Zhu, Nanying Yang, N. T. Vorob'ev. On Lockett Pairs and Lockett Conjecture for π-Soluble Fitting Classes. *Bull. Malays. Sci. Soc.*, **36**:3 (2013), 825–832.

[8] A. N. Skiba. On one generalization of the local formations. *ПФМТ*, **34**:1 (2018), 79–82.

[9] A. N. Skiba. A generalization of a Hall theorem. *J. Algebra and Appl.*, **15**:5 (2015), 21–36.

[10] A. N. Skiba. Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups. *J. Algebra*, **495** (2018), 114–129.

[11] A. N. Skiba. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets. *J. Algebra*, **550** (2020), 69–85.

[12] W. Guo, L. Zhang, N.T. Vorob'ev. On σ-local Fitting classes. *J. Algebra*, **542** (2020), 116–129.