УДК 517.982.4

ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ МЕДЛЕННОГО РОСТА

Ю.М. Вувуникян, Е.В. Банюкевич

Учреждение образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

Ставится задача ввести и исследовать вейвлет-преобразование на пространстве обобщенных функций медленного роста.

Цель работы – изучить основные свойства вейвлет-преобразования на пространстве обобщенных функций медленного роста и построить соответствующее обратное вейвлет-преобразование.

Приводятся сведения о полученных за последние годы результатах применения вейвлет-преобразования в различных разделах математики, экономики, сейсмологии, машиностроении и других областях.

Материал и методы. *Объектом исследования являются обобщенные функции медленного роста, определенные на числовой оси, предметом – вейвлет-преобразование обобщенных функций медленного роста. Для достижения поставленной цели используются известные методы, свойства и теоремы теории математического и функционального анализа, в частности, теория вейвлетов и обобщенных функций.*

Результаты и их обсуждение. *Доказана принадлежность вейвлет-преобразования функций из пространства Шварца на числовой оси пространству Шварца на открытой правой полуплоскости, определено вейвлет-преобразование на пространстве обобщенных функций медленного роста и доказана его линейность и непрерывность, а также справедливость теоремы об обратном вейвлет-преобразовании для восстановления обобщенных функций медленного роста при выполнении некоторых условий. Приведен пример, демонстрирующий справедливость формулы обратного вейвлет-преобразования.*

Заключение. *Таким образом, рассмотрено вейвлет-преобразование обобщенных функций медленного роста и доказаны некоторые его свойства. Результаты, приведенные в данной работе, могут послужить дальнейшему развитию теории вейвлет-преобразования обобщенных функций и их приложениям.*

Ключевые слова: *вейвлет, вейвлет-преобразование, обобщенная функция, обобщенная функция медленного роста, преобразование Фурье, пространство Шварца.*

WAVELET TRANSFORM IN THE SLOW GROWING GENERALIZED FUNCTIONS SPACES

Yu.M. Vuvunikyan, E.V. Baniukevich

Education Establishment "Yanka Kupala State University of Grodno"

The task is to introduce and study the wavelet transform on the slow growing generalized functions spaces.

The purpose is to learn general properties of the slow growing generalized functions wavelet transform and create the corresponding inverse wavelet transform.

The introduction contains the latest year information about previous results of the wavelet transform applications of in various branches of mathematics, economics, seismology, mechanical engineering and other sciences.

Material and methods. *The study object is the slow growing generalized functions defined on the numerical axis. The study subject is the slow growing generalized functions wavelet transformation. Commonly known methods, properties and theorems of the mathematical and function analysis, are used to achieve the purpose; particularly, the theory of wavelet and generalized functions.*

Findings and their discussion. *It is proved that the wavelet transform of Schwarz space functions belongs to the same space on the open right half-space. The wavelet transformation is defined on the slow growing generalized functions. The slow growing generalized functions wavelet transform linearity and continuity are proved. The theorem about the inverse wavelet transform for the recovery of slow growing generalized functions is given; its validity with certain conditions is proved. An example which demonstrates the inverse wavelet transform operation is given.*

Conclusion. *Thus, the wavelet transform of the slow growing generalized functions is consideredand; its properties are proved. The obtained results can be used for further development of the generalized functions theory and its applications.*

Key words: *wavelet, wavelet transform, generalized function, slow growing generalized function, Furrier transform, Schwarz space.*

Традиционно вейвлет-преобразование определялось и рассматривалось в пространстве квадратично интегрируемых функций, чему посвящено много работ [1; 2]. В последние годы дискретное вейвлет-преобразование продолжает использоваться в качестве альтернативного метода замены быстрого преобразования Фурье для увеличения спектральной эффективности [3]. Вейвлет-преобразование активно применяется в экономике, например, в стратегии динамического хеджирования, основанной на вейвлетах [4]. Независимо от того, в какой области науки получены и находят применение временные ряды, актуальным остается использование вейвлет-преобразований для их анализа. Это связано с тем, что вейвлет-анализ позволяет успешно решать задачи выделения периодичности, тренда, сезонных компонент и т.п., что продемонстрировано в работе [5].

В исследованиях последних лет описываются одни из первых вейвлетов, так, например, в [6] построена вейвлет-фрактальная модель обнаружения геохимических аномалий на основе модифицированного ядра вейвлетов Морле.

Результаты, полученные в сейсмологии, показывают, что разложенные на основе вейвлетов записи сейсмического отклика земли с использованием шумоподавления обеспечивают лучшую производительность при динамическом анализе по сравнению с разложенными записями на основе понижающей дискретизации [7].

Вейвлеты активно применяются в машиностроении, например, в работе [8] показаны преимущества и недостатки подхода к текстуре поверхности с использованием дробных сплайновых вейвлетов, которые могут быть напрямую применены для лучшей диагностики поверхности изготовленных деталей машин.

Ранее нами было введено вейвлет-преобразование на пространстве обобщенных функций медленного роста (см. [9]), финитных обобщенных функций [10].

Цель статьи – изучение основных свойств вейвлет-преобразования на пространстве обобщенных функций и построение соответствующего обратного вейвлет-преобразования.

Материал и методы. Объектом исследования являются обобщенные функции медленного роста, определенные на числовой оси. Предмет исследования – вейвлет-преобразование обобщенных функций медленного роста. Для достижения поставленной цели используются широко известные методы, свойства и теоремы теории математического и функционального анализа, в частности, теория вейвлетов и обобщенных функций.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим вейвлет-преобразование медленно растущих обобщенных функций. Обозначим S пространство Шварца – пространство бесконечно дифференцируемых быстро убывающих комплекснозначных функций f на числовой прямой $\mathbb{R}$

$$S=\left\{ f\in C^{\infty}(\mathbb{R}):\left| x^m f^{(k)}(x)\right| <+\infty\right\}, \text{ для всех } k,m\in\mathbb{N}_0,$$

$\mathbb{N}_0$ – множество целых неотрицательных чисел.

Определим вейвлет-преобразование для функции пространства Шварца, то есть для $f\in S$ и вейвлета $\psi\in S$

$$W_{\psi} f(a,b)=\left(f*\psi_{-a}\right)(b)=\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\psi_{-a}\left(b-t\right)dt\,, \tag{1}$$

где с помощью $\psi_{-a}\in S$ обозначили вейвлет $a^{-1}\psi\left(\dfrac{t}{-a}\right)\in S$, $a>0$, $b\in\mathbb{R}$.

Далее обозначим функциональное пространство $S(\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R})$ – пространство всех бесконечно дифференцируемых функций f, таких, что для $\ell,k\in\mathbb{N}_0$ и $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0$ (где $\mathbb{N}_0$ – множество всех неотрицательных целых чисел)

$$\gamma_{\ell,\alpha,k,\beta}(f)=\sup_{(a,b)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}}\left|a^{\ell}b^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^{k}\left(\frac{\partial}{\partial b}\right)^{\beta}f(b,a)\right|<\infty .$$

Пусть $0\le\ell\le r, 0\le\alpha\le j, 0\le k\le p, 0\le\beta\le q$ и $m=\max\{r,j,p,q\}$.

Зададим топологию при помощи счетной системы норм

$$\|f\|_m=\gamma_{m,m,m,m}(f).$$

В работе [9] показано, что определение вейвлет-преобразования может быть представлено через преобразование Фурье, то есть, если использовать свойства преобразования Фурье для функций пространства Шварца, можем получить следующее:

Определение 1. *Вейвлет-преобразованием функции пространства Шварца f называется функция $W_\psi f(a,b)$, задаваемая равенством*

$$W_\psi f(a,b)=\left(\hat{f},e^{2\pi i\omega b}\overline{\hat{\psi}(a\omega)}\right), \tag{2}$$

где $\hat{f}$, $\hat{\psi}$ – преобразование Фурье соответственно функции $f\in S$ и функции $\psi\in S$.

Следует отметить, что ранее не доказывалась принадлежность вейвлет-преобразования функций из пространства Шварца этому же пространству.

Теорема 1. *Пусть вейвлет $\psi\in S(\mathbb{R})$. Тогда вейвлет-преобразование W_ψ, определенное на пространстве Шварца $S(\mathbb{R})$, является непрерывным линейным отображением пространства $S(\mathbb{R})$ в пространство $S(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R})$.*

Доказательство. Пользуемся определением вейвлет-преобразования (1) быстро убывающих функций

$$|W_\psi f|\le\sup_{(a,b)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}}\left|a^m b^m\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^m\left(\frac{\partial}{\partial b}\right)^m\left(W_\psi f\right)(a,b)\right|.$$

Так как вейвлет – гладкая функция, то он порождает регулярную гладкую функцию

$$|W_\psi f|\le\sup_{(a,b)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}}\left|\left\langle f,a^m b^m\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^m\left(\frac{\partial}{\partial b}\right)^m a^{-1}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right\rangle\right|.$$

В таком виде невозможно разделить переменные *a* и *b*, поэтому работаем с определением вейвлет-преобразования (2) через преобразование Фурье

$$|W_\psi f|\le\sup_{(a,b)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}}\left|b^m a^m\left(\hat{f}(\omega),\left(\frac{\partial}{\partial b}\right)^m e^{2\pi i\omega b}\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^m\overline{\hat{\psi}(a\omega)}\right)\right|.$$

Теперь найдем частные производные и получим:

$$|W_\psi f|\le(2\pi)^m\sup_{(a,b)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}}\left|b^m a^m\left(\omega^m\hat{f}(\omega),e^{2\pi i\omega b}\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^m\overline{\hat{\psi}(a\omega)}\right)\right|.$$

Так как над функцией *f* осуществили преобразование Фурье, имеет место запись через интеграл:

$$|W_\psi f|\le(2\pi)^m\sup_{(a,b)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}}\left|b^m a^m\int_{\mathbb{R}}\omega^m\hat{f}(\omega)e^{2\pi i\omega b}\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^m\overline{\hat{\psi}(a\omega)}d\omega\right|.$$

Рассмотрим подробнее интеграл в правой части неравенства и найдем частные производные порядка *m* преобразования Фурье вейвлета и приведем подобные:

$$\left|W_{\psi} f\right| \le \left(2\pi\right)^{2m} \sup_{(a,b)\in\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}} \left| b^m a^m \int_{\mathbb{R}} \omega^{2m} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i\omega b} \left(\int_{\mathbb{R}} t^m e^{2\pi i a\omega t} \overline{\psi(t)} dt \right) d\omega \right| .$$

Отдельно рассмотрим внутренний интеграл и проинтегрируем его по частям [11, с. 336]

$$\int_R t^m e^{2\pi i a\omega t} \overline{\psi(t)} dt = (2\pi i a\omega)^{-1} \int_R t^m \overline{\psi(t)} d(e^{2\pi i a\omega t}) =$$

$$= (2\pi i a\omega)^{-1} \left[t^m \overline{\psi(t)} e^{2\pi i a\omega t} \right]\Big|_{-\infty}^{+\infty} - (2\pi i a\omega)^{-1} \int_R e^{2\pi i a\omega t} \frac{d}{dt}\left(t^m \overline{\psi(t)} \right) dt . \qquad (3)$$

Необходимо найти значение выражения:

$$(2\pi i a\omega)^{-1} \left[t^m \overline{\psi(t)} e^{2\pi i a\omega t} \right]\Big|_{-\infty}^{+\infty} .$$

Так как вейвлет-функция $\overline{\psi(t)} \in S$, то выполняется неравенство:

$\left| t^{m_1} \overline{\psi(t)} \right| = | t^{m_1} | \cdot | \overline{\psi(t)} | \le C_{m_1}$, где $m_1 = m+1$ и $\left| \overline{\psi(t)} \right| \le C_0$:

$$| \psi(t) | + | t^{m+1} | \cdot | \psi(t) | \le C_{m+1} + C_0 ,$$

$(1+| t^{m+1} |)\cdot | \psi(t) | \le C$, где $C_{m+1} + C_0 = C$,

$$| t^m | \cdot | \psi(t) | \le C \cdot \frac{| t^m |}{1+| t^{m+1} |} .$$

Теперь оценим первое слагаемое в выражении (3)

$$\left[t^m \overline{\psi(t)} e^{2\pi i a\omega t} \right]\Big|_{-\infty}^{+\infty} \le \left[t^m \overline{\psi(t)} \right]\Big|_{-\infty}^{+\infty} \le C \cdot \frac{| t^m |}{1+| t^{m+1} |} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} .$$

Далее переходим к пределу при $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{| t^m |}{1+| t^{m+1} |} = \lim_{t\to\infty} \frac{| t^m | / | t^{m+1} |}{1/ | t^{m+1} | + | t^{m+1} | / | t^{m+1} |} = \frac{0}{1} = 0 .$$

Следовательно, и все выражение обращается в нуль. Тогда, вернувшись к выражению (3), получим:

$$-(2\pi i a\omega)^{-1} \int_R e^{2\pi i a\omega t} \frac{d}{dt}\left(t^m \overline{\psi(t)} \right) dt . \qquad (4)$$

И так повторим для (4) интегрирование по частям *m-1* раз, в результате чего получим:

$$(-2\pi i a\omega)^{-m} \int_R e^{2\pi i a\omega t} \left(\frac{d}{dt} \right)^m \left(t^m \overline{\psi(t)} \right) dt . \qquad (5)$$

Отметим,

$$(-1)^m i^{-m} = \frac{i^{2m}}{i^m} = i^m ,$$

тогда последнее выражение (5) примет вид:

$$i^m (2\pi a\omega)^{-m} \int_R e^{2\pi i a\omega t} \left(\frac{d}{dt} \right)^m \left(t^m \overline{\psi(t)} \right) dt .$$

Возвращаемся к исходному неравенству, имеем:

$$\left|W_{\psi} f\right| \le (2\pi)^m \sup_{(a,b)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} \left| b^m \int_{\mathbb{R}} \omega^m \hat{f}(\omega) e^{2\pi i\omega b} \left(\int_R e^{2\pi i a\omega t} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(t^m \overline{\psi(t)}\right) dt \right) d\omega \right|.$$

Рассмотрим интеграл по ω, проинтегрируем его по частям и получим:

$$(2\pi ib)^{-1} e^{2\pi i\omega b} \omega^m \hat{f}(\omega) \left(\int_R e^{2\pi i a\omega t} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(t^m \overline{\psi(t)}\right) dt \right) \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} -$$

$$-(2\pi ib)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\omega b} \frac{\partial}{\partial\omega} \left[\omega^m \hat{f}(\omega) \left(\int_R e^{2\pi i a\omega t} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(t^m \overline{\psi(t)}\right) dt \right) \right] d\omega.$$

Рассмотрим выражения

$$(2\pi ib)^{-1} e^{2\pi i\omega b} \omega^m \hat{f}(\omega) \int_R e^{2\pi i a\omega t} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(t^m \overline{\psi(t)}\right) dt \Bigg|_{-\infty}^{+\infty}.$$

Так как $\psi(t)$ – вейвлет-функция из *S*, то и ее преобразование Фурье и вся подынтегральная функция принадлежат пространству Шварца, значит, интеграл ограничен. Функция *f* из пространства *S* (Шварца), и известно, что ее преобразование Фурье также принадлежит указанному пространству. Следовательно, функция $\hat{f} \to 0$ при $\omega \to \infty$. Значит, и все выражение стремится к нулю.

Тогда в результате интегрирования по частям остается лишь выражение

$$-(2\pi ib)^{-1} \int_R e^{2\pi i\omega b} \frac{\partial}{\partial\omega} \left[\omega^m \hat{f}(\omega) \int_R e^{2\pi i a\omega t} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(t^m \overline{\psi(t)}\right) dt \right] d\omega.$$

И так повторив интегрирование по частям *m-1* раз, получим:

$$(-1)^m (2\pi ib)^{-m} \int_R e^{2\pi i\omega b} \left(\frac{\partial}{\partial\omega}\right)^m \left[\omega^m \hat{f}(\omega) \int_R e^{2\pi i a\omega t} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(t^m \overline{\psi(t)}\right) dt \right] d\omega.$$

Далее применяется формула Лейбница [11, с. 194] и получим:

$$(-1)^m (2\pi ib)^{-m} \int_R e^{2\pi i\omega b} \sum_{m_1=0}^{m} \binom{m}{m_1} \left(\frac{d}{d\omega}\right)^{m-m_1} \left[\omega^m \hat{f}(\omega)\right] \int_R (2\pi i a t)^{m_1} e^{2\pi i a\omega t} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(t^m \overline{\psi(t)}\right) dt\, d\omega.$$

Применим формулу Лейбница к выражению $\left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(t^m \overline{\psi(t)}\right)$, получим

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m \left(t^m \overline{\psi(t)}\right) = \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \frac{m!}{l!} t^l \left(\frac{d}{dt}\right)^l \overline{\psi(t)}.$$

Подставим в исходное неравенство и приведем подобные

$$\left|W_{\psi} f\right| \le \sup_{(a,b)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} \left| \sum_{m_1=0}^{m} \binom{m}{m_1} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\omega b} \left(\frac{d}{d\omega}\right)^{m-m_1} \left[\omega^m \hat{f}(\omega)\right] \times\right.$$

$$\times(2\pi ia)^{m_1}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\frac{\text{m}!}{l!}\int_R e^{2\pi ia\omega t}\,t^{m_1+l}\left(\frac{d}{dt}\right)^l\overline{\psi(t)}dtd\omega\Bigg|.$$

И в третий раз применим формулу Лейбница и получим следующее выражение:

$$\left|W_\psi f\right|\le\sup_{(a,b)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}}\Bigg|\sum_{m_1=0}^{m}\sum_{m_2=0}^{m-m_1}\sum_{l=0}^{m}\frac{(m!)^4}{m_1!m_2!(m-m_1-m_2)!(l!)^2(m-l)!(m_1+m_2)!}(2\pi a)^{m_1}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}}e^{2\pi i\omega b}\omega^{m_1+m_2}\frac{d^{m_2}}{d\omega^{m_2}}\hat{f}(\omega)\int_R e^{2\pi ia\omega t}\,t^{m_1+l}\left(\frac{d}{dt}\right)^l\overline{\psi(t)}dtd\omega\Bigg|.$$

Вводится замена

$$A(m,m_1,m_2,l)=\frac{(m!)^4}{m_1!m_2!(m-m_1-m_2)!(l!)^2(m-l)!(m_1+m_2)!}(2\pi a)^{m_1},$$

и где возможно выносим множители из-под модуля и упрощаем выражение, тогда последнее неравенство примет вид

$$\left|W_\psi f\right|\le\sum_{m_1=0}^{m}\sum_{m_2=0}^{m-m_1}\sum_{l=0}^{m}A(m,m_1,m_2,l)\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}}\left|\omega^{m_1+m_2}\frac{d^{m_2}}{d\omega^{m_2}}\hat{f}(\omega)\right|\left|\int_R\left|t^{m_1+l}\left(\frac{d}{dt}\right)^l\overline{\psi(t)}\right|dtd\omega\right..$$

Так как вейвлет-функция $\psi\in S$, то

$$\left|t^{m_1+l}\left(\frac{d}{dt}\right)^l\psi(t)\right|\le\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|t^{m_1+l}\left(\frac{d}{dt}\right)^l\psi(t)\right|=C_1,\text{ где константа } C_1>0$$

и

$$t^2\left|t^{m_1+l}\left(\frac{d}{dt}\right)^l\psi(t)\right|\le\sup_{t\in\mathbb{R}}\left(t^2\left|t^{m_1+l}\left(\frac{d}{dt}\right)^l\psi(t)\right|\right)=C_2,\text{ где константа } C_2>0.$$

Имеем

$$\left(1+t^2\right)\left|t^{m_1+l}\left(\frac{d}{dt}\right)^l\psi(t)\right|\le C_1+C_2=C_3.$$

Проинтегрируем обе части неравенства, в результате чего получим следующую оценку:

$$\int_{\mathbb{R}}\left|t^{m_1+l}\left(\frac{d}{dt}\right)^l\psi(t)\right|dt\le C_3\pi.$$

Аналогично поступаем со вторым интегралом. Так как $f\in S$, то и $\hat{f}\in S$, значит,

$$\left|\omega^{m_1+m_2}\frac{d^{m_2}}{d\omega^{m_2}}\hat{f}(\omega)\right|\le\sup_{\omega\in\mathbb{R}}\left|\omega^{m_1+m_2}\frac{d^{m_2}}{d\omega^{m_2}}\hat{f}(\omega)\right|.$$

Обозначим выражение в правой части неравенства

$$C_4 = \sup_{\omega\in\mathbb{R}}\left|\omega^{m_1+m_2}\frac{d^{m_2}}{d\omega^{m_2}}\hat{f}(\omega)\right|.$$

И

$$\omega^2\left|\omega^{m_1+m_2}\frac{d^{m_2}}{d\omega^{m_2}}\hat{f}(\omega)\right| \le \sup_{\omega\in\mathbb{R}}\left(\omega^2\left|\omega^{m_1+m_2}\frac{d^{m_2}}{d\omega^{m_2}}\hat{f}(\omega)\right|\right).$$

Обозначим выражение в правой части неравенства

$$C_5 = \sup_{\omega\in\mathbb{R}}\left(\omega^2\left|\omega^{m_1+m_2}\frac{d^{m_2}}{d\omega^{m_2}}\hat{f}(\omega)\right|\right).$$

Получим,

$$\left(1+\omega^2\right)\left|\omega^{m_1+m_2}\frac{d^{m_2}}{d\omega^{m_2}}\hat{f}(\omega)\right| \le C_4 + C_5.$$

В итоге,

$$\left|\omega^{m_1+m_2}\frac{d^{m_2}}{d\omega^{m_2}}\hat{f}(\omega)\right| \le \frac{C}{1+\omega^2},$$

где $C_4 + C_5 = C$.

Проинтегрируем обе части неравенства и найдем оценку подынтегрального выражения справа:

$$\int_{\mathbb{R}}\left|\omega^{m_1+m_2}\frac{d^{m_2}}{d\omega^{m_2}}\hat{f}(\omega)\right|d\omega \le \int_{\mathbb{R}}\frac{C}{1+\omega^2}d\omega = C\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = C\pi.$$

Теперь вернемся к оценке вейвлет-преобразования, введем обозначение $C_6 = CC_3\pi^2$, и оценка примет следующий вид:

$$\left|W_\psi f\right| \le \sum_{m_1=0}^{m}\binom{m}{m_1}\sum_{m_2=0}^{m-m_1}\binom{m-m_1}{m_2}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}A(m,m_1,m_2,l)C_6.$$

Таким образом $Wf(a,b)\in S(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R})$.

Теорема доказана.

Далее расширим наше вейвлет-преобразование на пространство, сопряженное к $S(\mathbb{R})$, то есть на пространство обобщенных функций медленного роста $S'(\mathbb{R})$.

В работе [9, с. 15] представлено следующее определение вейвлет-преобразования обобщенной функции медленного роста.

Определение 2. *Вейвлет-преобразованием обобщенной функции медленного роста f называется функция $W_\psi f(a,b)$, задаваемая равенством*

$$W_\psi f(a,b) = \left(f * \psi_{-a}\right)(b),$$

где функция $f\in S'$ и $\left(f*\psi_{-a}\right)(b) = f(\psi_{a,b})$, через $\psi_{-a}(t) = a^{-1}\psi\left(\frac{t}{-a}\right)\in S$, $a>0$, $b\in\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{R}$.

Аналогично предыдущей теореме 1 для вейвлет-преобразования обобщенных функций медленного роста доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Вейвлет-преобразование обобщенной функции медленного роста $W: S'(\mathbb{R})\to S(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R})$ является линейным и непрерывным.*

Доказательство. По определению пространства S' для каждой медленно растущей обобщенной функции $f \in S'$ существует постоянная C и числа $m \in \mathbb{N}_0$, такие, что для любой функции $\psi \in S$ выполняется неравенство

$$\left| f\left(a^{-1}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right)\right| \le C\left\| a^{-1}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right\|_m ,$$

где $0 < C < \infty$ и m зависят от f, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

Так как $\psi \in S$ и в [12, с. 119] утверждается, что «операция неособенной замены переменных $\varphi(Ax - B)$ непрерывна из S в S». Следовательно, и в нашем случае при растяжении функция $a^{-1}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ останется быстро убывающей.

Так как вейвлет $\psi \in S$ зависит от двух параметров, то для него справедлива норма:

$$\|\psi\|_m = \left| a^m b^m \left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial b}\right)^m a^{-1}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right| < \infty .$$

Обозначим $a^{-1}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = a^{-1}\psi(a,b)$. Далее используется формула Лейбница [11, с. 194]

$$\left| a^m b^m \frac{\partial^m}{\partial a^m} a^{-1} \frac{\partial^m}{\partial b^m} \psi\left(a,b\right)\right| = \left| a^m b^m \sum_{m_1=0}^{m} \frac{m!}{m_1!(m-m_1)!}\left(a^{-1}\right)^{(m_1)} \frac{\partial^m}{\partial b^m} \psi^{(m-m_1)}\left(a,b\right)\right| .$$

Вводится функция $B(k) = \begin{cases} 1, k = 0 \\ k, k \ge 1 \end{cases}$, получим

$$\left| a^m b^m \sum_{m_1=0}^{m} \frac{m!}{m_1!(m-m_1)!} B(m_1) a^{-1-m_1} \psi^{(m-m_1,m)}\left(a,b\right)\right| \le \sum_{m_1=0}^{m} \frac{m!}{m_1!(m-m_1)!} B(m_1) a^{-1-m_1} \left| a^m b^m \psi^{(m-m_1,m)}\left(a,b\right)\right| .$$

С учетом полученного возвращаемся к оценке вейвлет-преобразования обобщенной функции медленного роста:

$$\left|\langle f, \psi\rangle\right| \le C\|\psi\|_m \le C\sum_{m_1=0}^{m} \frac{m!}{m_1!(m-m_1)!} B(m_1) a^{-1-m_1} \left| a^m b^m \psi^{(m-m_1,m)}\left(a,b\right)\right| ,$$

где $0 < C < \infty$ и m зависят от f.

Таким образом, $W_\psi f(a,b) \in S(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. Теорема доказана.

Далее приведем формулу обратного вейвлет-преобразования для восстановления обобщенных функций медленного роста.

Теорема 3. *Пусть $f \in S'$ – обобщенная функция медленного роста и вейвлет $\psi \in S$, такой, что его преобразование Лапласа не обращается в нуль, $W_\psi f$ – ее вейвлет-преобразование, тогда для восстановления исходной функции f имеет место следующая формула:*

$$f = F^{-1}\left(F(W_\psi f) / F(\psi)\right),$$

где F – преобразование Фурье, F^{-1} – обратное преобразование Фурье.

Доказательство. Согласно доказанной ранее теореме $W_\psi : S'(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. Поэтому осуществляя преобразование Фурье над вейвлет-преобразованием обобщенной функции медленного роста, предварительно зафиксировав параметр масштабирования *a=const*, будут использованы определение преобразования Фурье для функции пространства Шварца [12, с. 124] и свойство свертки обобщенной функции медленного роста и финитной функции

$$F(W_\psi f) = F(f * \psi) = F(f)F(\psi).$$

Рассмотрим функцию $F(\psi)$, так как вейвлет-функция финитная, то в результате преобразования Фурье получаем аналитическую функцию. И согласно [2, с. 55] таких точек, где $F(\psi)=0$, конечное число, то мы их исключим и получим открытое множество, в котором функция аналитична, и рассматривать ее будем только на нем.

Далее делим на $F(\psi)$ и остается лишь $F(f)$. Так как $f \in S'$, то и $F(f) \in S'$ в соответствии с [12, с. 126], тогда, согласно доказанному в [12, с. 127], F^{-1} есть операция, обратная преобразованию Фурье, то есть $F^{-1}(F(f)) = f$.

И в работе [12, с. 127] доказано, что преобразование Фурье есть взаимно однозначное и непрерывное отображение из *S'* на *S'*, следовательно, становится очевидным, что полученная функция $f \in S'$. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим вейвлет-преобразование смещенной δ_{b_0} функции:

$$W_\psi f(a,b) = \delta_{b_0} * \psi_a(t) = \psi_a(t-b+b_0)\Big|_{b=0} = \psi_a(t+b_0).$$

Последнее выражение получено с учетом определения свертки функции с функцией Дирака и ее смещения.

Для построения обратного вейвлет-преобразования зафиксируем параметр смещения *a* и используем свойство преобразования Фурье для сдвига:

$$\frac{F\left(\psi\left(t+b_0\right)\right)}{F(\psi(t))} = \frac{e^{2\pi i\omega b_0}F\left(\psi\left(t\right)\right)}{F(\psi(t))} = e^{2\pi i\omega b_0}.$$

Теперь найдем обратное преобразование Фурье полученного выражения:

$$F^{-1}(e^{2\pi i\omega b_0}) = \int e^{2\pi i\omega b_0}\cdot 1\cdot e^{2\pi i\omega t}d\omega = \int e^{2\pi i\omega b_0}\cdot F(\delta)\cdot e^{2\pi i\omega t}d\omega =$$
$$= \int e^{2\pi i\omega b_0}\cdot\left(\int e^{2\pi i\omega\cdot 0}dt\right)\cdot e^{2\pi i\omega t}d\omega = \int\left(\int e^{2\pi i\omega\cdot 0}\cdot e^{2\pi i\omega b_0}dt\right)\cdot e^{2\pi i\omega t}d\omega =$$
$$= \int F(\delta_{b_0})\cdot e^{2\pi i\omega t}d\omega = F^{-1}(F(\delta_{b_0})) = \delta_{b_0}.$$

Таким образом, и для смещенной функции Дирака, которая является элементом пространства обобщенных функций медленного роста, выполняется формула обратного вейвлет-преобразования.

Заключение. В работе рассмотрено вейвлет-преобразование функций пространства Шварца и доказана принадлежность вейвлет-преобразования функций из пространства Шварца этому же пространству. Определено вейвлет-преобразование на пространстве обобщенных функций медленного роста и доказана его линейность и непрерывность. Приведена и доказана формула обратного вейвлет-преобразования для восстановления обобщенных функций медленного роста. Приведен пример, демонстрирующий справедливость формулы обратного вейвлет-преобразования. Таким образом, результаты, приведенные в данной работе, могут послужить дальнейшему развитию теории вейвлет-преобразования обобщенных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Holschneider, M. Oxford mathematical monographs: Wavelets: an analysis tools / M. Holschneider. – Oxford: University Press, 1999. – 448 p.
2. Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.

3. Parveen, N. Diversity technique using discrete wavelet transform in OFDM system / N. Parveen, K. Abdullah, R. Islam, R.I. Boby // International Journal of Engineering and Advanced Technology. – 2019. – Vol. 8, № 2. – P. 284–287.
4. Nekhili, R. Co-movements among precious metals and implications for portfolio management: A multivariate wavelet-based dynamic analysis [Electronic resource] / R. Nekhili, J. Sultan, W. Mensi // Resources Policy. – 2021. – Vol. 74. – Mode of access: https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2021.102419. – Date of access: 02.02.2022.
5. Schulte, J.A. Wavelet analysis for non-stationary, nonlinear time series [Electronic resource] / J.A. Schulte // Nonlinear Processes in Geophysics. – 2016. – Vol. 23, № 4. – P. 257–267. – Mode of access: 10.5194/npg-23-257-2016. – Date of access: 03.02.2022.
6. Application of modified wavelet and fractal modeling for detection of geochemical anomaly [Electronic resource] / H. Torshizian, P. Afzal, K. Rahbar, A.B. Yasrebi, A. Wetherelt, N. Fyzollahhi // Geochemistry. – 2021. – Vol. 81, № 4. – Mode of access: https://doi.org/10.1016/j.chemer.2021.125800. – Date of access: 19.01.2022.
7. Javdanian, H. Seismic ground response under wavelet-based decomposed earthquake records [Electronic resource] / H. Javdanian, A. Heidari, J. Raeisi // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. – 2021. – Vol. 149. – Mode of access: https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2021.106865. – Date of access: 02.02.2022.
8. Gogolewski, D. Fractional spline wavelets within the surface texture analysis [Electronic resource] / D. Gogolewski // Measurement. – 2021. – Vol. 179. – Mode of access: https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.109435. – Date of access: 16.01.2022.
9. Банюкевич, Е.В. Асимптотические свойства вейвлет-преобразований медленно растущих обобщенных функций / Е.В. Банюкевич, Ю.М. Вувуникян // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2017. – Т. 7, № 2. − С. 15−23.
10. Банюкевич, Е.В. Вейвлет-преобразование финитных обобщенных функций / Е.В. Банюкевич // Весці Беларускага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя Максіма Танка. Сер. 3, Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. – 2019. – № 4. – С. 32–39.
11. Зорич, В.А. Математический анализ: в 2 ч. / В.А. Зорич. – Изд. 10-е, исправл. − М.: МЦНМО, 2019. – Ч. 1. – 564 с.
12. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики: учебник для вузов / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. – 2-е изд., стер. − М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. − 400 с.

REFERENCES

1. Holschneider, M. Oxford mathematical monographs: Wavelets: an analysis tools / M. Holschneider. – Oxford: University Press, 1999. – 448 p.
2. Dobeshi I. *Desiat lektsii po veivletam* [Ten Lectures on Wavelets], Izhevsk: NITs “Reguliarnaya i khaoticheskaya dinamika”], 2001, 464 p.
3. Parveen, N. Diversity technique using discrete wavelet transform in OFDM system / N. Parveen, K. Abdullah, R. Islam, R.I. Boby // International Journal of Engineering and Advanced Technology. – 2019. – Vol. 8, № 2. – P. 284–287.
4. Nekhili, R. Co-movements among precious metals and implications for portfolio management: A multivariate wavelet-based dynamic analysis [Electronic resource] / R. Nekhili, J. Sultan, W. Mensi // Resources Policy. – 2021. – Vol. 74. – Mode of access: https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2021.102419. – Date of access: 02.02.2022.
5. Schulte, J.A. Wavelet analysis for non-stationary, nonlinear time series [Electronic resource] / J.A. Schulte // Nonlinear Processes in Geophysics. – 2016. – Vol. 23, № 4. – P. 257–267. – Mode of access: 10.5194/npg-23-257-2016. – Date of access: 03.02.2022.
6. Application of modified wavelet and fractal modeling for detection of geochemical anomaly [Electronic resource] / H. Torshizian, P. Afzal, K. Rahbar, A.B. Yasrebi, A. Wetherelt, N. Fyzollahhi // Geochemistry. – 2021. – Vol. 81, № 4. – Mode of access: https://doi.org/10.1016/j.chemer.2021.125800. – Date of access: 19.01.2022.
7. Javdanian, H. Seismic ground response under wavelet-based decomposed earthquake records [Electronic resource] / H. Javdanian, A. Heidari, J. Raeisi // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. – 2021. – Vol. 149. – Mode of access: https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2021.106865. – Date of access: 02.02.2022.
8. Gogolewski, D. Fractional spline wavelets within the surface texture analysis [Electronic resource] / D. Gogolewski // Measurement. – 2021. – Vol. 179. – Mode of access: https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.109435. – Date of access: 16.01.2022.
9. Baniukevich E.V., Vuvunikian Yu.M. *Vesnik Grodzenskaga dziarzhaunaga universiteta imia Yanki Kupaly. Ser. 2, Matematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichalnaya tekhnika i kiravanne.* [Journal of Yanka Kupala State University of Grodno. Ser. 2, Mathematics. Physics. Information Science, Calculation Machines and Management], 2017, 7(2), pp. 15−23.
10. Baniukevich E.V. *Vestsi Belaruskaga dziarzhaunaga pedagagichnaga universiteta imia Maksima Tanka. Ser. 3, Fizika. Matematika. Infarmatyka. Biyalogiya.* [Journal of Maxim Tank Belarusian State Pedagogical University. Ser. 3, Physics. Mathematics. Information Science. Biology], 2019, 4, pp. 32–39.
11. Zorich V.A. *Matematicheski analiz: v 2 ch.* [Mathematical Analysis: in 2 Parts], M.: MTsNMO, 2019, 1, 564 p.
12. Vladimirov V.S., Zharinov V.V. *Uravneniya matematicheskoi fiziki: uchebnik dlia vuzov* [Equations of Mathematical Physics: University Textbook], M.: FIZMATLIT, 2004, 400 p.

Поступила в редакцию 06.07.2022
Адрес для корреспонденции: e-mail: vuv64@mail.ru – Вувуникян Ю.М.