МАТЭМАТЫКА

УДК 517.926+517.977

О СВОЙСТВАХ СТРОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ МАТРИЦ

А.А. Козлов*, Т.А. Александрович**
**Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»*
***Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»*

Наличие строгой ρ-положительной регулярности у квадратной матрицы обеспечивает отделенность от нуля некоторым числом $\rho > 0$ всех ее главных угловых миноров.

Цель данной работы – введение понятий строгой положительной регулярности, строгой ρ-положительной регулярности матриц, а также изучение отдельных свойств таких матриц.

Материал и методы. *Материалом исследования являются невырожденные квадратные матрицы. При этом применены методы линейной алгебры и теории матриц.*

Результаты и их обсуждение. *Авторами, помимо строго ρ-положительно регулярных матриц, определены так называемые «почти единичные» матрицы и установлено представление последних в виде произведения трех строго ½-положительно регулярных матриц.*

Заключение. *Полученные результаты в дальнейшем предполагается использовать при доказательстве равномерной глобальной достижимости линейных динамических систем.*

Ключевые слова: *главные угловые (ведущие) миноры матрицы, строго положительно регулярная матрица, строго ρ-положительно регулярная матрица, «почти единичные» матрицы.*

ON THE PROPERTIES OF STRICTLY POSITIVE REGULAR MATRIXES

A.A. Kozlov*, T.A. Aleksandrovich**
**Education Establishment "Polotsk State University"*
***Education Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"*

The presence of strict ρ-positive regularity for a square matrix ensures that all of its principal angular minors are separated from zero by a certain number $\rho > 0$.

The purpose of this work is to introduce the concepts of strict positive regularity and strict ρ-positive regularity of matrices, as well as to study individual properties of such matrices.

Material and methods. *The research material is nondegenerate square matrices. The work uses methods of linear algebra and matrix theory.*

Findings and their discussion. *In addition to strictly positively regular matrices, the so-called "almost identity" matrices are defined and the representation of the latter as a product of three strictly ½-positively regular matrices is established.*

Conclusion. *The findings obtained are supposed to be used in the future in proving the uniform global reachability of linear dynamical systems.*

Key words: *principal angular (leading) matrix minors, strictly positively regular matrix, strictly ρ-positively regular matrix, “almost identity” matrices.*

В работе изучены отдельные свойства указанного множества матриц. Кроме того, определены так называемые «почти единичные матрицы» (т.е. такие, которые получены из единичной заменой некоторого четного количества 1, стоящих на главной диагонали, на -1) и установлено представление этих матриц в виде произведения трех строго 1/2-положительно регулярных матриц (последними являются операторы плоских вращений в пространстве $\mathbb{R}^n$).

Полученные результаты в дальнейшем предполагается использовать при доказательстве равномерной глобальной достижимости линейных динамических (дискретных и непрерывных) систем. Этот факт подтверждает актуальность тематики проведенных в работе исследований.

Цель статьи – введение свойств строгой положительной регулярности, а также строгой ρ-положительной регулярности квадратных матриц. Наличие последнего свойства у матрицы обеспечивает отделенность от нуля некоторым числом $\rho > 0$ всех ее главных (ведущих) угловых миноров.

Материал и методы. Материалом исследования являются невырожденные квадратные матрицы *n*-го порядка. В работе использованы методы линейной алгебры и теории матриц.

Результаты и их обсуждение. Пусть $\mathbb{R}^n$ – *n*-мерное евклидово векторное пространство с нормой $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ (здесь символ *T* означает операцию транспонирования вектора или матрицы); $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – векторы (столбцы) канонического ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$; M_{mn} – пространство вещественных матриц размерности $m \times n$ со спектральной (операторной) нормой $\|H\| = \max_{\|x\|=1} \|Hx\|$, т.е. нормой, индуцируемой на M_{mn} евклидовой нормой в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ [1, с. 357]; $M_n := M_{nn}$. Пусть также $E = [e_1, \ldots, e_n] \in M_n$ – единичная матрица.

Строгая положительная регулярность квадратных матриц

Определение 1 [1, с. 30]. *Для любого числа* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *и всякой матрицы* $H = (h_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n$ *через* $H\{k\} \in M_k$ *обозначим ее главную ведущую подматрицу порядка k, т.е.*

$$H\{1\} := h_{11} \in M_1,\quad H\{2\} := \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \in M_2,\ \ldots,\ H\{n\} := H \in M_n.$$

Главным ведущим (угловым) минором k-го порядка квадратной матрицы $H \in M_n$ *будем называть [1, с. 30] определитель ее ведущей главной подматрицы k-го порядка, т.е.* $\det H\{k\}$.

На основании работы [2] дадим следующее

Определение 2 [2, с. 97]. *Квадратную матрицу* $H \in M_n$ *будем называть строго регулярной, если при любом* $i = \overline{1,n}$ *выполняются неравенства* $\det H\{i\} \neq 0$.

По аналогии с последней дефиницией введем используемые нами далее

Определение 3. *Будем говорить, что квадратная матрица* $H \in M_n$ *является строго положительно регулярной, если при каждом* $i = \overline{1,n}$ *справедливы соотношения* $\det H\{i\} > 0$, *т.е. все главные ведущие (угловые) миноры матрицы H – положительные числа.*

Определение 4. *Возьмем любое число* $\rho > 0$. *Матрицу* $H \in M_n$ *назовем строго* ρ*-положительно регулярной, если при всяком* $i = \overline{1,n}$ *имеют место неравенства* $\det H\{i\} \geq \rho$.

При любом числе $k \in \mathbb{N}$ через $\mathcal{H}_k \subset M_k$ обозначим совокупность строго положительно регулярных матриц *k*-го порядка, а через $U_k^+ \subset \mathcal{H}_k$ ($L_k^+ \subset \mathcal{H}_k$) – множество всех верхних (нижних) треугольных $(k \times k)$-матриц с положительными диагональными элементами.

Теорема 1. *Для любых матриц* $U \in U_n^+$ *и* $L \in L_n^+$ *включение* $H \in \mathcal{H}_n$ *влечет соотношение* $LHU \in \mathcal{H}_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольные матрицы $U \in U_n^+$, $L \in L_n^+$, $H \in \mathcal{H}_n$ и определим матрицу $M := LHU \in M_n$. Покажем, что последняя обладает свойством строгой положительной регулярности, для чего установим положительность всех ее главных ведущих (угловых) миноров $\det M\{i\}$, $i = \overline{1,n}$. Сразу заметим, что при $i = n$ справедливы соотношения $\det M\{n\} = \det M = \det(L \cdot H \cdot U) = \det L \cdot \det H \cdot \det U > 0$, ввиду определения матриц L, H, U. Поэтому достаточно установить неравенство $\det M\{i\} > 0$ при каждом $i = \overline{1,n-1}$.

Возьмем любое число $k \in \{1,...,n-1\}$ и рассмотрим блочное разбиение матриц U, L и H:

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & O_{k,n-k} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ O_{n-k,k} & U_{22} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где L_{11}, U_{11}, H_{11} – квадратные блоки k-го порядка и $O_{k,n-k}$, $O_{n-k,k}$ – нулевые блоки размерностей $k \times (n-k)$ и $(n-k) \times k$ соответственно и H_{12} – блок размерности $k \times (n-k)$. Поскольку всякая главная ведущая подматрица нижней (верхней) треугольной матрицы с положительными диагональными элементами также является нижней (соответственно – верхней) треугольной матрицей с положительной диагональю, то для блоков L_{11} и U_{11} (выступающих главными ведущими подматрицами k-го порядка матриц $L \in L_n^+$, $U \in U_n^+$) справедливы включения $L_{11} \in L_k^+$, $U_{11} \in U_k^+$, и значит, оценки $\det L_{11} > 0$ и $\det U_{11} > 0$. Кроме того, из включений $H_{11} \in M_k$ и $H \in \mathcal{H}_n$ вытекают соотношения $\det H_{11} = \det H\{k\} > 0$. Таким образом, для матриц L_{11}, H_{11} и U_{11} справедливы неравенства

$$\det L_{11} > 0, \quad \det H_{11} > 0, \quad \det U_{11} > 0. \tag{2}$$

В силу матричных разбиений, указанных в формуле (1), используя правило умножения блочных матриц [1, с. 71–72], для матрицы $M \in M_n$ установим следующую цепочку равенств

$$\begin{aligned} M = LHU &= \begin{pmatrix} L_{11} & O_{k,n-k} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ O_{n-k,k} & U_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} L_{11}H_{11} & L_{11}H_{12} \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ O_{n-k,k} & U_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}H_{11}U_{11} & * \\ * & * \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

(здесь блоки-матрицы, не влияющие на ход дальнейших рассуждений, заменены символом *, а блок $L_{11}H_{11}U_{11}$ является главной ведущей подматрицей k-го порядка матрицы M). Поскольку справедливы оценки (2), то на основании формулы (3) установим соотношения

$$\det M\{k\} = \det(L_{11}H_{11}U_{11}) = \det L_{11} \cdot \det H_{11} \cdot \det U_{11} > 0.$$

Ввиду произвольности выбора числа $k \in \{1,...,n-1\}$ последнее неравенство выполняется при каждом $k \in \{1, n-1\}$. Тогда, в силу сделанного в начале доказательства данной теоремы замечания, оценки $\det M\{i\} > 0$ справедливы для всех $i = \overline{1,n}$, т.е. имеет место требуемое соотношение $LHU = M \in \mathcal{H}_n$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. *Проведя рассуждение, аналогичное доказательству теоремы 1, легко установим, что если матрицы* $L, H, U \in M_n$ *суть строго ρ-положительно регулярные при некотором фиксированном* $\rho > 0$, *то матрица* $LHU \in M_n$ *является строго* ρ_1*-положительно регулярной матрицей, где* $\rho_1 := \rho^3$.

Теорема 2. *Свойство строгой положительной регулярности инвариантно относительно операции транспонирования матриц.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем любую строго положительно регулярную матрицу $A := (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, т.е. $A \in \mathcal{H}_n$. Тогда по определению $\mathcal{H}_n$ при всех $i = \overline{1,n}$ для главных ведущих подматриц

$A\{k\} := (a_{ij})_{i,j=\overline{1,k}}$ выполняются оценки $\det A\{k\} > 0$. Отсюда с учетом очевидных равенств $\left(A\{k\}\right)^T = \left((a_{ij})_{i,j=\overline{1,k}}\right)^T = (a_{ji})_{i,j=\overline{1,k}} = A^T\{k\}$ следует, что при любом $i=\overline{1,n}$ справедливы соотношения $\det A^T\{k\} = \det\left(A\{k\}\right)^T = \det A\{k\} > 0$, означающие включение $A^T \in \mathcal{H}_n$, т.е. строго положительную регулярность A^T. Теорема 2 доказана.

Замечание 2. *На основании доказательства теоремы 2 легко установить инвариантность свойства строгой ρ-положительной регулярности относительно операции транспонирования.*

О представлении «почти единичной» матрицы в виде произведения строго положительно регулярных матриц

Здесь и далее для любых чисел $i, j \in \{1,2,...,n\}$ через ε_{ij} будем обозначать матрицу

$$\varepsilon_{ij} := e_i e_j^T \in M_n.$$

В силу ортонормированности векторов e_i, $i=\overline{1,n}$, канонического базиса пространства $\mathbb{R}^n$ при всяких индексах $p,s,r,q \in \{1,\ldots,n\}$ для вектора e_r и матриц $\varepsilon_{ps} \in M_n$ и $\varepsilon_{rq} \in M_n$ выполняются равенства

$$\varepsilon_{ps} e_r = \left(e_p e_s^T\right) e_r = \begin{cases} e_p \cdot 0 \text{ при } s \neq r, \\ e_p \cdot 1 \text{ при } s = r \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ при } s \neq r, \\ e_p \text{ при } s = r, \end{cases} \tag{4}$$

$$e_r^T \varepsilon_{ps} = e_r^T \left(e_p e_s^T\right) = \begin{cases} 0 \cdot e_s^T \text{ при } r \neq p, \\ 1 \cdot e_s^T \text{ при } r = p \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ при } r \neq p, \\ e_s^T \text{ при } r = p, \end{cases} \tag{4'}$$

$$\varepsilon_{ps} \cdot \varepsilon_{rq} = \left(e_p e_s^T\right) \cdot \left(e_r e_q^T\right) = \begin{cases} e_p \cdot 0 \cdot e_q^T \text{ при } s \neq r, \\ e_p \cdot 1 \cdot e_q^T \text{ при } s = r \end{cases} = \begin{cases} 0 \quad \text{при } s \neq r, \\ \varepsilon_{pq} \text{ при } s = r. \end{cases} \tag{5}$$

Пусть $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, тогда для любых чисел $k, l \in \{1,\ldots,r\}$, $k < l$, и $\alpha \in (0,2\pi)$ определим квадратную матрицу r-го порядка

$$J(\alpha;k,l) := \cos\alpha \cdot \varepsilon_{kk} + \sin\alpha \cdot \varepsilon_{kl} - \sin\alpha \cdot \varepsilon_{lk} + \cos\alpha \cdot \varepsilon_{ll} =$$

$$= \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ l \\ \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & k & & l & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & & \cos\alpha & & \sin\alpha & & 0 \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & & -\sin\alpha & & \cos\alpha & & 0 \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{6}$$

Возьмем любые, не равные между собой, числа $k, l, r, s \in \{1, \ldots, n\}$ $(k < l$ и $r < s)$, $\alpha, \beta \in (0,2\pi)$ и рассмотрим $(n \times n)$-матрицы $J_{kl} := J(\alpha;k,l)$ и $J_{rs} := J(\beta;r,s)$. Справедлива следующая

Лемма 1. *При любых числах* $k,l,r,s \in \{1,\ldots,n\}$ $(k<l$, $r<s)$ *и* $\alpha,\beta \in (0,2\pi)$ *для* $(n \times n)$*-матриц* $J(\alpha;k,l)$ *и* $J(\beta;r,s)$ *выполняются равенства* $J(\alpha;k,l) \cdot J(\beta;r,s) = 0$ *и* $J^3(\alpha;k,l) = J(3\alpha;k,l)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные числа $k,l,r,s \in \{1,\ldots,n\}$, $k<l$, $r<s$, $\alpha,\beta \in (0,2\pi)$ и рассмотрим матрицы $J(\alpha;k,l)$, $J(\beta;r,s) \in M_n$. Первое равенство из формулировки леммы 1 очевидным образом следует из определения этих матриц, неравенств $k \neq l \neq r \neq s$ и соотношений (5)

$$J(\alpha;k,l)\cdot J(\beta;r,s)=(\cos\alpha\cdot\varepsilon_{kk}+\sin\alpha\cdot\varepsilon_{kl}-\sin\alpha\cdot\varepsilon_{lk}+\cos\alpha\cdot\varepsilon_{ll})\times$$
$$\times(\cos\beta\cdot\varepsilon_{rr}+\sin\beta\cdot\varepsilon_{rs}-\sin\beta\cdot\varepsilon_{sr}+\cos\beta\cdot\varepsilon_{ss})=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta\cdot\varepsilon_{kk}\varepsilon_{rr}+\cos\alpha\sin\beta\cdot\varepsilon_{kk}\varepsilon_{rs}-\cos\alpha\sin\beta\cdot\varepsilon_{kk}\varepsilon_{sr}+\cos\alpha\cos\beta\cdot\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ss}+$$
$$+\sin\alpha\cos\beta\cdot\varepsilon_{kl}\varepsilon_{rr}+\sin\alpha\sin\beta\cdot\varepsilon_{kl}\varepsilon_{rs}-\sin\alpha\sin\beta\cdot\varepsilon_{kl}\varepsilon_{sr}+\sin\alpha\cos\beta\cdot\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ss}-$$
$$-\sin\alpha\cos\beta\cdot\varepsilon_{lk}\varepsilon_{rr}-\sin\alpha\sin\beta\cdot\varepsilon_{lk}\varepsilon_{rs}+\sin\alpha\sin\beta\cdot\varepsilon_{lk}\varepsilon_{sr}-\sin\alpha\cos\beta\cdot\varepsilon_{lk}\varepsilon_{ss}+$$
$$+\cos\alpha\cos\beta\cdot\varepsilon_{ll}\varepsilon_{rr}+\cos\alpha\sin\beta\cdot\varepsilon_{ll}\varepsilon_{rs}-\cos\alpha\sin\beta\cdot\varepsilon_{ll}\varepsilon_{sr}+\cos\alpha\cos\beta\cdot\varepsilon_{ll}\varepsilon_{ss}=0.$$

Кроме того, на основании соотношений (5), а также формул двойного угла для синуса и косинуса имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned}J^2(\alpha;k,l)&=(\cos\alpha\cdot\varepsilon_{kk}+\sin\alpha\cdot\varepsilon_{kl}-\sin\alpha\cdot\varepsilon_{lk}+\cos\alpha\cdot\varepsilon_{ll})^2=\\&=\cos^2\alpha\cdot\varepsilon_{kk}+(\cos\alpha\sin\alpha)\cdot\varepsilon_{kl}-0+0+0+0-\sin^2\alpha\cdot\varepsilon_{kk}+(\sin\alpha\cos\alpha)\cdot\varepsilon_{kl}-\\&-(\sin\alpha\cos\alpha)\cdot\varepsilon_{lk}-\sin^2\alpha\cdot\varepsilon_{ll}+0-0+0+0-(\sin\alpha\cos\alpha)\cdot\varepsilon_{lk}+\cos^2\alpha\cdot\varepsilon_{ll}=\\&=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot\varepsilon_{kk}+2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\varepsilon_{kl}-2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\varepsilon_{lk}+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot\varepsilon_{ll}=\\&=\cos2\alpha\cdot\varepsilon_{kk}+\sin2\alpha\cdot\varepsilon_{kl}-\sin2\alpha\cdot\varepsilon_{lk}+\cos2\alpha\cdot\varepsilon_{ll}=J(2\alpha;k,l).\end{aligned}\tag{7}$$

Действуя аналогично последней цепочке равенств, применяя равенство (7), а также формулы косинуса и синуса суммы углов, легко установим соотношение $J^3(\alpha;k,l)=J(3\alpha;k,l)$. Лемма 1 доказана.

Зафиксируем произвольное число $r\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Для любых индексов $k,l\in\{1,...,r\}$ $(k<l)$ и $\alpha\in(0,2\pi)$ введем в рассмотрение матрицу r-го порядка

$$\Pi(\alpha;k,l):=E+J(\alpha;k,l)-\varepsilon_{kk}-\varepsilon_{ll},\tag{8}$$

в которой матрица $J(\alpha;k,l)\in M_r$ определяется формулой (6).

Замечание 3. *Матрица $\Pi(\alpha;k,l)\in M_r$ как линейный оператор, действующий в пространстве $\mathbb{R}^r$, осуществляет плоское вращение [1, с. 97] векторов из $\mathbb{R}^r$ на угол α от e_l к e_k в плоскости Oe_ke_l.*

Лемма 2. *Для любых чисел $k,l\in\{1,...,n\}$ $(k<l)$, $\alpha,\beta\in(0,2\pi)$ и матриц $J(\alpha;k,l)$, $J(\beta;k,l)\in M_n$ справедливо равенство $J(\alpha;k,l)\cdot J(\beta;k,l)=J(\alpha+\beta;k,l)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольные числа $k,l\in\{1,...,n\}$, $k<l$, $\alpha,\beta\in(0,2\pi)$ и введем в рассмотрение матрицы $J(\alpha;k,l),J(\beta;k,l)\in M_n$, определяемые формулой (6) при $r=n$. Перемножая эти матрицы и, далее, раскрывая скобки, на основании соотношений (5) получим равенства

$$J(\alpha;k,l)\cdot J(\beta;k,l)=(\cos\alpha\cdot\varepsilon_{kk}+\sin\alpha\cdot\varepsilon_{kl}-\sin\alpha\cdot\varepsilon_{lk}+\cos\alpha\cdot\varepsilon_{ll})\times$$
$$\times(\cos\beta\cdot\varepsilon_{kk}+\sin\beta\cdot\varepsilon_{kl}-\sin\beta\cdot\varepsilon_{lk}+\cos\beta\cdot\varepsilon_{ll})=\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\varepsilon_{kk}\cdot\varepsilon_{kk}+$$
$$+\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\varepsilon_{kk}\cdot\varepsilon_{kl}-\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\varepsilon_{kk}\cdot\varepsilon_{lk}+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\varepsilon_{kk}\cdot\varepsilon_{ll}+$$
$$+\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\varepsilon_{kl}\cdot\varepsilon_{kk}+\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\varepsilon_{kl}\cdot\varepsilon_{kl}-\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\varepsilon_{kl}\cdot\varepsilon_{lk}+$$
$$+\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\varepsilon_{kl}\cdot\varepsilon_{ll}-\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\varepsilon_{lk}\cdot\varepsilon_{kk}-\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\varepsilon_{lk}\cdot\varepsilon_{kl}+$$
$$+\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\varepsilon_{lk}\cdot\varepsilon_{lk}-\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\varepsilon_{lk}\cdot\varepsilon_{ll}+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\varepsilon_{ll}\cdot\varepsilon_{kk}+$$
$$+\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\varepsilon_{ll}\cdot\varepsilon_{kl}-\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\varepsilon_{ll}\cdot\varepsilon_{lk}+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\varepsilon_{ll}\cdot\varepsilon_{ll}=$$
$$=\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\varepsilon_{kk}+\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\varepsilon_{kl}-0+0+0+0-\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\varepsilon_{kk}+$$
$$+\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\varepsilon_{kl}-\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\varepsilon_{lk}-\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\varepsilon_{ll}+0-0+0+0-$$
$$-\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\varepsilon_{lk}+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\varepsilon_{ll}.$$

Отсюда, приведя подобные слагаемые и воспользовавшись формулами косинуса и синуса суммы углов, установим требуемые соотношения

$$J(\alpha;k,l)\cdot J(\beta;k,l)=\cos(\alpha+\beta)\cdot\varepsilon_{kk}+\sin(\alpha+\beta)\cdot\varepsilon_{kl}-$$
$$-\sin(\alpha+\beta)\cdot\varepsilon_{lk}+\cos(\alpha+\beta)\cdot\varepsilon_{ll}=J(\alpha+\beta;k,l).$$

Лемма 2 доказана.

Замечание 4. *Для матриц $\Pi(\alpha;k,l)$, $\Pi(\beta;k,l)\in M_n$ как линейных операторов, действующих в пространстве $\mathbb{R}^n$, последнее равенство указывает нам на то, что их произведение $\Pi(\alpha;k,l)\cdot\Pi(\beta;k,l)$ определяет композицию двух плоских вращений векторов из $\mathbb{R}^n$ на углы соответственно β и α от e_l к e_k в плоскости Oe_ke_l.*

На основании лемм 1 и 2 установим следующее утверждение.

Лемма 3. *При всяких числах $k,l\in\{1,...,n\}$ $(k<l)$ и $\alpha\in(0;2\pi)$ для матрицы $\Pi(\alpha;k,l)\in M_n$ имеет место равенство $\Pi^3(\alpha;k,l)=E+J(3\alpha;k,l)-\varepsilon_{kk}-\varepsilon_{ll}$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольные числа $k,l\in\{1,...,n\}$ $(k<l)$, $\alpha\in(0;2\pi)$ и рассмотрим квадратную $(n\times n)$ -матрицу $\Pi(\alpha;k,l)$. В силу определения (8) последней имеют место соотношения

$$\Pi^2(\alpha;k,l)=(E+J(\alpha;k,l)-\varepsilon_{kk}-\varepsilon_{ll})\cdot(E+J(\alpha;k,l)-\varepsilon_{kk}-\varepsilon_{ll})=$$
$$=E+J(\alpha;k,l)-\varepsilon_{kk}-\varepsilon_{ll}+J(\alpha;k,l)+J^2(\alpha;k,l)-J(\alpha;k,l)\cdot\varepsilon_{kk}-$$
$$-J(\alpha;k,l)\cdot\varepsilon_{ll}-\varepsilon_{kk}-\varepsilon_{kk}\cdot J(\alpha;k,l)+\varepsilon_{kk}\cdot\varepsilon_{kk}+\varepsilon_{kk}\cdot\varepsilon_{ll}-$$
$$-\varepsilon_{ll}-\varepsilon_{ll}\cdot J(\alpha;k,l)+\varepsilon_{ll}\cdot\varepsilon_{kk}+\varepsilon_{ll}\cdot\varepsilon_{ll}.$$

Тогда отсюда, с учетом верного равенства $J^2(\alpha;k,l)=J(2\alpha;k,l)$, вытекающего из формулы (7), а также определения матрицы $J(\alpha;k,l)$, следует соотношение

$$\Pi^2(\alpha;k,l)=E+2J(\alpha;k,l)-\varepsilon_{kk}-\varepsilon_{ll}+J(2\alpha;k,l)-$$
$$-(\cos\alpha\cdot\varepsilon_{kk}+\sin\alpha\cdot\varepsilon_{kl}-\sin\alpha\cdot\varepsilon_{lk}+\cos\alpha\cdot\varepsilon_{ll})\cdot\varepsilon_{kk}-$$
$$-(\cos\alpha\cdot\varepsilon_{kk}+\sin\alpha\cdot\varepsilon_{kl}-\sin\alpha\cdot\varepsilon_{lk}+\cos\alpha\cdot\varepsilon_{ll})\cdot\varepsilon_{ll}-$$
$$-\varepsilon_{kk}\cdot(\cos\alpha\cdot\varepsilon_{kk}+\sin\alpha\cdot\varepsilon_{kl}-\sin\alpha\cdot\varepsilon_{lk}+\cos\alpha\cdot\varepsilon_{ll})-$$
$$-\varepsilon_{ll}\cdot(\cos\alpha\cdot\varepsilon_{kk}+\sin\alpha\cdot\varepsilon_{kl}-\sin\alpha\cdot\varepsilon_{lk}+\cos\alpha\cdot\varepsilon_{ll}),$$

раскрывая в котором скобки и используя формулы (5), установим равенство

$$\Pi^2(\alpha;k,l)=E+2J(\alpha;k,l)-\varepsilon_{kk}-\varepsilon_{ll}+J(2\alpha;k,l)-$$
$$-(\cos\alpha\cdot\varepsilon_{kk}+0-\sin\alpha\cdot\varepsilon_{lk}+0)-(0+\sin\alpha\cdot\varepsilon_{kl}-0+\cos\alpha\cdot\varepsilon_{ll})-$$
$$-(\cos\alpha\cdot\varepsilon_{kk}+\sin\alpha\cdot\varepsilon_{kl}-0+0)-(0+0-\sin\alpha\cdot\varepsilon_{lk}+\cos\alpha\cdot\varepsilon_{ll}).$$

Откуда, воспользовавшись определением матрицы $J(\alpha;k,l)$, получим следующие соотношения:

$$\Pi^2(\alpha;k,l)=E+2(\cos\alpha\cdot\varepsilon_{kk}+\sin\alpha\cdot\varepsilon_{kl}-\sin\alpha\cdot\varepsilon_{lk}+\cos\alpha\cdot\varepsilon_{ll})-$$
$$-\varepsilon_{kk}-\varepsilon_{ll}+J(2\alpha;k,l)-2(\cos\alpha\cdot\varepsilon_{kk}+\sin\alpha\cdot\varepsilon_{kl}-\sin\alpha\cdot\varepsilon_{lk}+\cos\alpha\cdot\varepsilon_{ll})=$$
$$=E+J(2\alpha;k,l)-\varepsilon_{kk}-\varepsilon_{ll}.$$

Замечание 5. *Геометрически последнее равенство означает, что линейный оператор $\Pi^2(\alpha;k,l)\in M_n$ осуществляет композицию двух плоских вращений векторов из пространства $\mathbb{R}^n$ на один и тот же угол α от e_l к e_k в плоскости Oe_ke_l.*

Тогда, пользуясь последним равенством, определением матриц $\Pi(\alpha;k,l)$ и $J(\alpha;k,l)$, формулами (5), а также леммой 2, аналогичным вышеуказанному образом легко установим равенство $\Pi^3(\alpha;k,l) = E + J(3\alpha;k,l) - \varepsilon_{kk} - \varepsilon_{ll}$. Действительно, имеем соотношение

$$\Pi^3(\alpha;k,l) = \Pi^2(\alpha;k,l)\cdot\Pi(\alpha;k,l) =$$
$$= (E - \varepsilon_{kk} - \varepsilon_{ll} + J(2\alpha;k,l))\cdot(E - \varepsilon_{kk} - \varepsilon_{ll} + J(\alpha;k,l)) =$$
$$= E - \varepsilon_{kk} - \varepsilon_{ll} + J(\alpha;k,l) - \varepsilon_{kk} + \varepsilon_{kk} + 0 - \varepsilon_{kk}\cdot J(\alpha;k,l) -$$
$$-\varepsilon_{ll} + 0 + \varepsilon_{ll} - \varepsilon_{ll}\cdot J(\alpha;k,l) + J(2\alpha;k,l) - J(2\alpha;k,l)\cdot\varepsilon_{kk} -$$
$$-J(2\alpha;k,l)\cdot\varepsilon_{ll} + J(2\alpha;k,l)\cdot J(\alpha;k,l) = E - \varepsilon_{kk} - \varepsilon_{ll} + J(\alpha;k,l) -$$
$$-\varepsilon_{kk}\cdot(\cos\alpha\cdot\varepsilon_{kk} + \sin\alpha\cdot\varepsilon_{kl} - \sin\alpha\cdot\varepsilon_{lk} + \cos\alpha\cdot\varepsilon_{ll}) -$$
$$-\varepsilon_{ll}\cdot(\cos\alpha\cdot\varepsilon_{kk} + \sin\alpha\cdot\varepsilon_{kl} - \sin\alpha\cdot\varepsilon_{lk} + \cos\alpha\cdot\varepsilon_{ll}) + J(2\alpha;k,l) -$$
$$-(\cos 2\alpha\cdot\varepsilon_{kk} + \sin 2\alpha\cdot\varepsilon_{kl} - \sin 2\alpha\cdot\varepsilon_{lk} + \cos 2\alpha\cdot\varepsilon_{ll})\cdot\varepsilon_{kk} -$$
$$-(\cos 2\alpha\cdot\varepsilon_{kk} + \sin 2\alpha\cdot\varepsilon_{kl} - \sin 2\alpha\cdot\varepsilon_{lk} + \cos 2\alpha\cdot\varepsilon_{ll})\cdot\varepsilon_{ll} + J(3\alpha;k,l) =$$
$$= E - \varepsilon_{kk} - \varepsilon_{ll} + J(\alpha;k,l) - (\cos\alpha\cdot\varepsilon_{kk} + \sin\alpha\cdot\varepsilon_{kl} - 0 + 0) -$$
$$-(0 + 0 - \sin\alpha\cdot\varepsilon_{lk} + \cos\alpha\cdot\varepsilon_{ll}) + J(2\alpha;k,l) - (\cos 2\alpha\cdot\varepsilon_{kk} + 0 - \sin 2\alpha\cdot\varepsilon_{lk} + 0) -$$
$$-(0 + \sin 2\alpha\cdot\varepsilon_{kl} - 0 + \cos 2\alpha\cdot\varepsilon_{ll}) + J(3\alpha;k,l) = E - \varepsilon_{kk} - \varepsilon_{ll} + J(\alpha;k,l) -$$
$$-J(\alpha;k,l) + J(2\alpha;k,l) - J(2\alpha;k,l) + J(3\alpha;k,l) = E - \varepsilon_{kk} - \varepsilon_{ll} + J(3\alpha;k,l).$$

Лемма 3 доказана.

При любых $r \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ и $k,l \in \{1,\ldots,r\}$, где $k < l$, через $\Phi(k,l)$ обозначим квадратную $(r\times r)$-матрицу $\Phi(k,l) := \Pi(\pi/3;k,l) = E + J(\pi/3;k,l) - \varepsilon_{kk} - \varepsilon_{ll}$, а через $\bar{E}(k,l)$ – матрицу $\bar{E}(k,l) = E - 2\cdot\varepsilon_{kk} - 2\cdot\varepsilon_{ll} \in M_r$.

Замечание 6. *Последняя матрица получена из единичной заменой чисел 1, стоящих в k-й и l-й строках, на -1.*

Теорема 3. *При любых числах* $r \in \mathbb{N}$ *и* $1 \le k < l \le r$ *для матрицы* $\Phi(k,l) \in M_r$ *справедливы равенства* $\Phi^3(k,l) = \bar{E}(k,l)$ *и* $\det\Phi(k,l) = 1$ *и оценки* $\det\Phi(k,l)\{i\} \ge 1/2$ *для всех* $i = \overline{1,r}$.

Доказательство. Возьмем любые числа $r \in \mathbb{N}$ и $k,l \in \{1,\ldots,r\}$, $k < l$, и рассмотрим матрицу $\Phi(k,l) := \Phi \in M_r$. Докажем равенство $\Phi^3(k,l) = \bar{E}(k,l)$. В силу определения этой матрицы и леммы 3 для $\alpha = \pi/3$ имеем соотношения $\Phi^3 = \Pi^3(\pi/3;k,l) = E + J(\pi;k,l) - \varepsilon_{kk} - \varepsilon_{ll}$, из которых, ввиду определения (6) матрицы $J(\alpha;k,l)$, следуют нужные равенства $\Phi^3 = E - \varepsilon_{kk} - \varepsilon_{ll} - 1\cdot\varepsilon_{kk} + 0\cdot\varepsilon_{kl} - 0\cdot\varepsilon_{lk} - 1\cdot\varepsilon_{ll} = E - 2\cdot\varepsilon_{kk} - 2\cdot\varepsilon_{kk} = \bar{E}(k,l)$.

Теперь покажем, что при всяком $i = \overline{1,r}$ для матрицы $\Phi = \Phi(k,l)$ имеет место оценка $\det\Phi\{i\} \ge 1/2$. Из структуры матрицы $\Phi(k,l)$ следует, что при всяком $i = \overline{1, k{-}1}$ главная угловая подматрица *i*-го порядка совпадает с единичной матрицей того же порядка, поэтому $\det\Phi\{i\} = 1 \ge 1/2$ для всех $i = \overline{1, k{-}1}$. При $i = \overline{k, l{-}1}$ главная ведущая подматрица *i*-го порядка совпадает с верхнетреугольной матрицей, на главной диагонали которой находятся единицы, за исключением *k*-й строки (здесь диагональным элементом является $\cos(\pi/3)$). Отсюда, поскольку определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, следует, что при всех $i = \overline{k, l{-}1}$ для главного углового минора *i*-го порядка матрицы $\Phi(k,l)$ справедливы соотношения $\det\Phi\{i\} = 1\cdot1\cdot\ldots\cdot1\cdot\cos(\pi/3)\cdot1\cdot\ldots\cdot1 = 1/2 \ge 1/2$. Рассмотрим, наконец, определитель подматрицы $\Phi(k,l)\{i\}$ при любом $i \in \{l,\ldots,r\}$. Последовательно используя формулу разложения Лапласа [1, с. 19] по элементам каждого из столбцов матрицы $\Phi(k,l)\{i\}$, начиная с первого, за исключением *k*-го и *l*-го столбцов, в результате придем к равенству

$$\det\Phi(k,l)\{i\} = \begin{vmatrix} \cos(\pi/3) & \sin(\pi/3) \\ -\sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{vmatrix}, \quad i \in \{l,\ldots,r\}, \tag{9}$$

очевидно, обеспечивающему при всяком $i \in \{l,\ldots,r\}$ оценку $\det\Phi(k,l)\{i\} \geq 1/2$. Таким образом, для любого $i = \overline{1,r}$ выполняется требуемое неравенство $\det\Phi(k,l)\{i\} \geq 1/2$.

Кроме того, так как главный угловой минор r-го порядка матрицы совпадает с ее определителем, то, ввиду формулы (9), выполняется и равенство $\det\Phi(k,l) = \det\Phi(k,l)\{r\} = 1$. Теорема 3 доказана.

Замечание 7. *Теорема 3 устанавливает представление матрицы $\bar{E}(k,l) \in M_n$ в виде произведения трех матриц $\Phi(k,l) \in M_n$, являющихся строго ρ-положительно регулярными матрицами с $\rho = 1/2$.*

Для произвольных чисел $1 \leq k_1 < l_1 < k_2 < l_2 < \ldots < k_s < l_s \leq n$ и $\alpha \in (0,2\pi)$ рассмотрим матрицы $J(\alpha;k_1,l_1), J(\alpha;k_2,l_2), \ldots, J(\alpha;k_s,l_s) \in M_n$, на основании которых определим следующую $(n\times n)$-матрицу

$$J(\alpha;k_1,l_1,\ldots,k_s,l_s) := J(\alpha;k_1,l_1) + J(\alpha;k_2,l_2) + \ldots + J(\alpha;k_s,l_s). \tag{10}$$

Замечание 8. *Из определения матриц $J(\alpha;k_1,l_1)$, $J(\alpha;k_2,l_2)$, ..., $J(\alpha;k_s,l_s) \in M_n$ очевидным образом вытекает, что матрица (10) является блочно-диагональной, на главной диагонали которой стоят блоки-матрицы, аналогичные (6).*

Лемма 4. *Для произвольных чисел $p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,2\pi)$ и $1 \leq k_1 < l_1 < k_2 < l_2 < \ldots < k_s < l_s \leq n$, а также матриц $J(\alpha;k_1,l_1)$, $J(\alpha;k_2,l_2)$, ..., $J(\alpha;k_s,l_s) \in M_n$ имеет место равенство*

$$J^p(\alpha;k_1,l_1,\ldots,k_s,l_s) = J(p\alpha;k_1,l_1) + J(p\alpha;k_2,l_2) + \ldots + J(p\alpha;k_s,l_s) \in M_n. \tag{11}$$

Доказательство. Зафиксируем любые числа $\alpha \in (0,2\pi)$ и $1 \leq k_1 < l_1 < k_2 < l_2 < \ldots < k_s < l_s \leq n$ и введем в рассмотрение матрицы $J(\alpha;k_1,l_1), J(\alpha;k_2,l_2), \ldots, J(\alpha;k_s,l_s) \in M_n$, определяемые формулами (6), а также матрицу $J(\alpha;k_1,l_1,\ldots,k_s,l_s) \in M_n$, устанавливаемую равенством (10). Соотношение (11) докажем с помощью метода математической индукции по натуральной степени p матрицы $J(\alpha;k_1,l_1,\ldots,k_s,l_s)$.

При $p = 2$ в силу определения матрицы $J(\alpha;k_1,l_1,\ldots,k_s,l_s)$, неравенств $1 \leq k_1 < l_1 < k_2 < l_2 < \ldots < k_s < l_s \leq n$, а также леммы 1 имеем соотношения

$$\begin{aligned}
J^2(\alpha;k_1,l_1,\ldots,k_s,l_s) &= (J(\alpha;k_1,l_1) + J(\alpha;k_2,l_2) + \ldots + J(\alpha;k_s,l_s))\times \\
&\times(J(\alpha;k_1,l_1) + J(\alpha;k_2,l_2) + \ldots + J(\alpha;k_s,l_s)) = \\
&= J(\alpha;k_1,l_1)J(\alpha;k_1,l_1) + J(\alpha;k_1,l_1)J(\alpha;k_2,l_2) + \ldots + J(\alpha;k_1,l_1)J(\alpha;k_s,l_s) + \\
&+ J(\alpha;k_2,l_2)J(\alpha;k_1,l_1) + J(\alpha;k_2,l_2)J(\alpha;k_2,l_2) + \ldots + J(\alpha;k_2,l_2)J(\alpha;k_s,l_s) + \ldots + \\
&+ J(\alpha;k_s,l_s)J(\alpha;k_1,l_1) + J(\alpha;k_s,l_s)J(\alpha;k_2,l_2) + \ldots + J(\alpha;k_s,l_s)J(\alpha;k_s,l_s) = \\
&= J^2(\alpha;k_1,l_1) + 0 + \ldots + 0 + 0 + J^2(\alpha;k_2,l_2) + \ldots + 0 + \ldots + 0 + 0 + \ldots + J^2(\alpha;k_s,l_s) = \\
&= J(2\alpha;k_1,l_1) + J(2\alpha;k_2,l_2) + \ldots + J(2\alpha;k_s,l_s).
\end{aligned}$$

Предположим теперь, что равенство (11) выполняется при $p = r-1$, т.е. справедлива формула

$$J^{r-1}(\alpha;k_1,l_1,\ldots,k_s,l_s) := J((r-1)\alpha;k_1,l_1) + J((r-1)\alpha;k_2,l_2) + \ldots + J((r-1)\alpha;k_s,l_s)\ . \tag{12}$$

Применяя это соотношение, докажем равенство (11) для $p = r$. Поскольку имеет место равенство

$$J^r(\alpha;k_1,l_1,\ldots,k_s,l_s) = J^{r-1}(\alpha;k_1,l_1,\ldots,k_s,l_s)\cdot J(\alpha;k_1,l_1,\ldots,k_s,l_s),$$

то, воспользовавшись индуктивным предположением (11), а также определением (10) матрицы $J(\alpha;k_1,l_1,...,k_s,l_s)$, а далее – раскрывая скобки, из последнего равенства получим цепь соотношений

$$\begin{aligned} J^r(\alpha;k_1,l_1,...,k_s,l_s) &= (J((r-1)\alpha;k_1,l_1)+J((r-1)\alpha;k_2,l_2)+...+J((r-1)\alpha;k_s,l_s))\times \\ &\times(J(\alpha;k_1,l_1)+J(\alpha;k_2,l_2)+...+J(\alpha;k_s,l_s)) = J((r-1)\alpha;k_1,l_1)\cdot J(\alpha;k_1,l_1)+ \\ &+J((r-1)\alpha;k_1,l_1)\cdot J(\alpha;k_2,l_2)+...+J((r-1)\alpha;k_1,l_1)\cdot J(\alpha;k_s,l_s)+ \\ &+J((r-1)\alpha;k_2,l_2)\cdot J(\alpha;k_1,l_1)+J((r-1)\alpha;k_2,l_2)\cdot J(\alpha;k_2,l_2)+...+ \\ &+J((r-1)\alpha;k_2,l_2)\cdot J(\alpha;k_s,l_s)+...+J((r-1)\alpha;k_s,l_s)\cdot J(\alpha;k_1,l_1)+ \\ &+J((r-1)\alpha;k_s,l_s)\cdot J(\alpha;k_2,l_2)+...+J((r-1)\alpha;k_s,l_s)\cdot J(\alpha;k_s,l_s). \end{aligned} \tag{13}$$

В силу неравенства $J((r-1)\alpha;k_i,l_i)\neq J(\alpha;k_j,l_j)$, верного при $i\neq j,\ \ i,j\in\{1,...,s\}$, ввиду формул (6), на основании леммы 1 установим равенства $J((r-1)\alpha;k_i,l_i)\cdot J(\alpha;k_j,l_j)=0,\ \ i\neq j,\ \ i,j\in\{1,...,s\}$. Поэтому из формулы (13) следует соотношение

$$\begin{aligned} J^r(\alpha;k_1,l_1,...,k_s,l_s) &= J((r-1)\alpha;k_1,l_1)\cdot J(\alpha;k_1,l_1)+...+ \\ &+J((r-1)\alpha;k_2,l_2)\cdot J(\alpha;k_2,l_2)+...+J((r-1)\alpha;k_s,l_s)\cdot J(\alpha;k_s,l_s), \end{aligned}$$

из которого в силу леммы 3 вытекает требуемое равенство

$$J^r(\alpha;k_1,l_1,...,k_s,l_s)=J(r\alpha;k_1,l_1)+J(r\alpha;k_2,l_2)+...+J(r\alpha;k_s,l_s).$$

На основании принципа математической индукции заключаем, что равенство

$$J^p(\alpha;k_1,l_1,...,k_s,l_s)=J(p\alpha;k_1,l_1)+J(p\alpha;k_2,l_2)+...+J(p\alpha;k_s,l_s)$$

выполняется для любой натуральной степени p и всяких $1\le k_1<l_1<k_2<l_2<...<k_s<l_s\le n.$ Лемма 4 доказана.

Теорема 3 позволяет свое обобщение. Прежде чем переходить к такому обобщению, введем необходимые нам в дальнейшем обозначения и определения. Пусть $\overline{E}(k_1,l_1,k_2,l_2,...,k_s,l_s)\in M_n$ $(1\le k_1<l_1<k_2<l_2<...<k_s<l_s\le n)$ – матрица, полученная из единичной заменой элементов 1, стоящих в $k_1,l_1,k_2,l_2,...,k_s,l_s$ строках на -1. Такие матрицы далее будем называть *«почти единичными».*

Для вышеуказанной матрицы $\overline{E}(k_1,l_1,k_2,l_2,...,k_s,l_s)\in M_n$ введем также ряд обозначений

$$r_1:=l_1,\quad r_2:=l_2-r_1,\quad r_3:=l_3-r_1-r_2,\ \ ...,\quad r_{s-1}:=l_{s-1}-\sum_{i=1}^{s-2}r_i, \tag{14}$$

$$k'_j:=k_j-\sum_{i=1}^{j-1}r_i,\quad l'_j:=l_j-\sum_{i=1}^{j-1}r_i=r_j,\quad j=\overline{1,s} \tag{15}$$

и рассмотрим квадратные матрицы $\Pi_1(\alpha;k'_1,l'_1),\Pi_2(\alpha;k'_2,l'_2),...,\Pi_{s-1}(\alpha;k'_{s-1},l'_{s-1}),$ порядки которых равны соответственно $r_1,r_2,...,r_{s-1}$ и которые определяются равенствами (8). Пусть E_s – единичная матрица размерности $r_s=n-\sum_{i=1}^{s-1}r_i$ (если $r_s=0$, то в рассматриваемой матрице блок E_s отсутствует). Для всех $i\in\{1,...,s-1\}$ положим $\Phi_i(k'_i,l'_i):=\Pi_i(\pi/3;k'_i,l'_i)\in M_{r_i}$ и обозначим через $\Phi(k_1,l_1,...,k_{s-1},l_{s-1})\in M_n$ матрицу

$$\Phi(k_1,l_1,...,k_{s-1},l_{s-1}):=\mathrm{diag}\left(\Phi_1(k'_1,l'_1),\Phi_2(\alpha;k'_2,l'_2),...,\Phi_{s-1}(k'_{s-1},l'_{s-1}),E_s\right). \tag{16}$$

По свойству произведения блочных матриц [1, с. 30], а также того, что $\Phi(k_1,l_1,...,k_{s-1},l_{s-1})$ – матрица блочно-диагонального вида, имеем равенства [1, с. 38]

$$\Phi^3(k_1,l_1,...,k_{s-1},l_{s-1}) = (\mathrm{diag}(\Phi_1(k_1',l_1'),\Phi_2(\alpha;k_2',l_2'),...,\Phi_{s-1}(k_{s-1}',l_{s-1}'),E_s))^3 =$$
$$= \mathrm{diag}(\Phi_1^3(k_1',l_1'),...,\Phi_{s-1}^3(k_{s-1}',l_{s-1}'),E_s^3).$$

На основании теоремы 3 для всех $i=\overline{1,s-1}$ получим соотношения $\Phi_i^3(k_i',l_i') = \bar{E}(k_i',l_i') \in M_{r_i}$. Отсюда, ввиду очевидного равенства $E_s^3 = E_s$, следующего из определения матрицы E_s, вытекает соотношение

$$\Phi^3(k_1,l_1,...,k_{s-1},l_{s-1}) = \mathrm{diag}(\bar{E}_1(k_1',l_1'),...,\bar{E}_{s-1}(k_{s-1}',l_{s-1}'),E_s).$$

В силу же определений (14), (15) индексов r_i, k_i', l_i', а также матриц $\bar{E}(k_i',l_i') \in M_{r_i}$, $i=\overline{1,s-1}$, выполняется равенство $\mathrm{diag}(\bar{E}_1(k_1',l_1'),...,\bar{E}_{s-1}(k_{s-1}',l_{s-1}'),E_s) = \bar{E}(k_1,l_1,...,k_{s-1},l_{s-1}) \in M_n$. Следовательно,

$$\Phi^3(k_1,l_1,...,k_{s-1},l_{s-1}) = \bar{E}(k_1,l_1,...,k_{s-1},l_{s-1}). \tag{17}$$

Замечание 9. *Из структуры матрицы блочно-диагонального вида следует, что все ее главные угловые подматрицы суть матрицы блочно-диагонального вида. Кроме того, для главных угловых миноров i-го порядка такой матрицы* $A = \mathrm{diag}(A_1,A_2,...,A_s)$, $A_i \in M_{r_i}$, *очевидно, выполняются равенства*

$$\det A\{i\} = \begin{cases} \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot ... \cdot \det A_l \ \text{в случае}\ i = r_1 + ... + r_l, \\ \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot ... \cdot \det A_{l-1} \cdot \det A_l\{j\},\ \text{где}\ j = i - \sum\limits_{k=1}^{l-1} r_k,\ \text{для случая}\ 0 < i < \sum\limits_{k=1}^{l} r_k \end{cases}.$$

Из теоремы 3 следует, что при всех $i=\overline{1,s-1}$ и $j=\overline{1,l_i}$ для матрицы $\Phi_i(k_i,l_i)$ имеют место оценка

$$\det\Phi_i(k_i,l_i)\{j\} \geq 1/2 \tag{18}$$

и равенства

$$\det\Phi_i(k_i,l_i) = 1. \tag{19}$$

Возьмем произвольный индекс $i \in \{1,...,n\}$. Тогда из определения (16) матрицы $\Phi(k_1,l_1,...,k_{s-1},l_{s-1})$, замечания 9 и равенств (19) следует, что если $i = l_1 + l_2 + ... + l_t$, где $t \in \{1,...,s-1\}$, то выполняются соотношения

$$\det\Phi(k_1,l_1,...,k_{s-1},l_{s-1})\{i\} = \det\Phi_1(k_1,l_1)\cdot ... \cdot \det\Phi_t(k_t,l_t) = 1\cdot ... \cdot 1 = 1 \geq 1/2. \tag{20}$$

Если же $l_1 + ... + l_{t-1} < i < l_1 + ... + l_t \leq l_1 + ... + l_{s-1}$, где $t \in \{1,...,s-1\}$, то в силу определения (16) матрицы $\Phi(k_1,l_1,...,k_{s-1},l_{s-1})$, замечания 9, формул (19) и (18) справедливы соотношения

$$\det\Phi(k_1,l_1,...,k_{s-1},l_{s-1})\{i\} = \det\Phi_1(k_1,l_1)\cdot ... \cdot \det\Phi_{t-1}(k_{t-1},l_{t-1})\cdot\det\Phi_t(k_t,l_t)\{j\} =$$
$$= 1\cdot ... \cdot 1 \cdot \det\Phi_t(k_t,l_t)\{j\} \geq 1/2,\ \text{где}\ j = i - \sum_{k=1}^{t-1} r_k \tag{21}$$

Поскольку главный угловой (ведущий) минор единичной матрицы – единичная матрица, то для случая $l_1 + l_2 + ... + l_{s-1} < i \leq n$, пользуясь определением (16) матрицы $\Phi(k_1,l_1,...,k_{s-1},l_{s-1})$, замечанием 9, формулой (19), установим соотношения

$$\det\Phi(k_1,l_1,...,k_{s-1},l_{s-1})\{i\} = \det\Phi_1(k_1,l_1)\cdot ... \cdot \det\Phi_{s-1}(k_{s-1},l_{s-1})\cdot\det E_s\{j\} =$$
$$= 1\cdot ... \cdot 1\cdot\det E_s\{j\} = 1\cdot ... \cdot 1 \cdot 1 \geq 1/2, \quad j = i - \sum_{k=1}^{s-1} r_k. \tag{22}$$

Таким образом, из формул (17), (20)–(22) вытекает следующая

Теорема 4. *Для любых натуральных чисел* $1 \le k_1 < l_1 < k_2 < l_2 < \ldots < k_s < l_s \le n$ *и «почти единичной» матрицы* $\bar{E}(k_1, l_1, k_2, l_2, \ldots, k_{s-1}, l_{s-1}) \in M_n$ *найдется такая* $(n \times n)$*-матрица* $\Phi(k_1, l_1, \ldots, k_{s-1}, l_{s-1}) = \operatorname{diag}(\Phi_1(k_1', l_1'), \Phi_2(\alpha; k_2', l_2'), \ldots, \Phi_{s-1}(k_{s-1}', l_{s-1}'), E_s)$, *в которой* $\Phi_i(k_i', l_i') \in M_{r_i}$, $i = \overline{1, s-1}$, $E_s \in M_{r_s}$, *а индексы* r_i, k_i', l_i' *определяются формулами (14) и (15), и для которой имеют место соотношения* $\Phi^3(k_1, l_1, \ldots, k_{s-1}, l_{s-1}) = \bar{E}(k_1, l_1, k_2, l_2, \ldots, k_{s-1}, l_{s-1})$ *и* $\det \Phi(k_1, l_1, \ldots, k_{s-1}, l_{s-1})\{i\} \ge 1/2$ *при каждом* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Замечание 10. *Теорема 4 дает представление «почти единичной» матрицы, т.е. матрицы, полученной из единичной заменой некоторого четного количества 1, стоящих на главной диагонали, на -1, в виде произведения трех строго ρ-положительно регулярных матриц с числом* $\rho = 1/2$.

Следующий пример 1 является подтверждением теоремы 4.

П р и м е р 1. Рассмотрим матрицу пятого порядка

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно установить, что для нее справедлива цепочка равенств

$$M = \begin{pmatrix} \cos\pi & 0 & \sin\pi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\pi & 0 & \cos\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\pi & \sin\pi \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & 0 & \sin(\pi/3) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\pi/3) & 0 & \cos(\pi/3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\pi/3) & \sin(\pi/3) \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix}^3 =: \Phi^3(1,3,4,5) =: \Phi^3$$

и оценки

$$\det\Phi\{1\} = \cos(\pi/3) \ge 1/2, \quad \det\Phi\{2\} = 1 \cdot \cos(\pi/3) \ge 1/2,$$
$$\det\Phi\{3\} = (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot (\cos^2(\pi/3) + \sin^2(\pi/3)) = 1 \ge 1/2,$$
$$\det\Phi\{4\} = \det\Phi\{3\} \cdot (-1)^{4+4} \cos(\pi/3) = 1 \ge 1/2,$$
$$\det\Phi\{5\} = \det\Phi\{3\} \cdot (\cos^2(\pi/3) + \sin^2(\pi/3)) = 1 \ge 1/2,$$

которые устанавливают представление матрицы M в виде произведения трех строго 1/2-положительно регулярных матриц (трех матриц $\Phi = \Phi(1,3,4,5)$).

Замечание 11. *Заметим, что при использовании в качестве строго положительно регулярных матриц матрицы плоских вращений (как в теореме 4) разложение «почти единичной» матрицы в произведение двух указанных матриц не представляется возможным.*

Действительно, рассмотрим следующий пример 2. Возьмем произведение двух (2×2)-матриц плоских вращений на углы соответственно α и $\beta \in \mathbb{R}$ от e_2 к e_1

$$J_1(\alpha,1,2) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad J_2(\beta,1,2) = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Тогда имеет место равенство

$$J_1(\alpha,1,2) \cdot J_2(\beta,1,2) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}. \qquad (23)$$

Для квадратных матриц второго порядка «почти единичной», очевидно, является матрица

$$\bar{E}(1,2)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\pi & \sin\pi\\ -\sin\pi & \cos\pi\end{pmatrix}. \tag{24}$$

Из равенств (23) и (24) следует, что для того, чтобы произведение $J_1(\alpha,1,2)\cdot J_2(\beta,1,2)$ было равно матрице $\bar{E}(1,2)$, необходимо и достаточно выполнение соотношения

$$\alpha+\beta=\pi+2\pi l \text{ при некотором } l\in\mathbb{Z}. \tag{25}$$

Однако для того, чтобы матрицы $J_1(\alpha,1,2)$ и $J_2(\beta,1,2)$ были строго положительно регулярными, очевидно, необходима реализация неравенств

$$-\pi/2+2\pi k<\alpha<\pi/2+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}, \text{ и } -\pi/2+2\pi m<\beta<\pi/2+2\pi m,\quad m\in\mathbb{Z},$$
$$\text{т.е. } -\pi+2\pi(k+m)<\alpha+\beta<\pi+2\pi(k+m),\quad k,m\in\mathbb{Z}.$$

Последнее же неравенство указывает, что ни при каких α и β ($k,m\in\mathbb{Z}$) соотношение (25) выполняться не будет. Это значит, что даже в двумерном случае для представления «почти единичной» матрицы в виде произведения строго положительно регулярных матриц недостаточно двух сомножителей, являющихся матрицами плоских вращений.

Заключение. Полученные результаты позволят установить представление квадратной матрицы произвольного порядка с положительным определителем (коей является матрица Коши некоторой линейной динамической системы на фиксированном промежутке) в виде произведения пяти строго ρ-положительно регулярных матриц с заданным числом $\rho>0$. Этот факт, в свою очередь, поможет в дальнейшем доказать равномерную глобальную достижимость линейных динамических систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2025» (подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем», задание 1.2.01 «Управление асимптотическими характеристиками дискретных и непрерывных динамических систем; разработка аппарата дробного интегро-дифференцирования для изучения задач разрешимости дифференциальных уравнений дробного порядка и асимптотики их решений» (№ ГР 20211316)).

ЛИТЕРАТУРА

1. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
2. Тыртышников, Е.Е. Методы численного анализа / Е.Е. Тыртышников. – М., 2006. – 291 с.

REFERENCES

1. Chorn R., Johnson Ch. *Matrichni analiz* [Matrix Analysis], Moscow: Mir, 1989, 656 p.
2. Tyrtyshnikov E.E. *Metody chislennogo analiza* [Methods of numerical analysis], Moscow, 2006, 291 p.

Поступила в редакцию 27.06.2022

Адрес для корреспонденции: e-mail: tatyanka.aleksandrovich@mail.ru – Александрович Т.А.