М. И. Наумик (Витебск, Республика Беларусь)

О максимальной локальной полугруппе линейных отношений

В данной работе дано описание максимальной локальной полугруппе линейных отношений. Отметим, что в [1] доказано, периодическая полугруппа линейных отношений конечномерного пространства над полем локально конечна.

Пусть V – левое конечномерное векторное пространство над произвольным телом F. Бинарное отношение $a \subseteq V \times V$ между элементами множества V называется линейным, если оно является подпространством $V \oplus V$. Множество $LR(V)$ всех линейных отношений пространства V является, как известно [2] полугруппой относительно операции умножения бинарных отношений. Пусть $S \subseteq LR(V)$ – полугруппа. Обозначим $pr_1 S = \sum\limits_{a \in S} pr_1 a$, $cokerS = \bigcap\limits_{a \in S} cokera$. Назовем S-модулем любое пространство $U \subseteq V$ устойчивое относительно S, т.е. $U \subseteq pr_1 S$, $U_1 = \{\overline{y} \in V : (\overline{x}, \overline{y}) \in a \in S, \quad \overline{x} \in U\}$, то $U_1 \subseteq U$. $S(U)$ обозначает полугруппу линейных отношений пространства U, индуцированную S. Если $pr_1 S$ разложимо в прямую сумму

$$pr_1 S = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n \tag{1}$$

ненулевых S-модулей и $S_i \subseteq S(V_i)$, то мы назовем полугруппу S подпрямой суммой ненулевых S-модулей, ассоциированной с разложением (1). Если при этом S изоморфна прямому произведению всех S_i, то мы назовем S прямой суммой этих полугрупп и пишем $S = S_1 \dot{+} S_2 \dot{+} \ldots \dot{+} S_n$.

Периодическую полугруппу, содержащую ровно два идемпотента – нуль и единицу, назовем, аналогично [3], локальной, а в случае конечных коммутативных полугрупп в [4] такие полугруппы назывались элементарными.

Будем говорить, что линейное отношение $a \in LR(V)$ аннулирует цепь $pr_1 a = U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_{n-1} \supset U_n = cokera$, если $pr_1 a \subset U_i$, а $pr_2 a \subset U_{i+1}$.

Множество всех линейных отношений $N \subseteq LR(V)$, аннулирующих цепь $pr_1 N = U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_{n-1} \supset U_n = cokerN$ назовем аннулятором цепи.

Теорема. *Пусть $S \subseteq LR(V)$, где F – поле характеристики 0. Множество S тогда и только тогда является максимальной локальной полугруппой, когда $S = G \cup N$ и существует разложение $pr_1 S = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$, для которого*

1) $G = G_1 \dotplus G_2 \dotplus ... \dotplus G_n$, *где* $G_i = G[V_i]$ – *максимальная неприводимая периодическая подгруппа из* $GL(V_i, F)$;

2) N – *аннулятор цепи* $pr_1 S = U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset ... \supset U_{n-1} \supset U_n = coker N$, где $U_{i-1} = V_i \oplus V_{i+1} \oplus ... \oplus V_n$.

Литература. [1] L. B. Sneperman. The Shur theorem for periodic semigroups of linear relations. Semigroup Forum. 25 (1982), 203–211. [2] С. Маклейн. Алгебра аддитивных отношений. Сб. переводов. Математика. 7:6 (1963), 1–12. [3] И. О. Коряков. Линейные периодические полугруппы с центральными идемпотентами. Исследования алгебраических систем по свойствам их подсистем. Свердловск. (1987), 72–80. [4] И. С. Понизовский. О матричных представлениях конечных коммутативных полугрупп. Сиб. мат. журнал. XI(5) (1970), 1098–1106.

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова

e-mail: naumik@tut.by

А. Ю. Никитин (Омск)

Критерий нётеровости по уравнениям для частичных порядков

С точки зрения алгебраической геометрии, *частично упорядоченным множеством (частичным порядком)* является алгебраическая структура $\mathcal{P} = \langle P | \leqslant^{(2)}, A\rangle$ с носителем P, предикатным символом порядка $\leqslant$ и множеством константных символов A. *Уравнениями* над частичным порядком $\mathcal{P}$ от переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ называются атомарные формулы над $\mathcal{P}$ от переменных X. Легко видеть, что таких уравнений 7 типов.

Системой уравнений $S(X)$ над частичным порядком $\mathcal{P}$ от переменных X называется любое множество уравнений над $\mathcal{P}$ от переменных X. Точка $p = (p_1, \ldots, p_n) \in P^n$ называется *решением* системы уравнений S, если для любого уравнения системы S при подстановке вместо переменных соответствующих значений получается истинное над $\mathcal{P}$ выражение. Естественным образом определяется множество решений системы уравнений. Системы уравнений $S_1(X_n)$ и $S_2(X_n)$ называются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают.

Для частичного порядка $\mathcal{P}$ выполнено *свойство нётеровости по уравнениям*, если для любой бесконечной системы уравнений $S(X_n)$ существует эквивалентная её конечная подсистема. Для частичного порядка $\mathcal{P}$ выполнено *свойство слабой нётеровости по уравнениям*,