

(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

УДК 512.542

АНДРЕЕВА
Дина Петровна

**КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ
С СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ
В КОРОТКИХ ЦЕПЯХ**

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 -- математическая логика,
алгебра и теория чисел

Гомель, 2011

Работа выполнена в учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Научный руководитель: **Скиба Александр Николаевич**,
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры, учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», кафедра алгебры и геометрии

Официальные оппоненты: **Беняш-Кривец Валерий Вацлавович**,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Белорусский государственный университет, кафедра высшей алгебры и защиты информации

Трофимук Александр Александрович,
кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, учреждение образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина», кафедра алгебры и геометрии

Оппонирующая организация — учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машилова».

Защита состоится «22» декабря 2011 года в 14⁰⁰ на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246019, г. Гомель, ул. Советская, 104, ауд. 1-20, телефон ученого секретаря: +375 232 573 791. E-mail: SovetD021201@tut.by.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Авторсферат разослан «21» ноября 2011 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций



Ходанович Д.А.

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Все рассматриваемые в диссертации группы предполагаются конечными.

Максимальной цепью длины n группы G называется всякая цепь вида $E_n < E_{n-1} < \dots < E_1 < E_0 = G$, где E_i является максимальной подгруппой в E_{i-1} , $i = 1, 2, \dots, n$. Подгруппа H группы G называется n -максимальной подгруппой в G , если H является последним членом некоторой максимальной цепи длины n группы G . В частности, подгруппа H группы G называется 2-максимальной подгруппой (или второй максимальной подгруппой) группы G , если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G . Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы, 4-максимальные подгруппы и т.д.

Связь между строением группы G и n -максимальными подгруппами (где $n > 1$) группы G исследовалась многими авторами. Но одними из первых результатов в данном направлении были работа Редеи¹, описавшим неразрешимые группы с абелевыми вторыми максимальными подгруппами, и работа Хупперта², установившего сверхразрешимость групп, в которых все вторые максимальные подгруппы нормальны. В этой же работе Хупперт доказал, что в случае, когда каждая третья максимальная подгруппа группы G является нормальной в G , коммутант G' группы G -nilпотентен и порядок каждого главного фактора группы G не делится на куб простого числа. Эти результаты получили свое дальнейшее развитие в работах многих авторов. В частности, в работе Л.Я. Полякова³ было доказано, что группа является сверхразрешимой, если все ее 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми ее максимальными подгруппами. В работе Агравала⁴ была доказана сверхразрешимость группы при условии, что все ее 2-максимальные подгруппы S квазинормальны (подгруппа H группы G называется S -квазинормальной в G , если H перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G). В более поздней работе М. Асаада⁵ удалось усилить отмеченные выше результаты Хупперта, рассматривая лишь строго n -максимальные подгруппы для $n = 2, 3$ (подгруппа H группы G называется строго n -максимальной подгруппой в G , если H является n -максимальной подгруппой в G , но не является n -максимальной подгруппой в любой собственной подгруппе группы G).

¹Redei, L. Ein Satz über die endlichen einfachen Gruppen // L. Redei // Acta Math. - 1950. - В. 84. - С. 129-153.

²Huppert, B. Normalteiler und maximal Untergruppen endlicher Gruppen // B. Huppert // Math. Z. - 1954. - V. 60. - P. 469-434.

³Поляков, Л.Я. Конечные группы с перестановочными подгруппами // Л.Я. Поляков // Наука и техника. - 1966. - С. 75-88.

⁴Agrawal, R. K. Generalized center and hypercenter of a finite group // R. K. Agrawal // Proc. Amer. Math. Soc. - 1976. - V. 51. - P. 13-21.

⁵Asaad, M. Finite groups some whose n -maximal subgroups are normal // M. Asaad // Acta Math. Hung. - 1989. - V. 54. №1. - P. 9-27.

В последние годы получен ряд новых интересных результатов о вторых и третьих максимальных подгруппах. Отметим, в частности, что в недавних публикациях Го Веньбином, Ли Баоджуном, А.Н. Скибой и К.П. Шамоном^{6,7,8} были найдены новые характеристики сверхразрешимых групп в терминах 2-максимальных подгрупп; в работе Ю.В. Луценко и А.Н. Скибы⁹ было получено полное описание групп, у которых каждая 3-максимальная подгруппа S -квазинормальна.

Отдельно отметим работу А.Манна¹⁰, в которой исследовались группы с субнормальными n -максимальными подгруппами и впервые рассматривалась задача описания групп, у которых в каждой максимальной цепи длины три имеется собственная субнормальная подгруппа. Некоторые результаты, касающиеся этой задачи, были получены в работе А.Е. Спенсера¹¹, где, в частности, была доказана разрешимость и дисперсивность по Оре группы, удовлетворяющих этому условию. В работе Ю.В. Луценко и А.Н. Скибы¹² было получено полное описание групп, у которых каждая 3-максимальная подгруппа субнормальна. Тем не менее, точного описания групп, у которых в каждой максимальной цепи длины три имеется собственная субнормальная подгруппа, не было получено ни в одной из работ, связанных с данной тематикой. Решению этой задачи и посвящена данная диссертационная работа.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами и темами

Представленная работа выполнена на кафедре алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» с 2008 г. по 2011 г. в соответствии со следующей научной темой: «Классификация конечных групп по свойствам их перестановочных подгрупп». Тема входила в план важнейших научно-исследовательских работ в области естественных, технических и общественных наук по Республике Беларусь, утвержденный решением Президиума НАН Беларуси № 164 от

⁶Guo, W. X -semipermutable subgroups of finite groups // W. Guo, K.P. Shao, A.N. Skiba // J. Algebra. 2007. V. 315. P. 31-41.

⁷Li, Baojun. New characterizations of finite supersoluble groups // B. Li, A.N. Skiba // Science in China Series A: Mathematics. – 2008. Vol. 50, № 1. P. 827-841.

⁸Guo, W. Finite groups with given s -embedded and n -embedded subgroups // W. Guo, A.N. Skiba // J. Algebra. 2009. V. 321. P. 2843-2860.

⁹Луценко, Ю.В. О конечных группах, в которых каждая 2-максимальная или 3-максимальная подгруппа обобщенно перестановочна со всеми силовскими подгруппами // Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // Укр. мат. ж. 2009. Т. 61, № 12. С. 1630-1639.

¹⁰Mann, A. Finite groups whose n -maximal subgroups are subnormal // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 132. P. 395-409.

¹¹Spencer, A.E. Maximal nonnormal chains in finite groups // Pacific J. of Math. 1968. Vol. 27, №1. P. 167-173.

¹²Луценко, Ю.В. Конечные группы с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами // Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // Мал. заметки (принята к опубликованию).

22 июня 2006 г. (номер государственной регистрации в БелИСА — 20061154). выполнение темы запланировано на 2006 – 2010 гг.

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является получение классификации конечных групп, у которых в каждой максимальной цепи длины три имеется собственная субнормальная подгруппа.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи.

- Получить описание конечных групп, у которых в каждой максимальной цепи длины два имеется собственная субнормальная подгруппа.
- Получить описание конечных групп, у которых в каждой максимальной цепи длины два имеется собственная S -квазинормальная подгруппа.
- Получить описание конечных групп, у которых в каждой максимальной цепи длины три имеется собственная субнормальная подгруппа.
- Получить описание конечных групп, у которых в каждой максимальной цепи длины три имеется собственная S -квазинормальная подгруппа.

Объектом исследования являются группы, у которых в каждой максимальной цепи длины два и в каждой максимальной цепи длины три имеется собственная субнормальная (S -квазинормальная) подгруппа. Предмет исследования — влияние систем субнормальных и S -квазинормальных n -максимальных подгрупп ($n \in \{2, 3\}$) на строение основной группы.

Положения, выносимые на защиту

1. Описание групп, у которых в каждой максимальной цепи длины два имеется собственная субнормальная подгруппа. теорема 3.2 [3-A], лемма 1.1 [5-A].
2. Описание групп, у которых в каждой максимальной цепи длины три имеется собственная субнормальная подгруппа. теорема А [5-A].
3. Описание групп, у которых в каждой максимальной цепи длины два имеется собственная S -квазинормальная подгруппа, теорема 2 [1-A], лемма 1.1 [5-A].
4. Описание групп, у которых в каждой максимальной цепи длины три имеется собственная S -квазинормальная подгруппа, теорема [2-A], теорема 2.2 [5-A].

Все результаты диссертации впервые получены автором и являются новыми.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В диссертации приведено систематическое изучение влияния перестановочных n -ых максимальных подгрупп на строение группы ($n = 2, 3$).

Исследованы группы, у которых в каждой строго максимальной цепи длины два имеется собственная субнормальная подгруппа, а также доказано, что данный класс групп совпадает с классом групп, у которых в каждой строго максимальной цепи длины два имеется собственная S -квазинормальная подгруппа $([1-A], [3-A])$. На основании этих результатов получено описание групп, у которых в каждой максимальной цепи длины два имеется собственная субнормальная подгруппа $([3-A])$. А также доказано, что данный класс групп совпадает с классом групп, у которых в каждой максимальной цепи длины два имеется собственная S -квазинормальная (нормальная) подгруппа $([1-A], [5-A])$.

Получено описание групп, у которых в каждой максимальной цепи длины три имеется собственная субнормальная подгруппа $([5-A])$. А также решена задача Л.А. Шеметкова для случая $n = 3$, т.е. получено описание групп, у которых в каждой максимальной цепи длины три имеется собственная S -квазинормальная подгруппа $([2-A], [5-A])$.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертации результаты могут найти приложение при исследовании групп, у которых в каждой максимальной цепи длины n имеется собственная субнормальная (S -квазинормальная) подгруппа для $n \geq 2$. В частности, представляет интерес дальнейшее развитие теории n -ых максимальных подгрупп с целью получения полного описания групп, у которых в каждой максимальной цепи длины 4 имеется собственная субнормальная подгруппа; а также полного описания групп, у которых в каждой максимальной цепи длины 4 имеется собственная S -квазинормальная подгруппа.

Кроме указанных выше двух задач, разработанные методы и результаты диссертации позволяют подойти к целому ряду еще не решенных проблем. В частности, к задаче об описании ненильпотентных групп с нормальными 4-максимальными подгруппами; к общей задаче описания групп, у которых в каждой максимальной цепи длины n имеется собственная субнормальная подгруппа; а также к общей задаче описания групп, у которых в каждой максимальной цепи длины n имеется собственная S -квазинормальная подгруппа.

О практической значимости результатов свидетельствует возможность их использования в учебном процессе при чтении спецкурсов для студентов математических факультетов университетов, а также при написании курсовых, дипломных работ и диссертаций.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1-А. Ковалькова, Д.П. Конечные группы с заданными системами S -квазинормальных подгрупп / Д.П. Ковалькова, А.П. Скиба // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. — 2010. — № 3. — С. 35–43.

2-А. Ковалькова, Д.П. О задаче Ж.А. Шеметкова для максимальных цепей подгрупп / Д.П. Ковалькова, А.П. Скиба // Доклады НАН Беларуси. — 2011. — № 3. — С. 5–8.

3-А. Андреева, Д.П. Конечные группы со вторыми максимальными субнормальными подгруппами / Д.П. Андреева // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. — 2011. — № 4. — С. 71–76.

4-А. Андреева, Д.П. О максимальных цепях длины три в конечных группах / Д.П. Андреева // Вестник Витебского гос. ун-та. — 2011. — № 3(63). — С. 5–8.

5-А. Андреева, Д.П. Конечные группы с заданными максимальными цепями длины ≤ 3 / Д.П. Андреева, А.Н. Скиба // Проблемы физ., мат. и техники. — 2011. — №3(8). — С. 39–49.

Препринты

6-А. Ковалькова, Д.П. Конечные группы с заданными системами S -квазинормальных подгрупп / Д.П. Ковалькова, А.Н. Скиба. — Гомель, 2009. — 14 с. — (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 10).

7-А. Ковалькова, Д.П. Об одном вопросе теории S -квазинормальных подгрупп / Д.П. Ковалькова, А.Н. Скиба. — Гомель, 2010. — 30 с. — (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 5).

Тезисы докладов конференций

8-А. Ковалькова, Д.П. Конечные группы с заданными системами S -квазинормальных подгрупп / Д.П. Ковалькова, А.П. Скиба // Международная научная конференция (2009, Минск) "Дискретная математика, алгебра и ее приложения 19–22 октября 2009 г.": — Минск: 2009. — С. 22.

9-А. Ковалькова, Д.П. Конечные группы с заданными системами S -квазинормальных подгрупп / Д.П. Ковалькова // XIII Республикаская научная конф. студентов и аспирантов (2010, Гомель). XIII Республикаская научная конференция студентов и аспирантов "Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях 15–17 марта 2010 г.: материалы в 2 ч. Ч. 2 / редкол.: О.М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. — Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины, 2010. — С. 294–295.

10-А. Андреева, Д.П. Конечные группы с субнормальными вторыми максимальными подгруппами / Андреева Д.П. // 42-я Всероссийская молодежная школа-конференция "Современные проблемы математики 30 января – 6 февраля 2011 г.: – Екатеринбург: 2011. – С. 174-176.

11-А. Андреева, Д.П. О максимальных цепях длины три в конечных группах / Д.П. Андреева // Международная научно-практическая интернет конференция "Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам посвященная 60-летию доктора физико-математических наук, профессора Н.Т. Воробьева, 21-22 июня 2011 г.: – Витебск: 2011. – С. 5-6.

РЭЗЮМЭ

Андрэева Дзіна Пятроўна

Канечныя групы з субнармальнымі падгрупамі ў кароткіх ланцугах

Ключавыя словы: канечная група, перастаноўчая падгрупа, S -квазінармальная падгрупа, насычальная фармацыя, вырашаная група, звышвырашальная група, сёўская падгрупа, максімальная падгрупа, субнармальная падгрупа, максімальны ланцуг.

У дысертцыі прыведзена сістэматычнае вывучэнне ўплыву перастаноўчых n -ых максімальных падгруп на структуру груп ($n = 2, 3$), атрымана апісанне канечных груп, у якіх кожны максімальны ланцуг даўжыні два мае ўласную субнармальную падгрупу, атрымана апісанне канечных груп, у якіх кожны максімальны ланцуг даўжыні два мае ўласную S -квазінармальную падгрупу, атрымана апісанне канечных груп, у якіх кожны максімальны ланцуг даўжыні тры мае ўласную субнармальную падгрупу, атрымана апісанне канечных груп, у якіх кожны максімальны ланцуг даўжыні тры мае ўласную S -квазінармальную падгрупу.

Усе атрыманыя вынікі дысертцыі з'яўляюцца новымі. Яны маюць тэарэтычны характар і могуць быць выкарыстаны ў даследаваннях па тэорыі канечных груп і іх класаў, а таксама пры чытанні спецкурсаў ва ўніверсітэтах.

РЕЗЮМЕ

Андреева Дина Петровна

Конечные группы с субнормальными подгруппами в коротких цепях

Ключевые слова: конечная группа, перестановочная подгруппа, S -квазинормальная подгруппа, насыщенная формация, разрешимая группа, сверхразрешимая группа, словеская подгруппа, максимальная подгруппа, субнормальная подгруппа, максимальная цепь.

В диссертации приведено систематическое изучение влияния перестановочных n -ых максимальных подгрупп на строение групп ($n = 2, 3$), получено описание конечных групп, у которых в каждой максимальной цепи длины два имеется собственная субнормальная подгруппа, получено описание конечных групп, у которых в каждой максимальной цепи длины два имеется собственная S -квазинормальная подгруппа, получено описание конечных групп, у которых в каждой максимальной цепи длины три имеется собственная субнормальная подгруппа, получено описание конечных групп, у которых в каждой максимальной цепи длины три имеется собственная S -квазинормальная подгруппа.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Они имеют теоретический характер и могут быть использованы в исследованиях по теории конечных групп и их классов, а также при чтении спецкурсов в университетах.

Андреева Диана Петровна

**КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ
С СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ
В КОРОТКИХ ЦЕПЯХ**

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 16.11.2011. Формат 60 × 84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,04
Уч.-изд. л. 1,14. Тираж 60 экз. Заказ № 522.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
ЛИ № 02330, 0549481 от 14.05.2009.
Ул. Советская, 104. 246019. Гомель.