УДК 512.542

М.А. Грибовская

Нормальные подгруппы конечной группы и индексы не содержащих ее максимальных подгрупп

Рассматриваются только конечные группы. Пусть K – нормальная подгруппа группы G. Если индекс каждой максимальной подгруппы, не содержащей K, является простым числом, то подгруппа K сверхразрешима. Это следует из теоремы Л.А. Шеметкова ([1], теорема 3.1). Если индекс каждой максимальной подгруппы, не содержащей K, является простым числом, или квадратом простого числа, то по теореме Л.Я. Полякова ([2], теорема 1) подгруппа K разрешима, а ее инварианты (нильпотентная длина, p-длина) определены в [3].

В настоящей статье рассматривается более общая ситуация, а именно, когда индекс каждой максимальной подгруппы группы G, не содержащей K, либо делится на наибольший простой делитель порядка K, либо является простым числом, или квадратом простого числа. Устанавливается нормальное строение подгруппы K, откуда выводится, в частности, что подгруппа K разрешима, и ее нильпотентная длина не выше 6, p-длина не выше 1 для всех $p > 3$, а 2-длина и 3-длина не превосходят 2.

Используются стандартные обозначения, соответствующие [4-5]. В частности, через F(G) обозначается подгруппа Фиттинга группы G – произведение всех нормальных нильпотентных подгрупп группы G, а Φ(G) – подгруппа Фраттини группы G. Запись G = [A]B означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A. Через $\pi(G)$ обозначается множество простых делителей порядка группы G. Если $\pi(G) = \{p_1, p_2,...,p_n\}$, $p_1 > p_2 > ... > p_n$, и группа G обладает нормальным рядом $E = G_0 < G_1 < G_2 < ... < G_n = G$ таким, что G_i/G_{i-1} изоморфна силовской p_i-подгруппе группы G, $i = 1, 2, ... , n$, то группа G называется дисперсивной по Оре. Нильпотентная длина разрешимой группы – это длина самого короткого нормального ряда с нильпотентными факторами. Нильпотентная длина группы G обозначается через n(G), а $l_p(G)$ – p-длина группы G.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация и G – группа. Пересечение всех нормальных подгрупп группы G, факторгруппы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G, см. [5]. Произведением формаций $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ называется класс $\mathfrak{X}\mathfrak{F} = \{ G \mid G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}\}$, состоящий из всех групп G, у которых $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ принадлежит $\mathfrak{X}$. Как обычно, запись $\mathfrak{X}^2$ означает произведение $\mathfrak{X}\mathfrak{X}$. Формация $\mathfrak{X}$ называется насыщенной, если из условия $G/N \in \mathfrak{X}$, $N \leq \Phi(G)$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{X}$.

Через $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{N}$ обозначаются классы всех абелевых, сверхразрешимых и нильпотентных групп соответственно. Если $\mathfrak{F}$ – класс и π – некоторое множе-

ство простых чисел, то $\mathfrak{F}_\pi$ – класс всех π-групп из $\mathfrak{F}$. В частности, $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{A}_p$ – классы всех p-групп и абелевых p-групп соответственно.

Нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Если* $n = ab$ *и* $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$, $b \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$, *то* $a \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$.

Доказательство – простая проверка.

Лемма 2. ([1], следствие 3.1.1.) *Если* K – *нормальная подгруппа группы и индекс каждой максимальной подгруппы, не содержащей подгруппу* K, *есть простое число, то* K *сверхразрешима.*

Лемма 3. ([3], следствие 1.2.) *Пусть* K – *нормальная подгруппа группы* G. *Если индекс каждой максимальной подгруппы, не содержащей* K, *есть простое число, либо квадрат простого числа, то* $K \in \mathfrak{N}(\mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}^2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)$. *В частности,* $n(K) \leq 4$, *а* $l_p(K) \leq 1$ *для любого простого нечетного* p *и* $l_2(K) \leq 2$.

Лемма 4. ([4], лемма III.4.4) *Если* A – *абелева нормальная подгруппа группы* G *и* $A \cap \Phi(G) = 1$, *то существует подгруппа* B *такая, что* $G = [A]B$.

Лемма 5. *Пусть* $N \lhd G$. *Если* $N \cap \Phi(G) = 1$, *то* $F(N)$ *либо единична, либо является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп группы* G.

Доказательство. Пусть $F(N) \neq 1$ и $K = K_1 \times \cdots \times K_n$ – произведение минимальных нормальных подгрупп K_i группы G, содержащихся в $F(N)$, с наибольшим n. Так как $K \cap \Phi(G) = 1$, то по лемме 4 существует подгруппа L такая, что $G = [K]L$. Теперь $F(N) = [K](F(N) \cap L)$. Поскольку $\Phi(F(N)) \leq \Phi(G)$ по лемме III.3.4 [4], то $\Phi(F(N)) = 1$, поэтому $F(N)$ абелева и $F(N) \cap L \lhd G$. По выбору K подгруппа $F(N) \cap L = 1$ и $F(N) = K$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть* K – *нормальная подгруппа группы* G *и* p – *наибольший простой делитель порядка* K. *Предположим, что индекс каждой максимальной подгруппы группы* G, *не содержащей* K, *либо делится на* p, *либо равен простому числу. Тогда подгруппа* K *p-замкнута и ее p'-холлова подгруппа сверхразрешима. В частности, подгруппа* K *дисперсивна по Оре и ее нильпотентная длина не выше* 3.

Доказательство. Пусть P – силовская p-подгруппа из K, а P_1 – силовская p-подгруппа группы G, содержащая P. Так как $K \lhd G$ и $P = P_1 \cap K$, то $P \lhd P_1$ и $P_1 \leq N_G(P)$. Если $N_G(P) = G$, то подгруппа K p-замкнута. Предположим, что $N_G(P)$ – собственная подгруппа группы G и M – максимальная подгруппа группы G, содержащая $N_G(P)$. Тогда $P_1 \leq N_G(P) = N_M(P) \leq M <\cdot G$ и индекс $|G:M|$ не делится на p. По лемме Фраттини $G = N_G(P)K$, поэтому $G = MK$ и K не содержится в M. По условию леммы $|G:M| = |K : K \cap M| = r$, где r – простое число, поэтому $r < p$. Так как $N_G(P) \leq M$, то $N_K(P) = N_G(P) \cap K \leq M \cap K$ и $|K : N_K(P)| = |K : K \cap M|\ |K \cap M : N_K(P)|$. Поскольку $N_K(P) = N_{K \cap M}(P)$, то по теореме Силова $|K : N_K(P)| \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$ и $|K \cap M : N_K(P)| \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$. Теперь по лемме 1 число $r = |K : K \cap M|$ сравнимо с 1 по модулю p, т.е. p делит r-1. Противоречие. Поэтому допущение неверно и $P \lhd G$.

Пусть M/P – максимальная подгруппа факторгруппы G/P, не содержащая K/P. Тогда $G = MK$ и $|G : M| = |K : K \cap M|$ не делится на p. По условию теоремы $|G : M| = |G/P : M/P|$ – простое число, а по лемме 2 подгруппа K/P сверхразрешима. Так как p'-холлова подгруппа группы K изоморфна факторгруппе K/P, то она сверхразрешима. Из того, что p – наибольший простой делитель порядка K и сверхразрешимые группы дисперсивны по Оре следует, что подгруппа K дисперсивна по Оре. Кроме того, сверхразрешимые группы метанильпотентны, т.е. их нильпотентная длина не выше 2. Поэтому $n(K) \leq 3$. Теорема доказана.

При $G = K$ получаем

Следствие 1.1. *Пусть* p *– наибольший простой делитель порядка группы* G. *Предположим, что индекс каждой максимальной подгруппы группы* G *либо делится на* p, *либо является простым числом. Тогда группа* G p-*замкнута и ее* p'-*холлова подгруппа сверхразрешима. В частности, группа* G *дисперсивна по Оре, и ее нильпотентная длина не выше* 3.

Пример 1. Для простых чисел 5 и 3 существует группа Шмидта S (ненильпотентная группа, все подгруппы которой нильпотентны) порядка $5^2 3$ с нормальной силовской 5-подгруппой и ненормальной силовской 3-подгруппой, см., например, [6]. Группа S несверхразрешима, а ее максимальные подгруппы имеют индексы 5^2 и 3. Поэтому в следствие 1.1 группа G, а значит и в теореме 1 подгруппа K, могут быть несверхразрешимыми.

Лемма 6. *Пусть* K *– нормальная* {2,3}-*подгруппа группы* G *и пусть индекс каждой максимальной подгруппы группы* G, *не содержащей подгруппу* K, *либо делится на* 3, *либо равен* 2 *или* 4. *Тогда* $K \in (\mathfrak{N}_3 \mathfrak{N}_2)^2$.

Доказательство. Так как $(\mathfrak{N}_3 \mathfrak{N}_2)^2$ – насыщенная формация ([3], лемма 2) и условия леммы наследуются всеми факторгруппами G/N с нормальной подгруппой KN/N, то по индукции $\Phi(K) = 1$ и по лемме 5 подгруппа Фиттинга $F = F(K)$ является минимальной нормальной подгруппой группы G. Поэтому $G = [F]M$, где M – максимальная подгруппа группы G. По условию леммы либо 3 делит $|F| = |G : M|$, либо $|F| = |G : M| = 2$ или 4. Если F – 3-группа, то по индукции $K/F \in (\mathfrak{N}_3 \mathfrak{N}_2)^2$, а так как $O_3(K/F) = 1$, то $K/F \in (\mathfrak{N}_3 \mathfrak{N}_2)^2$ и $K \in (\mathfrak{N}_3 \mathfrak{N}_2)^2$. Заметим, что $C_K(F) = F$. Если $|F| = 2$, то $K = F$. Если $|F| = 4$, то $K/F = K/C_K(F)$ изоморфна подгруппе из $Aut(F) = GL(2,2) = S_3$. Поэтому $K \in (\mathfrak{N}_3 \mathfrak{N}_2)^2$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть* K *– нормальная подгруппа группы* G *и* p *– наибольший простой делитель порядка* K. *Предположим, что индекс каждой максимальной подгруппы группы* G, *не содержащей* K, *либо делится на* p, *либо является простым числом или квадратом простого числа. Тогда, либо подгруппа* K p-*замкнута, либо* $p \le 3$.

Доказательство. Пусть P – силовская p-подгруппа из K, а P_1 – силовская p-подгруппа группы G, содержащая P. Тогда $P = K \cap P_1$ и $P_1 \le N_G(P)$. Предположим, что P не является нормальной подгруппой группы G. Тогда $N_G(P)$ – собственная подгруппа группы G. По лемме Фраттини $G = KN_G(P)$. Через M обозначим максимальную подгруппу группы G, содержащую $N_G(P)$. Ясно, что M не содержит K. Так как $P_1 \le N_G(P) \le M$, то индекс M в группе G не делится на p. По условию леммы $|G : M| = r$ или q^2, где r и q – простые числа. Поскольку $G = KM$, то $|G : M| = |K : K \cap M| = r$ или q^2. Кроме того, $N_K(P) = N_G(P) \cap K \le M \cap K$, поэтому $N_K(P) = N_{K \cap M}(P)$. По теореме Силова $|K : N_K(P)| \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$ и $|K \cap M : N_{K \cap M}(P)| \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$. Так как $|K : N_K(P)| = |K : K \cap M|\ |K \cap M : N_{K \cap M}(P)|$, то $|K : K \cap M| \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$ по лемме 1, т.е. p делит $r-1$ или q^2-1. Но p – наибольший простой делитель порядка K, а r и $q \in \pi(K)$. Поэтому $p > r$ и $p > q$. Но теперь p делит q^2-1 и $p = 3$, $q = 2$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* K *– нормальная подгруппа группы* G *и* p *– наибольший простой делитель порядка группы* K. *Предположим, что индекс каждой максимальной подгруппы группы* G, *не содержащей* K, *либо делится на* p, *либо является простым числом или квадратом простого числа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) подгруппа K *разрешима и ее* {2,3}'-*холлова подгруппа нормальна и дисперсивна по Оре;*

(2) если $p \le 3$, *то* $K \in (N_3 N_2)^2$ *и* $n(K) \le 4$;

(3) если $p > 3$, *то* $K \in N_p N (N_2 A \cap A^2 A_3 A_2)$;

(4) в любом случае $n(K) \le 5$, *а* $l_r(K) \le 1$ *для любого* $r > 3$ *и* $l_2(K)$ *и* $l_3(K) \le 2$.

Доказательство. (1) Воспользуемся индукцией по числу $|G| + |K|$. Если $p \le 3$, то подгруппа K либо примарна, либо бипримарна, поэтому K – разрешимая {2,3}-подгруппа. Пусть $p > 3$. Тогда силовская p-подгруппа P из K нормальна в G по лемме 7. Факторгруппа G/P с нормальной подгруппой K/P удовлетворяет условию теоремы. По индукции ее {2,3}'-холлова подгруппа H/P нормальна и дисперсивна по Оре. Из того, что p – наибольший простой делитель порядка K замечаем, что H – нормальная дисперсивная по Оре {2,3}'-холлова подгруппа группы K. Поскольку K/H примарна или бипримарна, то подгруппа K разрешима.

(2) Пусть $p \le 3$. По лемме 6 подгруппа $K \in (\mathfrak{N}_3 \mathfrak{N}_2)^2$. Ясно, что $n(K) \le 4$, а $l_2(K)$ и $l_3(K) \le 2$.

(3) Пусть $p > 3$. По лемме 7 силовская p-подгруппа K_p нормальна в G. Пусть M/K_p – максимальная подгруппа факторгруппы G/K_p, не содержащая K/K_p. Тогда $G = MK$ и $|G : M| = |K : K \cap M|$ не делится на p. По условию $|G : M| = |G/K_p : M/K_p|$ – простое число или квадрат простого числа, а по лемме 3 подгруппа $K/K_p \in N(N_2A \cap A^2A_3A_2)$ и $n(K/K_p) \le 4$, а $l_r(K/K_p) \le 1$ для любого простого нечетного r и $l_2(K/K_p) \le 2$. Отсюда получаем, что $K \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}(\mathfrak{N}_2\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)$, $n(K) \le 5$, а $l_r(K) \le 1$ для любого простого нечетного r и $l_2(K) \le 2$.

(4) Суммируя (2) и (3) получаем (4). Теорема доказана.

Следствие 2.1. Пусть выполняются условия теоремы 2. Если порядок подгруппы K нечетен, то подгруппа K дисперсивна по Оре и $n(K) \le 4$.

Доказательство. Из (1) следует, что подгруппа K дисперсивна по Оре. Если $p \le 3$, то из (2) следует, что подгруппа K примарна, т.е. $n(K) \le 1$. Если $p > 3$ то из (3) следует, что $K \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{N} \mathfrak{N}_2\mathfrak{A}$, а поскольку 2 не делит порядок K, то $K \in N_p N A$ и $n(K) \le 4$. Здесь используется метанильпотентность сверхразрешимых групп.

В случае $G = K$ получаем

Следствие 2.2. *Пусть* p *– наибольший простой делитель порядка группы* G. *Предположим, что индекс каждой максимальной подгруппы группы* G *либо делится на* p, *либо является простым числом или квадратом простого числа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) группа G *разрешима и ее* {2,3}'*-холлова подгруппа нормальна и дисперсивна по Оре;*

(2) если $p \le 3$, *то* $G \in (\mathfrak{N}_3 \mathfrak{N}_2)^2$ *и* $n(G) \le 4$;

(3) если $p > 3$, *то* $G \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}(\mathfrak{N}_2\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2)$;

(4) в любом случае $n(G) \le 5$, *а* $l_r(G) \le 1$ *для любого* $r > 3$ *и* $l_2(G)$ *и* $l_3(G) \le 2$;

(5) если порядок группы G *нечетен, то группа* G *дисперсивна по Оре и* $n(G) \le 3$.

Доказательство. (1)–(4) непосредственно вытекают из теоремы 2. Проверим (5). Пусть порядок группы G нечетен. Из (1) получаем, что группа G дисперсивна по Оре. Пусть P – силовская p-подгруппа для наибольшего $p \in \pi(G)$. Тогда P нормальна в G и в группе G/P индексы всех максимальных подгрупп являются простыми числами или квадратами простых чисел. По следствиям 2 и 3 [7] получаем, что коммутант группы G/P нильпотентен, т.е. $n(G/P) \le 2$, а значит $n(G) \le 3$.

Отметим также, что частными случаями теоремы 2 являются теорема 1 из [2] и теорема Ф.Холла (см. [4], теорема VI.9.4).

Пример 2. В простой группе PSL(3,3) индексы максимальных подгрупп исчерпываются числами: 13, $2^4 3^2$, $2 \cdot 3^2 13$. Этот пример указывает на то, что в условиях теорем 1 и 2 требование «p – наибольший простой делитель» отбросить нельзя.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Шеметков Л.А.*** О конечных разрешимых группах // Известия АН СССР, сер. матем, 1968. Т. 32, № 3. С.533-559.
2. ***Поляков Л.Я.*** О влиянии свойств максимальных подгрупп на разрешимость конечной группы // Конечные группы. Минск, 1966. С. 89-97.
3. ***Монахов В.С., Селькин М.В., Грибовская Е.Е.*** О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп // Укр. мат. журн., 2002. Т. 54, № 7. С.940-950.
4. ***Huppert B.*** Endliche Gruppen I. Berlin, Heidelberg, New York, 1967. – 792 s.
5. ***Шеметков Л.А.*** Формации конечных групп. М., 1978. – 272 с.
6. ***Монахов В.С.*** О подгруппах Шмидта конечных групп // Вопросы алгебры. Вып. 13. Гомель, 1998. С.153-171.
7. ***Грибовская М.А.*** Группы нечетного порядка с ограниченными индексами максимальных подгрупп // Известия Гомельского госуниверситета, 2002, № 5(14). Вопросы алгебры – 18. С. 80-84.

SUMMARY

In this paper the normal subgroups K of the finite group G with limited indices of maximal subgroups is described. It is proved that subgroups K soluble and n(K) ≤ 5, $I_r(K) \le 1$ for r > 3, $I_2(K)$ and $I_3(K) \le 2$.

Поступила в редакцию 14.09.2002

УДК 539.3 : 534.1

Г.И. Михасев

О потере устойчивости безмоментного напряженного состояния многослойных конических оболочек

Рассмотрим некруговую коническую оболочку, состоящую из N изотропных слоев. Пусть h_k, E_k, ν_k –толщина, модуль Юнга и коэффициент Пуассона k -го слоя (k = 1, ..., N). В качестве исходной поверхности примем срединную поверхность одного из k-ых слоев. На исходной поверхности введем ортогональную систему криволинейных координат s, φ, где $s = R^{-1}s^*$, s^* – расстояние до вершины конуса, R– характерный размер срединной поверхности, φ – координата на направляющей, выбираемая таким образом, чтобы первая квадратичная форма поверхности имела вид $d\sigma^2 = R^2(ds^2 + s^2 d\varphi^2)$, а радиус кривизны $R_2 = Rs\rho^{-1}(\varphi)$. Пусть оболочка занимает область Ω:

$$s_1(\varphi) \le s \le s_2(\varphi), 0 \le \varphi \le \varphi_1, \tag{1}$$

где φ_1 – длина кривой, образующейся при пересечении исходной конической поверхности и сферы единичного радиуса с центром в вершине конуса.

Для формулировки используемых здесь гипотез теории многослойных оболочек введем дополнительные обозначения. Пусть **n** – вектор нормали к исходной поверхности, направленный в сторону ее выпуклости, $\mathbf{e}_i$ (i =1, 2) – вектора, касательные к линиям кривизн исходной поверхности, z – поперечная координата, отсчитываемая в направлении вектора **n**, δ_k – расстояние