О минимальной композиционной функции Хартли частично композиционного класса Фиттинга [1]

Воробьев Н.Н., Стаселько И.И.
Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, Витебск, Беларусь
vornic2001@mail.ru, mars17906@mail.ru

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем использовать терминологию из [1–5]. Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, называется классом Фиттинга.

В дальнейшем ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел и $\omega' = \mathbb{P}\backslash\omega$. Для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$, где (1) — класс всех единичных групп, символ $G^{\mathfrak{F}}$ обозначает пересечение всех таких нормальных подгрупп N группы G, что $G/N \in \mathfrak{F}$. В частности, будем писать $R^{\omega}(G) = G^{\mathfrak{S}_{\omega}}$, $C_p(G) = G^{\mathfrak{G}_{cp}}$, где $\mathfrak{S}_{\omega}$ — класс всех разрешимых ω-групп, $\mathfrak{G}_{cp}$ — класс всех таких групп, все главные p-факторы которых центральны.

Для любой совокупности групп $\mathfrak{X}$ символом $\mathrm{Com}(\mathfrak{X})$ обозначается класс всех простых абелевых групп A таких, что $A \cong H/K$, для некоторого композиционного фактора H/K группы $G \in \mathfrak{X}$.

Пусть f — произвольная функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{классы Фиттинга}\}. \tag{1}$$

Функции f сопоставляют класс групп

$$CR_{\omega}(f) = (G \mid R^{\omega}(G) \in f(\omega') \text{ и } C_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(G))).$$

Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ таков, что $\mathfrak{F} = CR_{\omega}(f)$ для некоторой функции f вида (1), то $\mathfrak{F}$ называют ω-композиционным классом Фиттинга, а f — ω-композиционной функцией Хартли класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ (более кратко, ω-композиционной H-функцией) (см. [4, 5]).

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — совокупность ω-композиционных H-функций. Символом $\bigcap_{i\in I} f_i$ обозначается ω-композиционная H-функция f такая, что $f(a) = \bigcap_{i\in I} f_i(a)$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — совокупность всех ω-композиционных H-функций класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Так как решетка всех ω-композиционных классов Фиттинга c_{ω} является полной, то $f = \bigcap_{i\in I} f_i$ — ω-композиционная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда H-функция f называется минимальной (см. [2]).

Следуя А.Н. Скибе [1] (см. также [3–5]), всякий класс Фиттинга считается 0-кратно ω-композиционным. При $n \geq 1$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется n-кратно ω-композиционным, если $\mathfrak{F} = CR_{\omega}(f)$, где все значения ω-композиционной H-функции f являются $(n-1)$-кратно ω-композиционными классами Фиттинга. ω-Композиционная

[1]Исследование выполнено в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция–2025» (№ государственной регистрации 20210495).

H-функция f называется c_ω^n-значной, если все ее значения являются n-кратно ω-композиционными классами Фиттинга. Символом $c_\omega^n\mathrm{fit}(\mathfrak{X})$ обозначается пересечение всех n-кратно ω-композиционных классов Фиттинга, содержащих совокупность групп $\mathfrak{X}$.

Основной результат представляет следующая

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *— непустая совокупность групп,* $\mathfrak{F} = c_\omega^n\mathrm{fit}(\mathfrak{X})$. *Пусть* $\pi = \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}))$, *и* f *— минимальная* ω*-композиционная* c_ω^{n-1}*-значная* H*-функция класса Фиттинга* $\mathfrak{F}$. *Тогда*:

1) $f(\omega') = c_\omega^{n-1}\mathrm{fit}(R^\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;
2) $f(p) = c_\omega^{n-1}\mathrm{fit}(C_p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ *для всех* $p \in \pi$;
3) $f(p) = \varnothing$ *для всех* $p \in \omega \backslash \pi$;
4) $\mathfrak{F} = CR_\omega(h)$, *где* $h(\omega') = \mathfrak{F}$ *и* $h(p) = f(p)$ *для всех* $p \in \omega$;
5) $\omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{F})) = \omega \cap \pi(\mathrm{Com}(\mathfrak{X}))$.

Список литературы

[1] А.Н. Скиба. Алгебра формаций. Мн.: Беларуская навука, 1997.

[2] А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Матем. труды*, **2**: 2, (1999), 114–147.

[3] А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп. *Украинский матем. журн.*, **52**: 6 (2000), 783–797.

[4] В.А. Ведерников, М.М. Сорокина. Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп *Дискретная математика*, **13**: 3 (2001), 125–144.

[5] N. Yang, N.N. Vorob'ev, A.R. Filimonova. On the modularity property of the lattice of partially composition Fitting classes. *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, **146** (2021), 43–55.