О наименьшем задании бэровской кратно σ-локальной формации [1]

Воробьев Н.Н., Чечуев А.В.
Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, Витебск, Беларусь
vornic2001@mail.ru, lenovokaktus@gmail.com

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать терминологию из [1–5]. Напомним, что класс групп называется *формацией*, если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

Следуя Л.А. Шеметкову [1], символом σ будем обозначать некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i\in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Группа G называется *σ-примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого i. Главный фактор H/K группы G называется: *σ-центральным* в G, если $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ является σ-примарным; *σ_i-фактором*, если H/K является σ_i-группой. Группа G называется *обобщенной $\{\sigma_i\}$-нильпотентной*, если каждый главный σ_i-фактор группы G σ-централен.

Если n — натуральное число, то символ $\pi(n)$ обозначает множество всех его простых делителей; $\sigma(n)$ обозначает множество $\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ и $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G\in\mathfrak{F}} \sigma(G)$; $\sigma^+(G) = \{\sigma_i \mid G$ обладает главным фактором H/K таким, что $\sigma(H/K) = \{\sigma_i\}\}$, $\sigma^+(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G\in\mathfrak{F}} \sigma^+(G)$. Символ $F_{\{g\sigma_i\}}$ обозначает произведение всех нормальных обобщенных $\{\sigma_i\}$-нильпотентных подгрупп группы G.

Всякая функция f вида

$$f : \sigma \cup \{\emptyset\} \to \{\text{формации групп}\},$$

где $f(\emptyset) \neq \varnothing$, называется *обобщенной формационной σ-функцией* (см. [5]) и полагают

$$BLF_\sigma(f) = (G \mid G/R_\sigma(G) \in f(\emptyset) \text{ и } G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma^+(G)).$$

Если для некоторой обобщенной формационной σ-функции f имеет место $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(f)$, то класс $\mathfrak{F}$ называется *бэровским σ-локальным*, а f — *обобщенным σ-локальным заданием* класса $\mathfrak{F}$ (см. [5]).

Обобщенная формационная σ-функция f называется *внутренней*, если $f(a) \subseteq BLF_\sigma(f)$ для всех $a \in \sigma \cup \{\emptyset\}$. Доказана следующая

Теорема 1. *Если $\mathfrak{F} = \bigcap_{j\in J} \mathfrak{F}_j$ и $\mathfrak{F}_j = BLF_\sigma(f_j)$ для всех $j \in J$, то $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(f)$, где $f(\emptyset) = \bigcap_{j\in J} f_j(\emptyset)$ и $f(\sigma_i) = \bigcap_{j\in J} f_j(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma^+(\mathfrak{F}) = \bigcap_{j\in J} \sigma^+(\mathfrak{F}_j)$ и $f(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \sigma\backslash\sigma^+(\mathfrak{F})$. Кроме того, если f_j — внутреннее обобщенное σ-локальное задание для всех $j \in J$, то f также является внутренним обобщенным σ-локальным заданием.*

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ — набор всех обобщенных σ-локальных заданий формации $\mathfrak{F}$. В силу теоремы 1 $f = \bigcap_{j\in J} f_j$ — обобщенное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}$, называется наименьшим, т. е. $f(a) = \bigcap_{j\in J} f_j(a)$ для всех $a \in \sigma_i \bigcup \{\emptyset\}$ по всем i.

[1] Исследование выполнено в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция–2025» (№ государственной регистрации 20210495).

Следуя А.Н. Скибе [2] (см. также [4, 5]), будем полагать, что всякая формация является *бэровской 0-кратно σ-локальной*; для $n > 0$ будем называть формацию $\mathfrak{F}$ *бэровской n-кратно σ-локальной*, если либо $\mathfrak{F} = (1)$, где (1) — класс всех единичных групп, либо $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i)$ — бэровские n-кратно σ-локальные формации для всех $\sigma_j \in \sigma^+(\mathfrak{F})$. Обобщенная формационная σ-функция f называется c_n^σ-значной, если $f(\sigma_i)$ являются бэровскими n-кратно σ-локальными формациями для всех $\sigma_i \in \mathrm{Supp}(f)$.

Символом $c_n^\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ обозначается пересечение всех бэровских n-кратно σ-локальных формаций, содержащих совокупность групп $\mathfrak{X}$. Следующее утверждение дает способ построение наименьшего обобщенного c_n^σ-значного σ-локального задания формации $\mathfrak{F} = c_n^\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{X})$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторая непустая совокупность групп, $\mathfrak{F} = c_n^\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{X}) = BLF_\sigma(f)$, где f — наименьшее обобщенное c_{n-1}^σ-значное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\sigma^+(\mathfrak{X}) = \sigma^+(\mathfrak{F})$;

2) $f(\emptyset) = c_{n-1}^\sigma\mathrm{form}(G/R_\sigma(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;

3) $f(\sigma_i) = c_{n-1}^\sigma\mathrm{form}(G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{X}) = c_{n-1}^\sigma\mathrm{form}(G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \mid G \in \mathfrak{F})$ *для всех* $\sigma_i \in \sigma^+(\mathfrak{X})$ *и* $f(\sigma_i) = \varnothing$ *для всех* $\sigma_i \in \sigma \backslash \sigma^+(\mathfrak{X})$;

4) *если h — произвольное обобщенное c_{n-1}^σ-значное σ-локальное задание формации $\mathfrak{F}$, то для всех $\sigma_i \in \sigma^+(\mathfrak{X})$ имеет место*

$$f(\sigma_i) = c_{n-1}^\sigma\mathrm{form}(G \mid G \in \mathfrak{F} \cap h(\sigma_i), O_{\sigma_i}(G) = 1) \text{ и}$$

$$f(\emptyset) = c_{n-1}^\sigma\mathrm{form}(G \mid G \in \mathfrak{F} \cap h(\emptyset), R_\sigma(G) = 1).$$

Список литературы

[1] Л.А. Шеметков. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

[2] А.Н. Скиба. Алгебра формаций. Мн.: Беларуская навука, 1997.

[3] А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп. *Украинский матем. журн.*, **52**: 6 (2000), 783–797.

[4] Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba. On n-multiply σ-local formations of finite groups. *Comm. Algebra*, **47**: 3 (2019), 957–968.

[5] V.G. Safonov, I.N. Safonova, A.N. Skiba. On Baer-σ-local formations of finite groups. *Comm. Algebra*, **48**: 9 (2020), 4002–4012.