Т. К. Петрова, М. И. Наумик (Витебск, Республика Беларусь)

О периодической полугруппе линейных отношений с центральными идемпотентами

В данной работе дано описание полугрупп, указанных в заголовке и в дальнейшим называемых кратко PCJ-полугруппами линейных отношений. Интерес к этому классу (включающему важный подкласс коммутативных периодических полугрупп) обусловлен, прежде всего, простым устройством PCJ-полугрупп линейных отношений. Отметим, что в [1] доказано, периодическая полугруппа линейных отношений конечномерного пространства над полем локально конечна.

Пусть V – левое конечномерное векторное пространство над произвольным телом F. Бинарное отношение $a \subseteq V \times V$ между элементами множества V называется линейным, если оно является подпространством $V \oplus V$.

Множество $LR(V)$ всех линейных отношений пространства V является, как известно [2] полугруппой относительно операции умножения бинарных отношений.

При изучении линейных отношений $a \in LR(V)$ будем рассматривать следующие подпространства V:

$$pr_1 a = \{\overline{x} \in V : \exists \overline{y} \in V, (\overline{x}, \overline{y}) \in a\}; \quad ker a = \{\overline{x} \in V : (\overline{x}, \overline{0}) \in a\};$$

$$pr_2 a = \{\overline{y} \in V : \exists \overline{x} \in V, (\overline{x}, \overline{y}) \in a\}; \quad coker a = \{\overline{y} \in V : (\overline{0}, \overline{y}) \in a\}.$$

Пусть $S \subseteq LR(V)$ – полугруппа. Обозначим $pr_1 S = \sum\limits_{a \in S} pr_1 a$. Назовем S-модулем любое пространство $U \subseteq V$, устойчивое относительно S, т.е. $U \subseteq pr_1 S$, $U_1 = \{\overline{y} \in V : (\overline{x}, \overline{y}) \in a \in S, \overline{x} \in U\}$, то $U_1 \subseteq U$.

$S(U)$ обозначает полугруппу линейных отношений пространства U, индуцированную S. Если $pr_1 S$ разложимо в прямую сумму

$$pr_1 S = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_n \tag{1}$$

ненулевых S-модулей и $S_i = S(V_i)$, то мы назовем полугруппу S подпрямой суммой полугрупп S_i, ассоциированной с разложением (1). Если при этом S изоморфна прямому произведению всех S_i, то мы назовем S прямой суммой этих полугрупп и пишем $S = S_1 \dot{+} S_2 \dot{+} ... \dot{+} S_n$.

Заметим, что если e – нетривиальный, т.е. отличный от нуля и единицы, идемпотент из центра полугруппы S, то ясно, что S является подпрямой суммой полугрупп $S(ker e)$, $S(V_1)$ и $S(V_2)$, где

$pr_2 e = cokere \otimes V_1, V_1$ – некоторое дополнение, а $pr_1 S = kere \otimes V_1 \otimes V_2$, где V_2 некоторое дополнение $pr_1 e = kere \otimes V_1$ до $pr_1 S$.

Периодическую полугруппу, содержащую ровно два идемпотента – нуль и единицу, назовем, аналогично [3], локальной, а в случае конечных коммутативных полугрупп в [4] такие полугруппы назывались элементарными. Очевидно, локальная полугруппа является PCJ-полугруппой, а именно идеальным расширением нильполугруппы посредством группы с присоединенным нулем, причем единица группы служит единицей расширения. Сформулируем для удобства очевидную

Лемма. *Если $e \in S$ – идемпотент подполугруппы S из $LR(V)$, то подпространство $U \subseteq pr_1 S$ устойчиво относительно e тогда и только тогда, когда $U = (U \cap kere) \otimes (U \cap V_1) \otimes (U \cap V_1)$.*

Теорема 1. *PCJ-полугруппа линейных отношений над произвольным телом является подпрямой суммой полугрупп, каждая из которых – либо периодическая группа, либо нильпотентная полугруппа, либо локальная полугруппа.*

Теорема 2. *Для того, чтобы PCJ-полугруппа линейных отношений над произвольным телом была максимальной (в классе PCJ-полугрупп линейных отношений) необходимо и достаточно, чтобы она была прямой суммой максимальных локальных полугрупп.*

Литература. [1] L. B. Sneperman. The Shur theorem for periodic semigroups of linear relations. Semigroup Forum. 25 (1982), 203–211. [2] С. Маклейн. Алгебра аддитивных отношений. Сб. переводов. Математика. 7:6 (1963), 1–12. [3] И. О. Коряков. Линейные периодические полугруппы с центральными идемпотентами. Исследования алгебраических систем по свойствам их подсистем. Свердловск. (1987), 72–80. [4] И. С. Понизовский. О матричных представлениях конечных коммутативных полугрупп. Сиб. мат. журнал. XI(5) (1970), 1098–1106.

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова

e-mail: naumik@tut.by

А. Г. Пинус (Новосибирск)

О пространствах функциональных клонов на множествах

Через F_A обозначим совокупность функционалных клонов на множестве A. Традиционно эта совокупность рассматривается как решетка $L_A = \langle F_A; \wedge, \vee \rangle$ относительно теоретико-множественного отношения включения $\subseteq$ на клонах. Для любого натурального n через $F^{(n)}$ обозначим n —фрагмент клона F — совокупность функций