УДК 514.76

Д.В. Вылегжанин

Естественная конструкция обобщенной почти эрмитовой структуры

Начиная с 60-х годов XX в. в дифференциальной геометрии интенсивно изучаются почти эрмитовы структуры на многообразиях. Как следствие, в начале 80-х годов в работах В.Ф. Кириченко возникло понятие *обобщенной почти эрмитовой структуры* (*GAH-структуры*) произвольного *ранга r* [1]. Примеры конструкций *GAH*-структур ранга 2 и произвольного ранга указаны в работе [2]. Однако практически все работы по обобщенной эрмитовой геометрии посвящены исследованиям *GAH*-структур ранга 1.

В то же время в 90-е годы был обнаружен значительный запас инвариантных структур на однородных регулярных *Ф*-пространствах [3], с помощью которого, как оказалось, можно конструировать инвариантные *GAH*-структуры высших рангов. Это дало возможность рассмотреть ряд общих конструкций *GAH*-структур, которые обеспечены инвариантными примерами на основе канонических *f*-структур на регулярных *Ф*-пространствах.

В данной работе предложена одна из таких естественных конструкций. При этом получены критерии принадлежности указанных *GAH*-структур некоторым важнейшим классам в обобщенной эрмитовой геометрии.

Пусть M – связное гладкое многообразие, $C^\infty(M)$ – кольцо гладких функций на M, $\mathfrak{X}(M)$ – алгебра Ли векторных полей на M со скобкой Ли $[\cdot,\cdot]$. Если на M задана (псевдо) риманова метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$, то соответствующую ей связность Леви-Чивита будем обозначать символом ∇. Все многообразия, тензорные поля и тому подобные объекты предполагаются гладкими класса C^∞.

Определение [1]. Обобщенной почти эрмитовой структурой (*GAH*-структурой) ранга r на гладком многообразии M называется совокупность $\{g, J_1,\dots,J_r, T\}$ тензорных полей на M, где $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ – псевдориманова метрика на M, $J_1,\dots,J_r$ – линейно независимые в каждой точке многообразия тензоры типа (1,1), называемые структурными аффинорами, или структурными операторами, определенные в каждой точке многообразия с точностью до ненулевого числового множителя и являющиеся вместе со своими квадратами и тождественным аффинором образующими некоторого подмодуля, являющегося подалгеброй алгебры всех эндоморфизмов касательного пучка многообразия, T – тензор типа (2,1), называемый композиционным тензором. При этом должны выполняться условия:

1) $\langle J_iX,Y\rangle+\langle X,J_iY\rangle=0$;

2) $T(J_iX,Y)=T(X,J_iY)=-J_iT(X,Y)$;

3) $T_Xg=0$;

4) $\bigcap\limits_{i=1}^{r}\ker J_i\subset\ker T\subset\bigcap\limits_{i=1}^{r}\ker(J_i^5-\lambda_iJ_i)$;

5) $J_iJ_j=J_jJ_i$; $(i,j=1,\dots,r;\ X,Y\in\mathfrak{X}(M))$.

Здесь $0<\lambda\in C^{\infty}(M)$; $T_XY=T(X,Y)$; оператор T_X отождествляется с порожденным им дифференцированием тензорной алгебры многообразия. Многообразие, наделенное *GAH*-структурой, называется обобщенным почти эрмитовым (*GAH*-) многообразием. Символом *GAH* обозначается класс всех GAH-структур на M.

Наличие обобщенной почти эрмитовой структуры позволяет ввести в рассмотрение алгебраический объект, исследуя свойства которого можно делать выводы о геометрическом строении обобщенного почти эрмитова многообразия. Возникающая таким образом алгебраическая структура на $\mathfrak{X}(M)$ называется *Q*-алгеброй [1]. Более точно, операция композиции в $\mathfrak{X}(M)$ определяется формулой: $X*Y:=T(X,Y)$.

Определение [1]. Q-алгебра V называется абелевой, если $V*V=\{0\}$.

Определение [1]. *K*-алгеброй называется антикоммутативная *Q*-алгебра: $X*Y=-Y*X$.

Определение [1]. *A*-алгеброй называется *Q*-алгебра *V* такая, что

$$\langle X*Y,Z\rangle+\langle Y*Z,X\rangle+\langle Z*X,Y\rangle=0 \qquad (1)$$

В названии *GAH*-многообразия фиксируется соответствующее свойство его *присоединенной Q-алгебры* [1]. *GAH*-многообразие, присоединенная *Q*-алгебра которого является *K-алгеброй* (*A-алгеброй, абелевой Q-алгеброй*), называется, соответственно, ***обобщенным*** G_1***-многообразием*** (G_2***-многообразием, обобщенным эрмитовым многообразием***), и соответствующая *GAH*-структура обозначается, соответственно, GG_1, GG_2, *GH* [1].

. *f*-структурой на гладком многообразии *M* называется поле тензора типа (1,1) на *M* такое, что $f^3+f=0$ [4]. Многообразие, снабженное *f*-структурой, называется *f*-многообразием. Рассмотрим на нем операторы $l=-f^2$, $m=f^2+id$ [5]. Непосредственно проверяется, что $l^2=l$, $m^2=m$, $l+m=id$, т.е. *l* и *m* — взаимно дополнительные проекторы. Легко также убедиться, что образ оператора *m* совпадает с *ker f*, т.е. *m* — проектор на ядро оператора структуры. Кроме того $f\circ l=l\circ f$, ввиду чего можно рассматривать ограничение $\tilde{f}$ оператора *f* на образ $\mathcal{L}$ оператора *l*. Очевидно $f^2l=-l$, то есть $\tilde{f}^2=-id$. Таким образом, $\mathfrak{X}(M)=\mathcal{L}\oplus\mathcal{M}$, где $\mathcal{M}=\ker f$, $f|_{\mathcal{L}}=\tilde{f}$ – антиинволютивный оператор.

f-многообразие *M* (и соответствующую *f*-структуру) называют *метрическими* [1], если на нем фиксирована риманова метрика $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ такая, что $\langle fX,fY\rangle=\langle f^2X,f^2Y\rangle$, $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$. Из этого определения непосредственно следует, что $\langle\tilde{f}X,\tilde{f}Y\rangle=\langle X,Y\rangle, X,Y\in\mathcal{L}$, а также взаимная ортогональность распределений $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ в метрике *g*.

Теорема 1. *Пусть* $J_1,\ldots,J_r$ *– линейно независимые в каждой точке риманова многообразия (M, g) метрические f-структуры, удовлетворяющие условию* $J_iJ_j=0$, $i,j=\overline{1,r}$, N_i *– соответствующий* J_i *тензор Нейенхейса. Тогда на многообразии M существует тензор T типа* (2,1) *такой, что совокупность*

$\{g, J_1, \ldots, J_r, T\}$ образует обобщенную почти эрмитову структуру ранга r. Тензор T имеет вид

$$T(X,Y)=\sum_{i=1}^{r}T_i(X,Y),$$

где

$$T_i(X,Y)=\tfrac{1}{2}\left\{B_i(X,Y)-B_i^{*}(X,Y)-B_i^{*}(Y,X)\right\},$$

$$B_i(X,Y)=-J_i^2N_i(J_i^2X,J_i^2Y),$$

B_i^{*} – тензор, сопряженный тензору B_i.

Доказательство. Проверим условия из определения обобщенной почти эрмитовой структуры. Отметим, что T_i построен на основе конструкции, указанной в [1]. Очевидно, что тензоры $J_1,\ldots,J_r$ вместе со своими квадратами являются образующими подмодуля, являющегося подалгеброй в алгебре всех эндоморфизмов касательного пучка многообразия. Далее остается проверить справедливость требований, налагаемых на тензор T в определении *GAH*-структуры. Так как все рассматриваемые *f*-структуры являются метрическими, условие 1) выполняется. Докажем справедливость требования 2). В силу условия $J_iJ_j=0$, $i\neq j$, $i,j=$ $i\neq j, i,j=\overline{1,r}, \forall X,Y\in \mathrm{X}(M)$ получаем $J_jB_i(X,Y)=B_i(J_jX,Y)=B_i(X,J_jY)=0$, Отсюда легко получить $\forall X,Y\in \mathrm{X}(M)$, $i\neq j, i,j\in\overline{\{1,r\}}$:

$$J_jT_i(X,Y)=T_i(J_jX,Y)=T_i(X,J_jY)=0. \qquad (2)$$

Тогда из (2) и того, что $T(X,Y)=\sum_{i=1}^{r}T_i(X,Y)$, приходим к равенствам: $T(J_iX,Y)=T_i(J_iX,Y)$, $T(X,J_iY)=T_i(X,J_iY)$, $J_iT(X,Y)=J_iT_i(X,Y)$.

Для тензора вида T_i условие 2) доказано в [1].

Откуда мы и получаем $T(J_iX,Y)=T(X,J_iY)=-J_iT(X,Y)$, $\forall i=\overline{1,r}$. Таким образом, требование 2) выполняется.

Теперь докажем, что условие 3) также удовлетворяется. Поскольку $T(X,Y)=\sum_{i=1}^{r}T_i(X,Y)$, то указанное тождество автоматически вытекает из случая для ранга 1 [1].

Замечаем, что если $J_iX=0$, то и $T_i(X,Y)=0$, для любых Y. Значит, если $J_iX=0$ $\forall i=\overline{1,r}$, то $T(X,Y)=\sum_{i=1}^{r}T_i(X,Y)=0$. Другими словами, $\bigcap_{i=1}^{r}\ker J_i\subset\ker T$.

Так как J_i является *f*-структурой, то $J_i^5=J_i$. Возьмем $\lambda\equiv 1$, тогда $J_i^5-\lambda_iJ_i=J_i-1J_i=0$, то есть $\ker(J_i^5-\lambda J_i)=\ker 0=\mathrm{X}(M)$.

Получаем цепочку вложений: $\bigcap_{i=1}^{r}\ker J_i\subset\ker T\subset\mathrm{X}(M)\subset\bigcap_{i=1}^{r}\mathrm{X}(M)\subset$ $\subset\bigcap_{i=1}^{r}\ker(J_i^5-\lambda J_i)$. Следовательно, условие 4) выполняется.

Требование 5) обеспечивается условием $J_iJ_j=0$. Теорема 1 доказана.

Будем обозначать далее $X^i, Y^i \in \mathcal{L}_i$. Тогда из вида тензора T можно легко получить следующие свойства:

$$T_i(X,Y)=T_i(X^i,Y)=T_i(X,Y^i)=T_i(X^i,Y^i). \tag{3}$$

Ясно, что $X^i \in \ker J_j$ если $i \neq j$. Действительно, $-J_i^2X^i=X^i$, значит $J_jX^i=-J_jJ_i^2X^i=0$, т.к. тензоры связаны условием $J_iJ_j=0$, если $i \neq j$.

Тогда получаем, что если $X^j, Y^j \in \mathcal{L}_j$, для $i \neq j$ получаем:

$$T_i(X^j,Y^j)=T_i(X^j,Y)=T_i(X,Y^j)=0. \tag{4}$$

Теорема 2. *Для структуры, приведенной в теореме* 1, *справедливы следующие утверждения:*

1. $\{g, J_1,\dots, J_r, T\}$ *является GH-структурой* $\Leftrightarrow$ $\forall i=\overline{1,r}$ $\{g, J_i, T_i\}$ *является GH-структурой.*

2. $\{g, J_1,\dots,J_r, T\}$ *является GG_1-структурой* $\Leftrightarrow$ $\forall i=\overline{1,r}$ $\{g, J_i, T_i\}$ *является GG_1-структурой.*

3. $\{g, J_1,\dots,J_r, T\}$ *является GG_2-структурой* $\Leftrightarrow$ $\forall i=\overline{1,r}$ $\{g, J_i, T_i\}$ *является GG_2-структурой.*

Доказательство. Композиционный тензор для структуры $\{g, J_i\}$ ранга 1 – это тензор T_i. То есть в дальнейшем нам надо проверить выполнимость условий для тензоров T и T_i.

1. Пусть все $T_i=0$, тогда $T=0$, поскольку $T(X,Y)=\sum_{i=1}^{r}T_i(X,Y)$. А значит обратное утверждение доказано.

Пусть теперь $T=0$, что можно сказать о T_i? Получаем: $J_iT(X,Y)=J_iT_i(X,Y)=0$, $\forall X,Y \in \mathfrak{X}(M)$. Из свойств композиционного тензора имеем следующие равенства для J_i и T_i: $-J_iT_i(X,Y)=T_i(J_iX,Y)=T_i(X,J_iY)=0$.

Получаем, что $T_i(X,Y)$ обращается в ноль на векторных полях, являющихся образами других векторных полей при действии J_i.

Учитывая равенство (3), можно ограничиться рассмотрением только векторов из $\mathcal{L}$. Если $X \in \mathcal{L}$, то $X=-J_i^2X=J_i(-J_iX)$. Т.е. в этом случае для X существует прообраз, следовательно $T_i(X,Y)=0$.

Итак доказали утверждение $T=0 \Leftrightarrow \forall i=\overline{1,r}$ $T_i=0$.

2. Для структуры ранга r должно выполняться $\sum_{i=1}^{r}T_i(X,Y)=-\sum_{i=1}^{r}T_i(Y,X)$, а для ранга 1 $T_i(X,Y)=-T_i(Y,X)$, $\forall i=\overline{1,r}$.

Очевидно, если T_i — кососимметричны, то $T(X,Y)=\sum_{i=1}^{r}T_i(X,Y)$ – кососимметричен. Значит обратное утверждение доказано.

Пусть теперь $T(X,Y)=-T(Y,X)$.

Тогда $J_iT(X,Y)=J_iT_i(X,Y)=-J_iT(Y,X)=-J_iT_i(Y,X)$.

Получаем $T_i(J_iX,Y)=-T_i(J_iY,X)=-T_i(Y,J_iX)$. Поэтому для векторов, имеющих прообраз, свойство кососимметричности выполняется.

Для каждого $X\in\mathcal{L}$ существует Y такой, что $X=JY$ следовательно $T_i(X,Z)=-T_i(Z,X)$. Таким образом, если хотя бы одна переменная лежит в $\mathcal{L}$, то для T_i верно равенство: $T_i(X,Y)=-T_i(Y,X)$.

Из равенства (3) можно получить утверждение для любых X и Y: $T_i(X,Y)=T_i(X^i,Y^i)=-T_i(Y^i,X^i)=-T_i(Y,X)$.

Доказано утверждение: $T(X,Y)=-T(Y,X)\Leftrightarrow\ \forall i=\overline{1,r}$, $T_i(X,Y)=-T_i(Y,X)$.

3. Метрика на GAH-многообразии задается формулой:

$$\left\langle\left\langle X,Y\right\rangle\right\rangle=\sum_{i=0}^{r}\left\langle J_i^3X,Y\right\rangle J_i,$$

где $J_0=id$ [1]. То есть для ранга 1 будем иметь

$$\left\langle\left\langle X*Y,Z\right\rangle\right\rangle=\left\langle -J_0T_i(X,Y),Z\right\rangle J_0+\left\langle -J_iT_i(X,Y),Z\right\rangle J_i.$$

Для ранга r:

$$\left\langle\left\langle X*Y,Z\right\rangle\right\rangle=\left\langle\left\langle T(X,Y),Z\right\rangle\right\rangle=$$

$$\left\langle -J_0\sum_{i=1}^{r}T_i(X,Y),Z\,J_0\right\rangle+\sum_{i=1}^{r}\left\langle -J_iT_i(X,Y),Z\right\rangle J_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{r}(\left\langle -J_0T_i(X,Y),Z\right\rangle J_0+\left\langle J_iT_i(X,Y),Z\right\rangle J_i).$$

Из вида метрики очевидно, что если (1) верно для всех T_i, то верно и для T. Обратно, пусть (1) верно для T. Тогда из (4) имеем:

$$\left\langle\left\langle X^i*Y^i,Z^i\right\rangle\right\rangle=\left\langle -J_0T_i(X^i,Y^i),Z^i\right\rangle J_0+\left\langle -J_iT_i(X^i,Y^i),Z^i\right\rangle J_i.$$

Если $X,Y,Z\in\mathcal{L}$, то для T_i верно (1). Далее, используя (3), легко показать справедливость (1) для T_i в случае любых X,Y,Z:

$$\left\langle\left\langle X*Y,Z\right\rangle\right\rangle=\left\langle -J_0T_i(X,Y),Z\right\rangle J_0+\left\langle -J_iT_i(X,Y),Z\right\rangle J_i=$$

$$=\left\langle -J_0T_i(X^i,Y^i),Z\right\rangle J_0+\left\langle T_i(J_iX^i,Y^i),Z\right\rangle J^i=$$

$$\left\langle Y^i,-J_0T_i(X^i,Z^i)\right\rangle J_0-\left\langle Y^i,T_i(X^i,J_iZ^i)\right\rangle J_i=$$

$$=\left\langle Y^i,-J_0T_i(X^i,Y^i)\right\rangle J_0-\left\langle Y^i,T_i(X^i,J_iZ^i)\right\rangle J_i=$$

$$=\left\langle -J_0T_i(X^i,Y^i),Z^i\right\rangle J_0+\left\langle J_iT_i(X^i,Y^i),Z^i\right\rangle J_i=\left\langle\left\langle X^i*Y^i,Z^i\right\rangle\right\rangle.$$

Отсюда получаем

$$\left\langle\left\langle T_i(X,Y),Z\right\rangle\right\rangle+\left\langle\left\langle T_i(Y,Z),X\right\rangle\right\rangle+\left\langle\left\langle T_i(Z,X),Y\right\rangle\right\rangle=$$

$$=\left\langle\left\langle T_i(X^i,Y^i),Z^i\right\rangle\right\rangle+\left\langle\left\langle T_i(Y^i,Z^i),X^i\right\rangle\right\rangle+\left\langle\left\langle T_i(Z^i,X^i),Y^i\right\rangle\right\rangle=0.$$

А значит тождество (1) выполняется для T_i. Получили утверждение 3. Теорема 2 полностью доказана.

Важно отметить, что указанная в работе конструкция находит свою реализацию на однородных Φ-пространствах в классе канонических f-структур [3]. В частности, канонические f-структуры f_1 и f_2 на однородном Φ-пространстве G/H порядка 5 удовлетворяют условию $f_1 f_2 = f_2 f_1 = 0$ [3]. Более того, в естественно редуктивном случае эти структуры принадлежат классу GH [6]. Поэтому по теореме 2(1) получаем серию однородных многообразий, обладающих GH-структурой ранга 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Кириченко В.Ф.*** Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных структур // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии, 1986. Т.18. ВИНИТИ АН СССР. С. 25-71.
2. ***Кириченко В.Ф.*** Касательное расслоение с точки зрения обобщенной эрмитовой геометрии // Изв. ВУЗов. Математика, 1984, № 7. С. 50-59.
3. ***Балащенко В.В., Степанов Н.А.*** Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Φ-пространствах // Математический сборник, 1995. Т. 186, № 11. С. 3-34.
4. ***Yano K.*** On a structure defined by a tensor field f of type (1,1) satisfying $f^3+f=0$ // Tensor, 1963. V.14. P. 99-109.
5. ***Яно К., Кон М.*** CR-подмногообразия в келеровом и сасакиевом многообразиях. М., 1990. С. 24.
6. ***Балащенко В.В.*** Однородные эрмитовы f-многообразия // «Понтрягинские чтения – X». Тезисы докл. Воронеж, 1999. С. 24.

SUMMARY

One natural construction of a generalized almost Hermitian structures is introduced. It is based on special f-structures on smooth manifolds. Some necessary and sufficient conditions for the structure to belong to main classes in the generalized Hermitian geometry are obtained. The construction proposed can be a means of some invariant canonical f-structures on homogeneous regular Φ-spaces.

Поступила в редакцию 19.02.2001