АЛГЕБРА

ДЛЯ УПОТРЕБЛЕНІЯ ВЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЯХЪ

и

САМООБУЧЕНІЯ.

Съ обширнымъ собраніемъ примѣровъ.

СОСТАВИЛЪ

И. Тодгентеръ,

Докторъ наукъ, Членъ Лондонскаго Королевскаго Общества, бывшій преподаватель коллегіи св. Іоанна въ Кэмбриджѣ.

СЪ ПОСЛѢДНЯГО АНГЛІЙСКАГО ИЗДАНІЯ ПЕРЕВЕЛЪ

Е. А. Предтеченскій.

Цѣна 2 р. 50 к.

Изданіе Ф. Павленкова.

524012

Установа адукацыі "Віцебскі дзяржаўны універсітэт імя П.М.Машэрава" БІБЛІЯТЭКА

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типографія Товарищ. „Общественная Польза", Больш. Подъяч., № 39

1891.

Дозволено цензурою. С.-Петербургъ, 22 Февраля 1891 года.

Къ русскому изданію.

Предлагаемый курсъ Алгебры во многомъ выгодно отличается отъ существующихъ у насъ оригинальныхъ и компилятивныхъ руководствъ по этому предмету, на каждомъ шагу обличая въ авторѣ рѣдкое соединеніе свойствъ ученаго и учителя. Излагая тотъ или другой вопросъ, доказывая то или другое предложеніе, авторъ достигаетъ своей цѣли всегда кратчайшимъ путемъ и вездѣ обращаетъ вниманіе на сущность дѣла, а не на второстепенныя подробности, которымъ, къ сожалѣнію отводится иногда такъ много мѣста нашими составителями учебниковъ. Въ этомъ отношеніи достаточно указать на вопросъ о скобкахъ, которому у насъ особенно посчастливилось. Этотъ побочный вопросъ алгебраической техники, съ которымъ можно знакомиться попутно и постепенно, разросся у насъ до невѣроятныхъ размѣровъ и заполонилъ даже учебники и задачники по начальной ариѳметикѣ, гдѣ прежде объ немъ не было и помину. Нечего и говорить, что всѣ эти упражненія со скобками въ ариѳметикѣ совершенно безполезны, вовсе не достигаютъ предположенной цѣли и составляютъ лишь ненужный балластъ.

Учебный матеріалъ расположенъ у Тодгентера такъ, что онъ всегда посиленъ читателю и не можетъ затруднить его обиліемъ подробностей. Въ тѣхъ случаяхъ, когда автору нужно было развить извѣстный вопросъ, онъ посвящаетъ ему новую главу впослѣдствіи, когда силы читателя значительно возрастутъ. Поэтому предлагаемое руководство, служа отличнымъ пособіемъ при прохожденіи алгебры въ учебномъ заведеніи, особенно пригодно для изученія этого предмета безъ помощи наставника, такъ что можетъ считаться наилучшимъ изъ самоучителей. Такой здраво-практи-

ческій народъ какъ англичане, давно уже перестали смотрѣть на учебныя руководства какъ на дѣтскія и юношескія книги; они назначаютъ свои учебники не исключительно для школьниковъ, а и для взрослыхъ людей, для всего общества, потому что не всякій можетъ получить достаточно полное образованіе въ дѣтствѣ и отрочествѣ, а между тѣмъ впослѣдствіи у него можетъ явиться желаніе познакомиться съ тою или другою отраслью знанія. Наши учебники и въ этомъ отношеніи составляютъ совершенную противоположность, такъ какъ представляютъ собою чисто дѣтскія или школьныя книжки. У насъ учебники, напр., географіи или грамматики таковы, что взрослому человѣку ихъ совѣстно взять въ руки, если бы ему захотѣлось о чемъ нибудь справиться въ нихъ. Предлагаемая книга совершенно свободна отъ этого недостатка и никогда не приведетъ въ смущеніе обращающагося къ ней, хотя бы онъ уже давнымъ-давно перерось школьный возрастъ.

Какъ бы ни были хороши школы—а имъ остается еще очень многаго желать, но наиболѣе основательное знаніе всегда будетъ пріобрѣтаться людьми самостоятельно; такое знаніе—самое прочное, да и самое плодотворное. Поэтому намъ кажется, что книги, составленныя выдающимися людьми и могущія служить самоучителями, полезнѣе многихъ банальныхъ учебниковъ.

Въ книгѣ Тодгентера читатель найдетъ не мало такого, чего онъ не встрѣтитъ ни въ одномъ учебникѣ алгебры, не говоря уже о такихъ главахъ, какъ теорія чиселъ и теорія вѣроятностей, никогда еще не попадавшихъ въ наши элементарные учебники, хотя имъ давно бы уже слѣдовало тамъ быть. Благодаря этимъ особенностямъ, предлагаемая книга можетъ оказаться полезной и при слушаніи болѣе обширнаго курса математики, чѣмъ гимназическій, или по крайней мѣрѣ послужить желательнымъ дополненіемъ къ послѣднему.

Е. Предтеченскій.

ПРЕДИСЛОВІЕ СОСТАВИТЕЛЯ.

Настоящее сочиненіе содержитъ въ себѣ всѣ предложенія, обыкновенно включаемыя въ руководства по Начальной Алгебрѣ, и снабжено обширнымъ собраніемъ примѣровъ.

Главнѣйшимъ моимъ стараніемъ было сдѣлать изложеніе какъ можно болѣе понятнымъ. Необходимо пріучать учащихся внимательно относиться къ языку употребляемой ими книги, чтобы они могли быть увѣрены въ ея пониманіи, или могли бы точно указать, гдѣ начинаются для нихъ затрудненія. Поэтому языкъ долженъ быть простой и точный; причемъ крайне важно, чтобы кажущаяся краткость не достигалась на счетъ ясности.

Но стремясь сдѣлать изложеніе возможно болѣе понятнымъ, надѣюсь, я не причинилъ этимъ ущерба строгости доказательствъ и не сократилъ объема предмета. Напротивъ мнѣ кажется, что въ обоихъ этихъ отношеніяхъ я навѣрное переступилъ ту границу, которая была проведена прежними составителями начальныхъ руководствъ.

Предлагаемая книга раздѣлена на большое число главъ, причемъ каждая изъ нихъ, на сколько это возможно, вполнѣ закончена. Такимъ образомъ учащемуся не придется усваивать слишкомъ много въ одинъ разъ; а если ему не удастся вполнѣ понять какую-нибудь главу, то это не помѣшаетъ ему перейти къ слѣдующей, отложивъ трудности до болѣе благопріятнаго времени. Послѣднее особенно важно для тѣхъ, кто учится безъ помощи учителя.

Порядокъ, въ которомъ слѣдуютъ различныя главы, до нѣкоторой степени произволенъ, потому что мѣсто, которое должна занимать та или другая изъ нихъ, зависитъ частью отъ ея трудности, частью-же отъ ея важности. Но такъ какъ каждая глава почти независима отъ другой, то преподаватель можетъ и не держаться порядка, принятаго въ книгѣ, и избрать другой—по его желанію.

Примѣры подобраны съ цѣлью пояснить каждый отдѣлъ предмета, и такъ какъ все число ихъ болѣе двухъ тысячъ, то я надѣюсь, что они представятъ достаточно матеріала для упражненія учащагося. Очень сложныхъ и трудныхъ задачъ я избѣгалъ, потому что онѣ требуютъ много времени и труда, который съ бо́льшею пользою, можно затратить на другія отрасли математики. Каждый рядъ примѣровъ старательно подобранъ и начинается съ очень простыхъ, за которыми слѣдуютъ постепенно другіе, уже не столь легкіе. Задачи, озаглавленныя *Разные примѣры*, а равно и нѣкоторыя изъ задачъ при другихъ главахъ учащійся, при первомъ чтеніи, можетъ пропускать. Отвѣты къ примѣрамъ съ указаніемъ рѣшенія нѣкоторыхъ изъ нихъ, гдѣ это было нужно, даны въ концѣ книги.

Теперь укажу на источники, которыми я пользовался при составленіи этого руководства.

Алгебра Вуда уже такъ давно принята учебникомъ въ Англіи, что сдѣлалась теперь общественнымъ достояніемъ, и составитель новаго руководства, какъ это хорошо извѣстно всякому преподавателю, естественно долженъ стараться до нѣкоторой степени пользоваться ею. Первое изданіе этого руководства появилось въ 1795 году, а десятое—въ 1835 г.; десятое изданіе было послѣднимъ, вышедшимъ при жизни д-ра Вуда. Главы объ ирраціональныхъ величинахъ, о кратномъ отношеніи и пропорціи почти цѣликомъ заимствованы мною изъ Алгебры Вуда. Точно также я часто привожу и примѣры изъ Вуда—какъ въ текстѣ, такъ и въ собраніи задачъ. Кромѣ того и при установленіи правилъ въ элементарной части моей книги я часто слѣдовалъ Вуду, какъ напримѣръ при изложеніи правила дѣленія много-

членовъ; правила эти должны быть почти тожественными во всѣхъ руководствахъ по Алгебрѣ. Я охотно воспользовался-бы авторитетомъ д-ра Вуда и въ большей степени, но требованія, предъявляемыя къ алгебрѣ при настоящемъ состояніи математическаго образованія, дѣлаютъ это невозможнымъ. Десятое изданіе Алгебры Вуда содержитъ въ себѣ меньше половины того, что заключается въ настоящемъ руководствѣ, и половина этого посвящена предметамъ, изучаемымъ теперь по другимъ руководствамъ и относимымъ обыкновенно къ Ариѳметикѣ, къ Теоріи уравненій, къ Приложенію Алгебры къ Геометріи и отчасти къ Суммованію рядовъ. Большая часть остального матеріала по своей краткости и неполнотѣ теперь уже не можетъ удовлетворить потребностямъ учащихся. Такимъ образомъ въ итогѣ осталось лишь немного страницъ, которыя я счелъ полезнымъ удержать изъ Алгебры Вуда.

При добавленіяхъ къ этому я пользовался главнымъ образомъ Руководствомъ по ариѳметикѣ и алгебрѣ изъ «Библіотеки полезныхъ знаній», а также сочиненіями Бурдона, Лефебюра-де-Фурси, Майера и Шоке, и Шлёмильха. Съ большою пользою я прочиталъ равнымъ образомъ и Алгебру профессора де-Моргана, а также другія его сочиненія, касающіяся алгебры.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ я справлялся съ Алгеброй Вуда, изданной Лёндомъ въ 1841 г., съ Алгеброй Гайнда, 1841 г., съ Алгеброй Коленсо, 1849 г., и съ Начальнымъ курсомъ Математики Гудвина, 1853 г.

Хотя я не колеблясь заимствовалъ нужное для меня у вышеупомянутыхъ авторовъ, но настоящее сочиненіе заключаетъ въ себѣ много такого, что принадлежитъ исключительно мнѣ; и я увѣренъ, что моя Алгебра, какъ убѣдятся въ этомъ читатели, содержитъ въ себѣ новаго и оригинальнаго больше, чѣмъ другія распространенныя въ Англіи сочиненія этого рода. Впрочемъ оригинальность въ элементарныхъ сочиненіяхъ рѣдко можетъ быть полезной, и выпуская въ свѣтъ первое изданіе моей Алгебры, я нѣсколько опасался за то, не слишкомъ-ли я уклонился отъ принятыхъ спосо-

бовъ. Поэтому я съ большимъ удовольствіемъ узналъ о благопріятныхъ отзывахъ уважаемыхъ преподавателей какъ о всемъ моемъ руководствѣ вообще, такъ и о томъ, что въ немъ есть моего собственнаго.

Настоящее изданіе было тщательно пересмотрѣно, причемъ были прибавлены двѣ новыя главы и вставлено триста разныхъ примѣровъ, собранныхъ въ группы по десяти примѣровъ въ каждой. Первая сотня примѣровъ относится къ первымъ двадцати главамъ книги; вторая сотня приложена къ концу сороковой главы и наконецъ послѣдняя относится ко всей книгѣ.

Изъявляю мою благодарность многимъ уважаемымъ математикамъ, помогшимъ мнѣ своими совѣтами, которыми я и воспользовался; произведенныя въ книгѣ улучшенія, мнѣ кажется, сдѣлаютъ ее еще болѣе удобной для употребленія при обученіи и болѣе достойной того одобренія, какого она удостоилась.

Моему руководству по *Теоріи уравненій* я придалъ форму продолженія *Алгебры;* такъ что учащійся можетъ перейти къ нему, какъ къ естественному продолженію этого.

И. Тодгентеръ.

СОДЕРЖАНІЕ.

ГЛАВЫ.	СТРАН.
1. Опредѣленія и обозначеніе.	1
2. Измѣненіе порядка членовъ. Приведеніе. Сложеніе. Вычитаніе. Употребленіе скобокъ	7
3. Умноженіе.	13
4. Дѣленіе.	21
5. Отрицательныя количества.	29
6. Общій наибольшій дѣлитель.	39
7. Общее наименьшее кратное	46
8. Дроби	49
9. Уравненія первой степени	60
10. Задачи, приводящія къ уравненіямъ первой степени съ одною неизвѣстною величиною.	69
11. Совмѣстныя уравненія первой степени съ двумя неизвѣстными величинами.	75
12. Совмѣстныя уравненія первой степени, болѣе чѣмъ съ двумя неизвѣстными величинами.	80
13. Задачи, приводящія къ уравненіямъ первой степени, содержащимъ въ себѣ болѣе одной неизвѣстной	83
14. Разборъ нѣкоторыхъ задачъ, приводящихъ къ уравненіямъ первой степени.	90
15. Особенности, представляющіяся при рѣшеніи уравненій первой степени.	100
16. Возвышеніе въ степень (инволюція).	111
17. Извлеченіе корней (эволюція).	114
18. Теорія показателей.	128
19. Ирраціональныя величины.	135
20. Квадратныя уравненія	146
21. Уравненія, рѣшаемыя подобно квадратнымъ.	151
22. Теорія квадратныхъ уравненій и выраженій второй степени. . . .	163
23. Совмѣстныя уравненія второй степени.	169
24. Задачи, приводящія къ квадратнымъ уравненіямъ	175
25. Воображаемыя (мнимыя) выраженія.	182

ГЛАВЫ. СТРАН.
26. Кратное (геометрическое) отношеніе 190
27. Пропорція 195
28. О пропорціональномъ измѣненіи. 203
29. Системы письменнаго счисленія 208
30. Ариѳметическая прогрессія. 219
31. Геометрическая прогрессія. 228
32. Гармоническая прогрессія. 235
33. Математическая индукція. 239
34. Перестановки и сочетанія. 243
35. Теорема Ньютона для цѣлаго и положительнаго показателя. . . . 253
36. Теорема Ньютона для всякаго показателя. 262
37. Распространеніе теоремы Ньютона на многочлены. 276
38. Логариѳмы 282
39. Показательные и логариѳмическіе ряды. 285
40. Сходимость и расходимость рядовъ. 292
41. Ростъ или проценты 300
42. Уравненіе платежей. 304
43. Срочные платежи. 309
44. Непрерывныя дроби 314
45. Обращеніе ирраціональныхъ величинъ второй степени въ непрерывную дробь. 321
46. Неопредѣленныя уравненія первой степени 332
47. Неопредѣленныя уравненія степени выше первой. 340
48. Частныя дроби и неопредѣленные коэффиціенты. 344
49. Возвратные ряды. 348
50. Суммованіе рядовъ. 350
51. Неравенства 360
52. Теорія чиселъ 372
53. Теорія вѣроятностей. 386
54. Различныя уравненія 416
55. Разныя задачи. 428
56. Сходимость и расходимость рядовъ. 436
57. Непрерывныя дроби 445
58. Разныя теоремы. 460
59. Разныя задачи. 472
60. Отвѣты. 497

АЛГЕБРА.

ГЛАВА I.

Опредѣленія и обозначеніе.

1. Способъ разсуждать о числахъ съ помощью буквъ, употребляемыхъ для обозначенія чиселъ, и знаковъ, употребляемыхъ для обозначенія соотношеній между ними, называется *Алгеброй*.

2. Числа, представляемыя буквами, могутъ быть или *извѣстными*, или еще только искомыми, а слѣдовательно *неизвѣстными*. Принято означать *извѣстныя* числа первыми буквами латинской азбуки: a, b, c, а *неизвѣстныя* числа—послѣдними буквами: x, y, z. Впрочемъ это не составляетъ обязательнаго правила и нѣтъ никакой особой надобности строго держаться этого.

Числа могутъ быть или цѣлыми, или дробными. Слово *количество* часто употребляется какъ равнозначущее со словомъ *число*. Слово *цѣлое* часто употребляется вмѣсто словъ *цѣлое число*.

3. Знакъ $+$ обозначаетъ, что число, предъ которымъ онъ стоитъ, *прикладывается* къ другому. Такъ $a+b$ означаетъ, что число, представляемое буквой b, прикладывается къ числу, представляемому буквой a. Если a представляетъ 9, а b представляетъ 3, то $a+b$ представитъ 12. Знакъ $+$ называется *знакомъ плюсъ*, и $a+b$ читается: «a *плюсъ* b».

Подобнымъ образомъ $a+b+c$ означаетъ, что къ a мы должны приложить b, и затѣмъ къ результату приложить c.

4. Знакъ — означаетъ, что число, предъ которымъ онъ стоитъ, *вычитается*. Такъ $a-b$ означаетъ, что число, представляемое буквой b, должно вычесть изъ числа, представляемаго буквой a. Если a представляетъ 9, а b представляетъ 3, то $a-b$ представитъ 6. Знакъ — называется *знакомъ минусъ*, и $a-b$ читается: «a *минусъ* b».

Подобнымъ образомъ $a-b-c$ означаетъ, что изъ a должно вычесть b и потомъ изъ результата вычесть c; $a+b-c$ означаетъ, что мы должны къ a прибавить b и вычесть изъ этой суммы c; $a-b+c$ означаетъ, что изъ a мы должны вычесть b и потомъ къ полученному приложить c.

5. Знакъ $\times$ означаетъ, что числа, между которыми онъ стоитъ, должны быть *перемножены*. Такъ $a \times b$ означаетъ, что число, представляемое буквой a, должно быть умножено на число, представляемое буквой b. Если a представляетъ 9, а b представляетъ 3, то $a \times b$ представитъ 27. Знакъ $\times$ называется *знакомъ умноженія*, и $a \times b$ читается: «a *умноженное на* b». Подобнымъ образомъ $a \times b \times c$ означаетъ произведеніе чиселъ, представляемыхъ буквами a, b и c.

Нужно замѣтить, что знакъ умноженія для краткости часто опускается; такъ вмѣсто $a \times b$ употребляется, въ томъ-же самомъ значеніи, ab; точно также abc употребляется вмѣсто $a \times b \times c$. Иногда знакъ $\times$ замѣняется точкой; такъ, вмѣсто $a \times b$ пишутъ $a \,.\, b$. Но точка здѣсь излишня, потому что, какъ мы уже сказали, вмѣсто $a \times b$ употребляется просто ab. Нѣтъ надобности также ставить точку или знакъ $\times$ между числомъ, выраженнымъ обыкновеннымъ образомъ посредствомъ цифры, и другимъ числомъ, представленнымъ буквой; такъ напримѣръ, вмѣсто $3 \times a$ употребляется $3a$ и имѣетъ то-же самое значеніе.

Знака умноженія нельзя опускать, когда числа выражены цифрами обыкновеннымъ образомъ. Такъ 45 не можетъ употребляться для выраженія произведенія 4 на 5, потому что этому сочетанію цифръ уже присвоенъ совершенно особый смыслъ, именно оно означаетъ *сорокъ пять*. Такимъ образомъ произведеніе 4 на 5 мы должны выразить 4×5 или $4 \,.\, 5$. Чтобы не смѣшивать точку, употребляемую какъ знакъ умноженія, съ точкой, употребляемой при обозначеніи десятичныхъ дробей, было-бы благоразумно ставить послѣднюю точку нѣсколько выше; такъ $4 \cdot 5$ можно было-бы сохранить для обозначенія $4 + \frac{5}{10}$.

6. Знакъ : показываетъ, что стоящее предъ нимъ число должно раздѣлить на число, слѣдующее за нимъ. Такъ $a : b$ означаетъ, что число, представляемое буквой a, должно быть раздѣлено на число, представляемое буквой b. Если a означаетъ 9, а b означаетъ 3, то $a : b$ представитъ 3. Знакъ : называется *знакомъ дѣленія*, и $a : b$ читается: «a *дѣленное на* b». Существуетъ еще и другой способъ для обозначенія того, что одно число раздѣлено на другое: дѣлимое помѣщается надъ дѣлителемъ и между ними ставится черточка. Такъ обозначеніе $\frac{a}{b}$ употребляется вмѣсто $a : b$ и имѣетъ то-же самое значеніе.

7. Знакъ $=$ показываетъ, что числа, между которыми онъ поставленъ, равны между собою. Такъ $a = b$ показываетъ, что число, пред-

ставляемое буквой a, равно числу, представляемому буквой b, то-есть, что a и b представляютъ одно и то-же число. Знакъ $=$ называется *знакомъ равенства*, и $a=b$ читается: «a *равно* b» или «a *равняется* b».

8. Разность двухъ чиселъ означается иногда знакомъ $\sim$; такъ $a\sim b$ означаетъ разность чиселъ, представляемыхъ буквами a и b, и равняется или $a-b$, или $b-a$, смотря по тому, будетъ-ли a больше b или меньше b.

9. Знакъ $>$ означаетъ слово *больше*, а знакъ $<$ означаетъ—*меньше*; такъ $a>b$ означаетъ, что число, представляемое буквой a, больше числа, представляемаго буквой b; а $b<a$ означаетъ, что число, представляемое буквой b, меньше числа, представляемаго буквой a. Такимъ образомъ у обоихъ знаковъ отверстіе угла обращено къ большему числу.

10. Знакъ $\therefore$ употребляютъ иногда для замѣны словъ *слѣдовательно* или *поэтому*; а знакъ $\because$ для замѣны слова *такъ какъ*.

11. Когда нѣсколько членовъ должны быть взяты вмѣстѣ, то ихъ заключаютъ въ *скобки*. Такъ $(a-b+c)\times(d+e)$ означаетъ, что число, представляемое выраженіемъ $a-b+c$, должно умножить на число, представляемое выраженіемъ $d+e$. Это можно написать еще такъ: $(a-b+c)(d+e)$. Необходимость скобокъ можно видѣть изъ сравненія даннаго сейчасъ выраженія съ выраженіемъ $(a-b+c)d+e$; это послѣднее означаетъ, что число, представляемое выраженіемъ $a-b+c$, нужно умножить на d, послѣ чего къ произведенію придать e.

Иногда вмѣсто скобокъ проводится надъ тѣми числами, которыя должны быть взяты вмѣстѣ, горизонтальная черта (vinculum). Такъ $\overline{a-b+c}\times\overline{d+e}$ употребляется въ томъ-же самомъ смыслѣ, какъ $(a-b+c)\times(d+e)$.

12. Буквы азбуки и знаки, приведенные и объясненные выше, вмѣстѣ съ тѣми, которые могутъ встрѣтиться впослѣдствіи, называются вообще алгебраическими символами, такъ какъ они представляютъ собою предметы, о которыхъ намъ приходится разсуждать.

Всякая совокупность алгебраическихъ символовъ называется *алгебраическимъ выраженіемъ*, или просто *выраженіемъ*, или еще *формулой*. Алгебраическое выраженіе называется иногда *алгебраическимъ количествомъ* или короче—просто *количествомъ*.

13. Тѣ части алгебраическаго выраженія, которыя соединяются другъ съ другомъ знаками $+$ и $-$, называются его *членами*. Когда выраженіе состоитъ изъ *двухъ* членовъ, оно называется *двучленнымъ* выраженіемъ или просто *двучленомъ*; когда оно состоитъ изъ *трехъ* членовъ то называется *трехчленнымъ выраженіемъ* или *трехчле-*

номъ, и вообще выраженіе, седержащее нѣсколько членовъ, называется *многочленнымъ выраженіемъ*, *многочленомъ* или еще *полиномомъ*. Когда выраженіе не содержитъ въ себѣ частей, соединенныхъ знаками + или —, то оно можетъ быть названо *простымъ выраженіемъ*, и его можно разсматривать какъ состоящее изъ *одного члена* и называть *одночленомъ*.

Такъ abc есть *простое* или *одночленное выраженіе*; $abc+x$ будетъ *двучленное выраженіе*, въ которомъ abc будетъ одинъ членъ, а x другой членъ; $ab+ac-bc$ будетъ *трехчленное выраженіе*, въ которомъ *членами* будутъ ab, ac и bc.

14. Когда число состоитъ изъ произведенія двухъ или болѣе чиселъ, то каждое изъ послѣднихъ называется *производителемъ* этого числа. Такъ a, b и c суть *производители* или множители числа abc.

15. Въ произведеніи одинъ изъ множителей можетъ быть числомъ x представленнымъ *ариѳметически*, а другой числомъ, представленнымъ *алгебраически*, т. е. одной или нѣсколькими буквами; въ такомъ случаѣ первый множитель называется *коэффиціентомъ* послѣдняго. Такъ въ произведеніи $7abc$ множитель 7 называется коэффиціентомъ множитель abc. Гдѣ нѣтъ никакого численнаго множителя, мы можемъ дополнять произведеніе множителемъ единицей; такъ мы можемъ говорить, что произведеніе abc имѣетъ коэффиціентомъ единицу.

Но и когда произведеніе представлено чисто алгебраически, одинъ изъ его множителей можетъ называться коэффиціентомъ остальныхъ множителей. Такъ въ произведеніи abc мы можемъ называть a коэффиціентомъ bc или b коэффиціентомъ ac, или c коэффиціентомъ ab. Если нужно отличить такое употребленіе слова коэффиціентъ отъ предыдущаго, то послѣдній коэффиціентъ можно называть *буквеннымъ* коэффиціентомъ, а прежній — *численнымъ* коэффиціентомъ.

16. Если число умножается само на себя нѣсколько разъ, то произведеніе называется *степенью* этого числа. Такъ $a \times a$ называется *второю* степенью a; $a \times a \times a$ называется *третьею* степенью a; $a \times a \times a \times a$ называется *четвертою* степенью a; и такъ далѣе. Самое число a называется *первою* степенью a.

17. Какая-либо степень количества обыкновенно выражается постановкой надъ количествомъ числа, показывающаго, сколько разъ оно берется множителемъ для составленія произведенія. Такъ a^2 принято для выраженія $a \times a$; точно также a^3 употребляется вмѣсто $a \times a \times a$; a^4 вмѣсто $a \times a \times a \times a$, и такъ далѣе. И a^1 можетъ употребляться для означенія первой степени a, т. е. самого a; иначе сказать, a^1 имѣетъ тотъ-же смыслъ, какъ и a.

Числа, помѣщаемыя надъ количествомъ для выраженія степеней

этого количества, называются *экспонентами*, *показателями степеней*, или короче—просто *показателями*.

18. Слѣдовательно, содержаніе двухъ предыдущихъ статей мы можемъ кратко выразить такъ: произведеніе n множителей, изъ которыхъ каждый равенъ a, выражается символомъ a^n, гдѣ n называется показателемъ или экспонентомъ a^n и представляетъ собою нѣкоторое цѣлое число.

19. Вторая степень a или a^2 называется часто *квадратомъ* a, а третья степень a или a^3 называется часто *кубомъ* a. Символъ a^4 читается «a *въ четвертой степени*» или короче—«a *въ четвертой*».

20. *Квадратнымъ корнемъ* какого-нибудь даннаго числа называется такое число, для котораго данное число есть *квадратъ*. *Кубичнымъ корнемъ* даннаго числа называется такое число, для котораго данное число есть *кубъ*, или третья степень. *Корнемъ четвертой степени* называется такое число, для котораго данное число есть *четвертая* степень; и такъ далѣе.

21. Квадратный корень изъ числа a означается $\sqrt[2]{a}$ или просто $\sqrt{a}$. Кубическій корень изъ a означаетъ $\sqrt[3]{a}$. Корень четвертой степени изъ a означается $\sqrt[4]{a}$. И такъ далѣе.

Знакъ $\sqrt{\ }$ есть видоизмѣненная начальная буква слова *radix*. Знакъ этотъ называется иногда *радикаломъ*.

22. Члены называются *подобными*, когда они или вовсе ничѣмъ не отличаются другъ отъ друга, или отличаются только своими численными коэффиціентами; въ противномъ случаѣ они не будутъ подобны. Такъ $4a$, $6ab$, $9a^2$ и $3a^2bc$ соотвѣтственно будутъ подобны съ $15a$, $3ab$, $12a^2$ и $15a^2bc$. А члены ab, a^2b, ab^2 и abc не подобны между собою.

23. Каждая изъ буквъ, стоящая въ алгебраическомъ произведеніи, называется *измѣреніемъ* произведенія, а число этихъ буквъ называется *степенью* произведенія. Такъ a^2b^3c или $a\times a\times b\times b\times b\times c$ будетъ шести измѣреній или шестой степени. Численный коэффиціентъ при этомъ не принимается въ разсчетъ; такъ $9a^3b^4$ и a^3b^4 будутъ оба одного и того-же измѣренія, именно седьмого. Такимъ образомъ *степень* члена или *число измѣреній* члена есть *сумма* показателей буквъ, если мы не забудемъ, что когда у извѣстныхъ буквъ нѣтъ показателей, то надо подразумѣвать показателями ихъ единицу, какъ показано въ ст. 17.

24. Алгебраическое выраженіе называется *однороднымъ*, когда всѣ его члены будутъ одинаковаго измѣренія. Такъ $7a^3+3a^2b+4abc$ однородное выраженіе, потому что каждый членъ его—третьяго измѣренія.

Слѣдующіе примѣры могутъ служить для упражненія въ приложеніи предыдущихъ опредѣленій.

Примѣры.

Если $a=1$, $b=3$, $c=4$, $d=6$, $e=2$ и $f=0$, то найти численное значеніе слѣдующихъ двѣнадцати алгебраическихъ выраженій:

1. $a+2b+4c$.
2. $3b+5d-2e$.
3. $ab+2bc+3ed$.
4. $ac+4cd-2eb$.
5. $abc+4bd+ec-fd$.
6. $a^2+b^2+c^2+f^2$.
7. $\frac{cd}{6}+\frac{4be}{3a}-\frac{cd}{24}$.
8. c^4-4c^3+3c-6.
9. $\frac{b^2+c^2}{2c-3a}$.
10. $\frac{d^3-c^3}{d^2+dc+c^2}$.
11. $\sqrt{(27b)}-\sqrt[3]{(2c)}+\sqrt{(2e)}$.
12. $\sqrt{(3bc)}+\sqrt[3]{(9cd)}-\sqrt[3]{(2e^2)}$.

13. Найти значеніе $(9-y)\cdot(x+1)+(x+5)\cdot(y+7)-112$, если $x=3$ и $y=5$.

14. Найти значеніе выраженія $x\sqrt{(x^2-8y)}+y\sqrt{(x^2+8y)}$, если $x=5$ и $y=3$.

15. Найти значеніе выраженія $a\sqrt{(x^2-3a)}+x\sqrt{(x^2+3a)}$, если $x=5$ и $a=8$.

16. Найти значеніе выраженія $a+b\sqrt{(x+y)}-(a-b)\sqrt[3]{(x-y)}$, если $a=10$, $b=8$, $x=12$, $y=4$.

17. Принимая $a=16$, $b=10$, $x=5$ и $y=1$, найти значеніе выраженій

$$(b-x)(\sqrt{a+b})+\sqrt{\{(a-b)(x+y)\}}$$
$$(a-y)\{\sqrt{(2bx)}+x^2\}+\sqrt{\{(a-x)(b+y)\}}.$$

18. Принимая $a=2$, $b=3$, $x=6$ и $y=5$, найти значеніе выраженія $\sqrt[3]{\{(a+b)^2y\}}+\sqrt[3]{\{(a+x)(y-2a)\}}+\sqrt[3]{\{(y-b)^2a\}}$.

ГЛАВА II.

Измѣненіе порядка членовъ Приведеніе. Сложеніе и вычитаніе. Скобки.

25. Когда члены какого нибудь выраженія соединены между собою знакомъ $+$, то безразлично, въ какомъ *порядкѣ* ихъ писать. Такъ $a+b$ и $b+a$ даютъ одинъ и тотъ-же результатъ, именно сумму двухъ чиселъ, означенныхъ буквами a и b Мы можемъ выразить это условіе алгебраически такимъ образомъ:

$$a+b=b+a.$$

Подобнымъ-же образомъ

$$a+b+c=a+c+b=b+a+c=b+c+a=c+a+b=c+b+a.$$

26. Когда какое-нибудь выраженіе состоитъ изъ нѣсколькихъ членовъ, предъ которыми стоитъ знакъ $+$, и изъ нѣсколькихъ другихъ членовъ, предъ которыми стоитъ знакъ $-$, то мы можемъ писать сначала первые члены въ какомъ угодно порядкѣ, а за ними вторые члены, тоже въ какомъ угодно порядкѣ. Это дѣлается очевиднымъ изъ тѣхъ-же разсужденій какъ и раньше. Такъ, напримѣръ

$$a+b-c-e=a+b-e-c=b+a-c-e=b+a-e-c.$$

27. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ очевидно мы можемъ измѣнять порядокъ впереди стоящихъ членовъ, перемѣшивая члены, предшествуемые знакомъ $+$, съ членами, предъ которыми стоитъ знакъ $-$. Такъ напримѣръ, если a представляетъ 10, b представляетъ 6 и c представляетъ 5, то

$$a+b-c=a-c+b=b-c+a.$$

Если-же a представляетъ 2, b представляетъ 6 и c представляетъ 5, то при вычисленіи выраженія $a-c+b$ встрѣтится нѣкоторое затрудненіе, потому что здѣсь очевидно требуется отнять большее число отъ меньшаго, именно 5 отъ 2. Будетъ удобно допустить, что такія выраженія, какъ $a-c+b$, гдѣ c больше a, должны быть *понимаемы въ томъ-же самомъ смыслѣ, какъ* и $a+b-c$. Теперь мы пока будемъ употреблять такія выраженія лишь въ томъ случаѣ, когда c меньше $a+b$, такъ что $a+b-c$ не представитъ затрудненія. Подобно этому мы будемъ разсматривать и выраженіе $-b+a$ тожественнымъ съ выраженіемъ $a-b$. Мы возвратимся къ этому вопросу впослѣдствіи въ главѣ V.

28. Итакъ, численное значеніе какого нибудь выраженія остается однимъ и тѣмъ-же, каковъ бы не былъ *порядокъ* составляющихъ его членовъ. Это слѣдуетъ, какъ мы видѣли, частью изъ нашихъ понятій о сложеніи и вычитаніи, частію-же изъ условнаго значенія, которое мы

приписываемъ извѣстному выраженію, когда наши ариѳметическія понятія не могутъ къ нему строго прилагаться. Подобнаго рода допущенія называются въ алгебрѣ вообще *условіями*, откуда происходитъ также и соотвѣтствующее прилагательное—*условный*.

29. Намъ пришлось-бы часто, какъ въ ст. 26, различать члены выраженія, предъ которыми стоитъ знакъ +, отъ членовъ, предъ которыми стоитъ знакъ —; поэтому допущено слѣдующее опредѣленіе: Члены выраженія, предъ которыми стоитъ знакъ + или не стоитъ никакого знака, называются *положительными* членами; члены-же, предъ которыми стоитъ знакъ —, называются *отрицательными* членами, Это опредѣленіе вводится преимущественно для краткости, причемъ словамъ: *положительный* и *отрицательный* не придается никакого особаго значенія, кромѣ того, которое заключается въ самомъ опредѣленіи. Учащійся долженъ замѣтить, что члены, не имѣющіе никакого знака, должны быть понимаемы такъ, какъ будто-бы они имѣли знакъ +.

30. Иногда выраженіе заключаетъ въ себѣ много *подобныхъ* членовъ; въ такомъ случаѣ оно допускаетъ упрощеніе. Напримѣръ, разсмотримъ выраженіе $4a^2b-3a^2c+9ac^2-2a^2b+7a^2c-6b^2$; это можно написать: $4a^2b-2a^2b+7a^2c-3a^2c+9ac^2-6b^2$ (ст. 28). Но $4a^2b-2a^2b$ то-же, что $2a^2b$, и $7a^2c-3a^2c$ то-же, что $4a^2c$. Такимъ образомъ, выраженіе это можетъ быть приведено къ болѣе простому виду: $2a^2b+4a^2c+9ac^2-6b^2$.

Сложеніе.

31. *Сложеніе алгебраическихъ выраженій состоитъ въ писаніи членовъ послѣдовательно другъ за другомъ съ тѣми знаками, какіе предъ ними стоятъ.*

Дѣйствительно, положимъ, что намъ нужно приложить $c-d+e$ къ $a-b$; это то-же самое, что приложить $c+e-d$ къ $a-b$ (ст. 28). Но если мы придадимъ $c+e$ къ $a-b$, то получимъ $a-b+c+e$; однако мы придали слишкомъ много, именно больше на d, поэтому нужно вычесть d. Слѣдовательно мы получимъ $a-b+c+e-d$, что будетъ то-же самое, какъ и $a-b+c-d+e$; такимъ образомъ результатъ оказывается согласнымъ съ прежде даннымъ правиломъ. Результатъ этотъ называется *суммой*.

Мы можемъ писать его такъ:

$$a-b+(c-d+e)=a-b+c-d+e.$$

32. Когда складываемые члены выраженія всѣ *не подобны* между собою, то сумма, полученная по этому правилу, не допускаетъ упрощенія. Но когда въ выраженіи встрѣчаются *подобные* члены, то мы можемъ упростить его, какъ показано въ ст. 30. Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему правилу:

Если подобные члены имѣютъ одинаковые знаки, то ихъ сумму мы находимъ, беря сумму коэффиціентовъ съ этимъ-же знакомъ и присоединяя къ ней общія всѣмъ членамъ буквы.

Примѣръ. Сложить $5a-3b$ съ $4a-7b$; сумма будетъ $9a-10b$, потому что $5a$ и $4a$ вмѣстѣ составляютъ $9a$, а $3b$ и $7b$ составляютъ вмѣстѣ $10b$.

Еще примѣръ. Сложить $4a^2c-10bde$, $6a^2c-9bde$ и $11a^2c-3bde$. Сумма будетъ $21a^2c-22bde$.

Когда подобные члены будутъ съ разными знаками, то сумму ихъ мы находимъ, беря разность суммы положительныхъ и суммы отрицательныхъ коэффиціентовъ со знакомъ большей суммы и присоединяя къ разности общія всѣмъ членамъ буквы.

Примѣръ. Сложить $7a-9b$ съ $5b-4a$. Сумма будетъ $3a-4b$.

Или еще: Сложить $3a^2+4bc-e^2+10$, $5a^2+6bc+2e^2-15$ и $4a^2-9bc-10e^2+21$. Сумма будетъ $12a^2+bc-9e^2+16$.

Вычитаніе.

33. Положимъ, что намъ нужно вычесть $b+c$ изъ a. Такъ какъ изъ a нужно вычесть каждое изъ чиселъ b и c, то въ этомъ случаѣ результатъ будетъ $a-b-c$, то-есть

$$a-(b+c)=a-b-c.$$

Членъ $b+c$ мы заключаемъ въ скобки, потому что *оба* числа b и c нужно вычесть изъ a.

Подобно этому $a+d-(b+c+e)=a+d-b-c-e$.

Положимъ теперь, что намъ нужно вычесть $b-c$ изъ a. Если мы вычтемъ b изъ a, то получимъ $a-b$; но мы такимъ образомъ вычли изъ a слишкомъ много, потому что намъ нужно было вычесть не b, но b, уменьшенное на c. Поэтому нужно увеличить найденный результатъ на c; итакъ

$$a-(b-c)=a-b+c.$$

Положимъ еще, что намъ нужно вычесть $b-c-d+e$ изъ a. Это значитъ то-же самое, что и вычесть $b+e-c-d$ изъ a. Вычтемъ сперва $b+e$ изъ a; результатъ будетъ $a-b-e$; потомъ *прибавимъ* $c+d$, потому что намъ нужно было вычесть не $b+e$, но $b+e$, уменьшенное на $c+d$; итакъ

$$\begin{aligned} a-(b-c-d+e) &= a-b-e+c+d \\ &= a-b+c+d-e. \end{aligned}$$

34. Изъ разсмотрѣнія этихъ случаевъ мы приходимъ къ слѣдующему правилу для вычитанія: *Нужно измѣнить знакъ каждаго члена въ вычитаемомъ выраженіи и потомъ приложить его къ другому выраженію.* Здѣсь, какъ и раньше, мы предполагаемъ, что если предъ какимъ нибудь членомъ нѣтъ знака, то надо подразумѣвать $+$.

Напримѣръ. Вычесть $a-b$ изъ $3a+b$.

$$3a+b-(a-b)=3a+b-a+b=2a+2b.$$

Еще примѣръ. Вычесть $5a^2+4ab-6xy$ изъ $11a^2+3ab-4xy$.

$$11a^2+3ab-4xy-(5a^2+4ab-6xy)$$
$$=11a^2+3ab-4xy-5a^2-4ab+6xy=6a^2-ab+2xy.$$

Скобки.

35. По причинѣ частаго употребленія скобокъ въ алгебраическихъ изслѣдованіяхъ, полезно будетъ болѣе подробнымъ образомъ обратить вниманіе учащагося на правила ихъ употребленія. Правила эти уже были показаны, и намъ остается только выразить ихъ словами.

Если предъ какимъ нибудь выраженіемъ, заключеннымъ въ скобки, стоитъ знакъ +, то скобки просто могутъ быть отброшены.

Такъ $a-b+(c-d+e)=a-b+c-d+e$ (ст. 31).

И слѣдовательно *любое число членовъ можно заключить въ скобки, поставивъ предъ скобками знакъ +.*

Такъ $a-b+c-d+e$ можно писать слѣдующимъ образомъ:

$a-b+c+(-d+e)$, $a-d+(c+e-b)$, $a+(-d+c+e-b)$,

и такъ далѣе.

Если предъ какимъ нибудь выраженіемъ, заключеннымъ въ скобки, стоитъ знакъ —, то скобки могутъ быть отброшены лишь тогда, когда знакъ всякаго члена внутри скобокъ будетъ измѣненъ, именно плюсъ на минусъ, а минусъ на плюсъ.

Такъ $a-(b-c-d+e)=a-b+c+d-e$ (ст. 34).

А слѣдовательно, любое число членовъ въ какомъ нибудь выраженіи можно заключить въ скобки, поставивъ предъ скобками знакъ —, если только измѣнить знакъ каждаго члена внутри скобокъ.

Такъ $a-b+c+d-e$ можно писать слѣдующимъ образомъ:

$a-b+c-(-d+e)$, $a-(b-c-d+e)$, $a+c-(b-d+e)$,

и такъ далѣе.

36. Могутъ встрѣчаться выраженія, содержащія больше одной пары скобокъ; такія скобки нужно раскрывать въ послѣдовательномъ порядкѣ по предыдущимъ правиламъ, *начиная съ внутреннихъ.* Такъ, напримѣръ.

$$a+\{b+(c-d)\}=a+\{b+c-d\}=a+b+c-d,$$
$$a+\{b-(c-d)\}=a+\{b-c+d\}=a+b-c+d,$$
$$a-\{b+(c-d)\}=a-\{b+c-d\}=a-b-c+d,$$
$$a-\{b-(c-d)\}=a-\{b-c+d\}=a-b+c-d.$$

Подобнымъ же образомъ

$$a-[b-\{c-(d-e)\}]=a-[b-\{c-d+e\}]$$
$$=a-[b-c+d-e]=a-b+c-d+e$$

Изъ этихъ примѣровъ видно, что для избѣжанія смѣшиванія однѣхъ паръ скобокъ съ другими употребляются скобки разнаго образца; при одинаковомъ *образцѣ* можно отличать скобки другъ отъ друга еще и по *величинѣ* или по *размѣрамъ*.

Скобки могутъ быть замѣнены иногда чертою (vinculum), какъ уже было замѣчено въ ст. 11. Такъ напримѣръ:

$$a-[b-\{c-(d-\overline{e-f})\}]=a-[b-\{c-(d-e+f)\}]$$
$$=a-[b-\{c-d+e-f\}]=a-[b-c+d-e+f]$$
$$=a-b+c-d+e-f.$$

Подобнымъ-же образомъ можетъ быть введено и болѣе одной пары скобокъ. Такъ, напримѣръ

$$a-b+c-d+e=a-\{b-c+d-e\}=a-\{b-(c-d+e)\}.$$

37. Начинающему мы совѣтуемъ всегда открывать скобки въ порядкѣ, указанномъ въ предыдущей статьѣ; именно удалять сперва самыя внутреннія, затѣмъ— ближайшія слѣдующія изъ всѣхъ остальныхъ, и такъ далѣе. Впрочемъ можно и измѣнить порядокъ, но если мы открываемъ скобки, заключающія въ себѣ другое, стоящее въ скобкахъ выраженіе, то *не должны измѣнять знаковъ у членовъ внутри послѣднихъ скобокъ*. Каждое изъ такихъ, заключенныхъ въ первыхъ скобкахъ, выраженій должно считать за одинъ членъ. Такъ напримѣръ

$$a+\{b+(c-d)\}=a+b+(c-d)=a+b+c-d,$$
$$a+\{b-(c-d)\}=a+b-(c-d)=a+b-c+d,$$
$$a-\{b+(c-d)\}=a-b-(c-d)=a-b-c+d,$$
$$a-\{b-(c-d)\}=a-b+(c-d)=a-b+c-d.$$

Точно также $a-[b-\{c-(d-e)\}]=a-b+\{c-(d-e)\}$
$$=a-b+c-(d-e)=a-b+c-d+e.$$

И подобнымъ-же образомъ $a-[b-\{c-(d-\overline{e-f})\}]$
$$=a-b+\{c-(d-\overline{e-f})\}=a-b+c-(d-\overline{e-f})$$
$$=a-b+c-d+\overline{e-f}=a-b+c-d+e-f.$$

Примѣры.

1. Сложить выраженія: $4a-5b+3c-2d$, $a+b-4c+5d$, $3a-7b+6c+4d$ и $a+4b-c-7d$.

2. Сложить выраженія: x^3+2x^2-3x+1, $2x^3-3x^2+4x-2$, $3x^3+4x^2+5$ и $4x^3-3x^2-5x+9$.

3. Сложить выраженія:
$x^2-3xy+y^2+x+y-1$, $2x^2+4xy-3y^2-2x-2y+3$,
$3x^2-5xy-4y^2+3x+4y-2$ и $6x^2+10xy+5y^2+x+y$.

4. Сложить выраженія: $x^3-2ax^2+a^2x$, x^3+3ax^2 и $2x^3-ax^2$.

5. Сложить выраженія: $4ab-x^2$, $3x^2-2ab$ и $2ax+2bx$.

6. Изъ $5a-3b+4c-7d$ вычесть $2a-2b+3c-d$.

7. Изъ $x^4+4x^3-2x^2+7x-1$ вычесть $x^4+2x^3-2x^2+6x-1$.

8. Вычесть a^2-ax+x^2 изъ $3a^2-2ax+x^2$.

9. Вычесть $a-b-2(c-d)$ изъ $2(a-b)-c+d$.

10. Вычесть $(a-b)x-(b-c)y$ изъ $(a+b)x+(b+c)y$.

11. Уничтожить скобки въ выраженіи $a-\{b-(c-d)\}$.

12. Освободить отъ скобокъ выраженіе $a-\{(b-c)-d\}$.

13. Освободить отъ скобокъ выраженіе
$$a+2b-6a-\{3b-(6a-6b)\}.$$

14. Освободить отъ скобокъ выраженіе $7a-\{3a-[4a-(5a-2a)]\}$.

15. То-же $3a-[a+b-\{a+b+c-(a+b+c+d)\}]$.

16. То-же $2x-[3y-\{4x-(5y-6x)\}]$.

17. То-же $a-[2b+\{3c-3x-(a+b)\}+2a-(b+3c)]$.

18. То-же $a-[5b-\{a-(3c-3b)+2c-(a-2b-c)\}]$.

19 Найти значеніе выраженія: $a+2x-\{b+y-[a-x-(b-2y)]\}$, если $a=2$, $b=3$, $x=6$ и $y=5$.

20. Упростить выраженіе
$$4x^3-2x^2+x+1-(3x^3-x^2-x-7)-(x^3-4x^2+2x+8).$$

ГЛАВА III.

Умноженіе.

38. Мы уже говорили раньше, что произведеніе чиселъ, обозначенныхъ буквами, можно выразить, написавъ эти буквы послѣдовательно одну за другою, безъ всякаго знака между ними. Такъ $abcd$ означаетъ *произведеніе* чиселъ, означенныхъ буквами a, b, c и d. Мы предполагаемъ, что учащемуся извѣстно изъ Ариѳметики, что произведеніе какого нибудь числа множителей будетъ одно и то-же, каковъ-бы не былъ *порядокъ* этихъ множителей; такъ $abc=acb=bca$, и такъ далѣе.

39. Положимъ, что намъ нужно составить произведеніе изъ $4a$, $5b$ и $3c$; это произведеніе мы можемъ написать такъ: $4\times a\times 5\times b\times 3\times c$ или $4\times 5\times 3\times abc$, то-есть $60abc$. Такимъ образомъ мы можемъ вывести слѣдующее правило умноженія простое: *нужно перемножить численные коэффиціенты и вслѣдъ за этимъ произведеніемъ написать всѣ буквы.*

40. Принятый способъ означать степени числа (ст. 17) позволяетъ намъ доказать слѣдующее правило: *чтобы перемножить степени одного и того-же числа, нужно сложить показателей этихъ степеней*; дѣйствительно, $a^3\times a^2=a\times a\times a\times a\times a=a^5=a^{3+2}$. Подобно этому находится произведеніе и въ другихъ сходственныхъ случаяхъ.

Такимъ образомъ, если m и n нѣкоторыя цѣлыя числа, то $a^m\times a^n=a^{m+n}$.

41. Мы можемъ, если угодно, означать произведеніе одинаковыхъ степеней различныхъ буквъ, написавъ буквы внутри скобокъ и поставивъ показатель надъ скобками; такъ $a^2\times b^2=(ab)^2$. Это очевидно, потому что $(ab)^2=ab\times ab=a\times a\times b\times b$. Подобно этому.

$$a^3\times b^3\times c^3=(abc)^3.$$

Такимъ образомъ $a^n\times b^n=(ab)^n$; $a^n\times b^n\times c^n=(abc)^n$; и такъ далѣе для сколькихъ угодно множителей.

42. Положимъ, что требуется умножить $a+b$ на c. Произведеніе a на c надо означать чрезъ ac, а произведеніе b на c—чрезъ bc; слѣдовательно произведеніе $a+b$ и c нужно означить $ac+bc$. Дѣйствительно, это слѣдуетъ, какъ въ Ариѳметикѣ, изъ нашего понятія объ умноженіи, такъ какъ, чтобы умножить какое нибудь количество на данное число, мы должны перемножить всѣ части этого количества на данное число и сложить результаты Такимъ образомъ

$$(a+b)c=ac+bc.$$

43. Положимъ, что требуется умножить $a-b$ на c. Здѣсь произве-

деніе a на c должно быть *уменьшено* произведеніемъ b на c. Такимъ образомъ

$$(a-b)c=ac-bc.$$

44. Положимъ, что требуется помножить $a+b$ на $c+d$. Изъ нашихъ понятій объ умноженіи, какъ и въ Ариѳметикѣ, слѣдуетъ, что если какое нибудь количество нужно помножить на какое нибудь число-то мы можемъ разложить множитель на части, сумма которыхъ равно, лась-бы этому множителю, и взять произведеніе даннаго количества на каждую изъ частей, а потомъ сложить эти частныя произведенія и составить такимъ образомъ полное. Итакъ

$$(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d;$$

но $(a+b)c=ac+bc$ и $(a+b)d=ad+bd$; слѣдовательно

$$(a+b)\ (c+d)=ac+bc+ad+bd.$$

45. Положимъ, что требуется умножить $a-b$ на $c+d$. Въ этомъ случаѣ произведеніе a на $c+d$ должно быть уменьшено произведеніемъ b на $c+d$. Такимъ образомъ

$$(a-b)(c+d)=a(c+d)-b(c+d)$$
$$=ac+ad-(bc+bd)=ac+ad-bc-bd.$$

46. Положимъ, что требуется умножить $a+b$ на $c-d$. Здѣсь произведеніе $a+b$ на c должно быть *уменьшено* произведеніемъ $a+b$ на d. Такимъ образомъ

$$(a+b)\ (c-d)=(a+b)c-(a+b)d$$
$$=ac+bc-(ad+bd)=ac+bc-ad-bd.$$

47. Положимъ, что требуется умножить $a-b$ на $c-d$. Здѣсь произведеніе $a-b$ на c должно быть *уменьшено* произведеніемъ $a-b$ на d

Такимъ образомъ

$$(a-b)\ (c-d)=(a-b)c-(a-b)d$$
$$=ac-bc-(ad-bd)=ac-bc-ad+bd.$$

48. Разсмотрѣвъ предыдущіе случаи, мы приходимъ къ слѣдующему правилу умноженія двухъ двучленныхъ выраженій: *Нужно умножить каждый членъ множимаго на каждый членъ множителя; если члены имѣютъ одинаковые знаки, то предъ произведеніемъ ихъ надо ставить знакъ +, если-же они имѣютъ разные знаки, то предъ произведеніемъ надо ставить знакъ —; затѣмъ собрать всѣ эти частныя произведенія вмѣстѣ и составить полное произведеніе.*

Правило относительно знаковъ частныхъ произведеній выражается часто для краткости такъ: *одинаковые знаки даютъ +, разные даютъ —.*

49. Изъ предыдущихъ статей слѣдуетъ, что членъ $-bc$, встрѣчающійся въ произведеніи двухъ двучленныхъ множителей соотвѣтствуетъ произведенію ихъ членовъ $-b$ и c.

Поэтому часто утверждаютъ, какъ независимую истину, что $-b\times c=-bc$.

Подобнымъ образомъ мы замѣчаемъ, что соотвѣтственно членамъ $-b$ и $-c$, находящимся въ обоихъ двучленныхъ множителяхъ, является въ произведеніи этихъ множителей членъ bc; поэтому часто прямо утверждаютъ, какъ самостоятельную истину, что $-b\times-c=bc$. Эти положенія будутъ разобраны и объяснены въ главѣ V.

50. Правило, данное въ статьѣ 48, остается справедливымъ для умноженія всякихъ многочленовъ. Это уяснится изъ разбора нѣсколькихъ примѣровъ. Положимъ напримѣръ, что намъ нужно умножить $4a^2-5ab+6b^2$ на $2a^2-3ab+4b^2$. Искомое произведеніе здѣсь будетъ
$2a^2(4a^2-5ab+6b^2)-3ab(4a^2-5ab+6b^2)+4b^2(4a^2-5ab+6b^2)$;
такимъ образомъ мы получаемъ
$$(8a^4-10a^3b+12a^2b^2)-(12a^3b-15a^2b^2+18ab^3)$$
$$+(16a^2b^2-20ab^3+24b^4),$$
то-есть
$$8a^4-10a^3b+12a^2b^2-12a^3b+15a^2b^2-18ab^3+16a^2b^2-20ab^3+24b^4.$$

Этотъ результатъ согласенъ съ правиломъ. Если мы его упростимъ, собравъ подобные члены, то получимъ
$$8a^4-22a^3b+43a^2b^2-38ab^3+24b^4.$$

Все дѣйствіе удобно можетъ быть расположено слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r} 4a^2- 5ab+6b^2 \\ 2a^2- 3ab+4b^2 \\ \hline 8a^4-10a^3b+12a^2b^2 \\ -12a^3b+15a^2b^2-18ab^3 \\ +16a^2b^2-20ab^3+24b^4 \\ \hline 8a^4-22a^3b+43a^2b^2-38ab^3+24b^4. \end{array}$$

51. Учащійся долженъ внимательно замѣтить порядокъ предыдущаго дѣйствія. Выраженія, которыя мы желаемъ умножить, здѣсь, какъ говорятъ, *расположены по нисходящимъ степенямъ* a; дѣйствительно, въ выраженіи $4a^2-5ab+6b^2$ членъ, содержащій высшую степень a, есть $4a^2$, и онъ помѣщенъ первымъ; за нимъ стоитъ $-5ab$, содержащій a; послѣднее-же мѣсто занимаетъ членъ $+6b^2$, вовсе не содержащій a. Подобно этому расположенъ и другой множитель $2a^2-3ab+4b^4$. Частныя произведенія размѣщены такъ, что подобные члены приходятся въ одномъ столбцѣ и такимъ образомъ удобно могутъ быть собраны.

Множители могли-бы быть размѣщены еще такъ: $6b^2-5ab+4a^2$ и $4b^2-3ab+2a^2$; въ такомъ случаѣ они были-бы расположены *по восходящимъ* степенямъ буквы a. Можно располагать безразлично въ

томъ или другомъ порядкѣ, но нужно держаться одного и того-же порядка въ расположеніи множимаго и множителя.

52. Еще примѣръ. Умножить $2x^2+3x+4$ на $2x^2-3x+4$.

Дѣйствіе это можно произвести въ такомъ порядкѣ:

$$\begin{array}{r} 2x^2+3x+4 \\ 2x^2-3x+4 \\ \hline 4x^4+6x^3+8x^2 \\ -6x^3-9x^2-12x \\ +8x^2+12x+16 \\ \hline 4x^4+7x^2+16 \end{array}$$

Такимъ образомъ произведеніе будетъ $4x^4+7x^2+16$.

53. Слѣдующіе три примѣра заслуживаютъ особаго вниманія:

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2 \quad -b^2 \end{array}$$

Первый примѣръ даетъ значеніе $(a+b)(a+b)$, то-есть $(a+b)^2$; мы нашли такимъ образомъ, что

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Итакъ, *квадратъ суммы двухъ чиселъ равенъ суммѣ квадратовъ обоихъ этихъ чиселъ, увеличенной ихъ удвоеннымъ произведеніемъ.*

Затѣмъ мы имѣемъ

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Такимъ образомъ *квадратъ разности двухъ чиселъ равенъ суммѣ квадратовъ этихъ чиселъ безъ удвоеннаго ихъ произведенія.*

Наконецъ

$$(a+b)\,(a-b)=a^2-b^2.$$

Такимъ образомъ *произведеніе суммы и разности двухъ чиселъ равно разности квадратовъ этихъ чиселъ.*

54. Не лишне будетъ указать здѣсь на значеніе знака $\pm$, который иногда употребляется и носитъ названіе *двойного* знака.

Такъ какъ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

и $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$,

то можно писать $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

Такимъ образомъ знакъ $\pm$ показываетъ, что мы можемъ брать то знакъ $+$, то знакъ $-$; $a\pm b$ читается «*a плюсъ или минусъ b*».

55. Выводы, данные въ ст. 53, доставляютъ простой случай приложенія алгебры; мы можемъ сказать, что *Алгебра даетъ намъ возможность доказывать общія теоремы относительно чиселъ*, а также *и выражать эти теоремы кратко*. Напримѣръ, выводъ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ доказываетъ справедливость извѣстнаго положенія и выражаетъ эту истину при помощи символовъ гораздо короче, чѣмъ то можно сдѣлать словами.

Существуютъ другіе выводы, не столь важные, какъ тѣ три формулы, которыя даны въ ст. 53, но также заслуживающіе вниманія. Мы помѣщаемъ ихъ здѣсь, чтобы учащійся могъ справляться съ ними, когда въ этомъ представится надобность. Ихъ легко провѣрить перемноженіемъ на самомъ дѣлѣ.

$$(a+b)\ (a^2-ab+b^2)=a^3+b^3,$$

$$(a-b)\ (a^2+ab+b^2)=a^3-b^3,$$

$$(a+b)^3=(a+b)\ (a^2+2ab+b^2)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

$$(a-b)^3=(a-b)\ (a^2-2ab+b^2)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$$

$$(b+c)\ (c+a)\ (a+b)=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc,$$

$$(b-c)\ (c-a)\ (a-b)=a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a),$$

$$(a+b+c)\ (bc+ca+ab)=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc,$$

$$(a+b+c)\ (a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=a^3+b^3+c^3-3abc,$$

$$(b+c-a)\ (c+a-b)\ (a+b-c)=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)-a^3-b^2-c^3-2abc,$$

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3&=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3\\&=a^3+3a^2(b+c)+3a(b^2+2bc+c^2)+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3\\&=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(a+c)+3c^2(a+b)+6abc.\end{aligned}$$

56. Пользуясь *формулами*, данными въ ст. 53, можно во многихъ случаяхъ значительно упростить дѣйствіе умноженія. Такъ напр. положимъ, что намъ нужно умножить $a+b+c+d$ на $a+b-c-d$. Это будетъ то-же, что умножить $(a+b)+(c+d)$ на $(a+b)-(c+d)$. По третьей формулѣ мы будемъ имѣть

$$\{(a+b)+(c+d)\}\{(a+b)-(c+d)\}=(a+b)^2-(c+d)^2.$$

Теперь остается выразить $(a+b)^2$ и $(c+d)^2$ по первой формулѣ; такимъ образомъ окончательно будемъ имѣть:

$$(a+b+c+d)(a+b-c-d)=a^2+b^2+2ab-c^2-d^2-2cd.$$

57. Изслѣдуя данные здѣсь примѣры, а также и всѣ тѣ, которые придется рѣшать потомъ, учащійся убѣдится въ справедливости слѣдующихъ правилъ, касающихся результата умноженія алгебраическихъ выраженій.

Число членовъ въ произведеніи двухъ алгебраическихъ выраженій никогда не можетъ быть *больше* произведенія числа членовъ въ обоихъ выраженіяхъ, но можетъ быть *меньше* его, вслѣдствіе упрощенія отъ соединенія подобныхъ членовъ.

Когда множимое и множитель оба расположены въ одинаковомъ порядкѣ по степенямъ одной и той-же буквы, то первый и послѣдній члены произведенія не будутъ подобны другимъ членамъ. Напримѣръ въ ст. 50 множимое и множитель расположены по степенямъ буквы a; *первый* членъ произведенія есть $8a^4$, а *послѣдній* $24b^4$, и нѣтъ ни одного члена, который былъ-бы *подобенъ* этимъ. Дѣйствительно, другіе члены содержатъ a въ степеняхъ ниже четвертой и такимъ образомъ они отличны отъ $8a^4$, при этомъ всѣ они содержатъ a въ какой-нибудь степени, а потому отличны и отъ $24b^4$.

Когда множимое и множитель оба *однородны*, то и произведеніе ихъ также *однородно*, и измѣреніе произведенія равняется суммѣ чиселъ, выражающихъ измѣреніе множимаго и множителя. Такъ въ примѣрѣ ст. 50 множимое однородно и второго измѣренія; множитель также однороденъ и второго измѣренія, поэтому произведеніе также однородно и четвертаго измѣренія. Въ примѣрѣ ст. 56 множимое и множитель оба однородны и перваго измѣренія; произведеніе также однородно и второго измѣренія. Высказанное здѣсь и поясненное примѣрами правило имѣетъ большую важность и служитъ признакомъ вѣрности алгебраическаго счета, поэтому мы совѣтуемъ учащемуся обращать большое вниманіе на измѣреніе членовъ въ получаемомъ имъ результатѣ.

Существуетъ еще другое правило, которое часто оказывается полезнымъ, какъ признакъ вѣрности алгебраическаго счета, и которое мы можемъ назвать правиломъ *симметріи*. Положимъ, что нужно найти произведеніе.

$$(x+a+b)(x+b+c)(x+c+a).$$

Здѣсь a, b и c встрѣчаются *симметрично*. Если мы поставимъ a вмѣсто c и c вмѣсто a, то измѣнимъ только порядокъ множителей, но это не произведетъ никакого измѣненія въ результатѣ. Подобно этому могутъ быть взаимно замѣнены a и b или b и c, и это не произведетъ измѣненія въ результатѣ. Поэтому мы можемъ ожидать, что и результатъ будетъ *симметричнымъ* относительно a, b, c, и мы найдемъ, что это дѣйствительно такъ. Результатъ этотъ будетъ

$$x^3+2x^2(a+b+c)+x\{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)\}$$
$$+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc.$$

Легко видѣть, что это выраженіе симметрично въ отношеніи a, b и c. Возьмемъ, напримѣръ, коэффиціентъ при x^2; онъ $2(a+b+c)$, то-есть $2a+2b+2c$; поэтому, еслибы учащійся получилъ результатъ *несимметрическій*, напримѣръ такой: $2a+2b+c$, то для всякаго зна-

комаго съ дѣломъ было-бы очевидно, что въ вычисленіи должна быть ошибка.

Законъ симметріи—одинъ изъ такихъ, съ которыми учащійся будетъ знакомиться постепенно, потому что чѣмъ дальше онъ будетъ подвигаться въ изученіи Алгебры, тѣмъ чаще придется ему пользоваться этимъ закономъ.

Примѣры умноженія.

1. Умножить $2p-q$ на $2q+p$.
2. Умножить $a^2+3ab+2b^2$ на $7a-5b$.
3. Умножить a^2-ab+b^2 на a^2+ab-b^2.
4. Умножить $a^2-ab+2b^2$ на $a^2+ab-2b^2$.
5. Умножить $a^2+2ax+x^2$ на $a^2+2ax-x^2$.
6. Умножить $a^2+4ax+4x^2$ на $a^2-4ax+4x^2$.
7. Умножить $a^2-2ax+bx-x^2$ на $b+x$.
8. Умножить $15x^2+18ax-14a^2$ на $4x^2-2ax-a^2$.
9. Умножить $2x^3+4x^2+8x+16$ на $3x-6$.
10. Умножить $2x^2-8xy+9y^2$ на $2x-3y$.
11. Умножить $4x^2-3xy-y^2$ на $3x-2y$.
12. Умножить $x^5-x^4y+xy^4-y^5$ на $x+y$.
13. Умножить $x+2y-3z$ на $x-2y+3z$.
14. Умножить $2x^2+3xy+4y^2$ на $3x^2-4xy+y^2$.
15. Умножить x^2+xy+y^2 на x^2+xz+z^2.
16. Умножить $a^2+b^2+c^2+bc+ca-ab$ на $a+b-c$.
17. Умножить $x^2-xy+y^2+x+y+1$ на $x+y-1$.
18. Умножить $x^3+4x^2+5x-24$ на $x^2-4x+11$.
19. Умножить $x^3-4x^2+11x-24$ на x^2+4x+5.
20. Умножить x^3-2x^2+3x-4 на $4x^3+3x^2+2x+1$.
21. Умножить $x^4+2x^3+x^2-4x-11$ на x^2-2x+3.
22. Умножить $x^5-5x^4+13x^3-x^2-x+2$ на x^2-2x-2.
23. Умножить $a^4-2a^3+3a^2-2a+1$ на $a^4+2a^3+3a^2+2a+1$.
24. Перемножить $a-x$, $a+x$, и a^2+x^2.
25. Перемножить между собою $x-3$, $x-1$, $x+1$ и $x+3$.
26. Перемножить x^2-x+1, x^2+x+1 и x^4-x^2+1.
27. Перемножить $x^4-ax^3+bx^2-cx+d$ на $x^4+ax^3-bx^2+cx-d$.
28. Показать, что $(x+a)^4=x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+a^4$.
29. Показать, что $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2$.

30. Перемножить $a+x$, $b+x$ и $c+x$.

31. Перемножить $x-a$, $x-b$, $x-c$ и $x-d$.

32. Перемножить взаимно $a+b-c$, $a+c-b$, $b+c-a$ и $a+b+c$.

33. Упростить $(a+b)(b+c)-(c+d)(d+a)-(a+c)(b-d)$.

34. Упростить $(a+b+c+d)^2+(a-b-c+d)^2+(a-b+c-d)^2$
$+(a+b-c-d)^2$.

35. Доказать, что $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(y+z)(z+x)$
$(x+y)$.

36. Упростить $(a+b+c)^2-a(b+c-a)-b(a+c-b)-c(a+b-c)$.

37. Упростить $(x-y)^3+(x+y)^3+3(x-y)^2(x+y)+3(x+y)^2$
$(x-y)$.

38. Упростить $(a^2+b^2+c^2)^2-(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)$
$(b+c-a)$.

39. Упростить $(a^2+b^2+c^2)^2+(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)$
$(b+c-a)$.

40. Доказать, что $x^8+y^8+(x+y)^8=2(x^2+xy+y^2)^4$
$+8x^2y^2(x+y)^2(x^2+xy+y^2)$.

41. Доказать, что $4xy(x^2+y^2)=(x^2+xy+y^2)^2-(x^2-xy+y^2)^2$.

42. Доказать, что $4xy(x^2-y^2)=(x^2+xy-y^2)^2-(x^2-xy-y^2)^2$.

43. Перемножить $(x^2-3x+2)^2$ и x^2+6x+1.

44. Умножить $x^5+a^5-ax(x^3+a^3)$ на $x^3+a^3-ax(x+a)$.

45. Умножить $(a+b)^2$ на $(a-b)^3$.

46. Если $s=a+b+c$, то доказать, что

$s(s-2b)(s-2c)+s(s-2c)(s-2a)+s(s-2a)(s-2b$
$=(s-2a)(s-2b)(s-2c)+8abc$.

ГЛАВА IV.

Дѣленіе.

58. Дѣленіе, какъ и въ Ариѳметикѣ, есть обратное съ умноженіемъ дѣйствіе. Въ умноженіи мы находимъ произведеніе по двумъ даннымъ множителямъ; въ дѣленіи-же намъ дается произведеніе и одинъ изъ множителей, и нужно бываетъ опредѣлить другой множитель. Этотъ опредѣляемый множитель называется *частнымъ* числомъ.

59. Такъ какъ произведеніе чиселъ, обозначенныхъ буквами a и b представляется чрезъ ab, то частное отъ дѣленія ab на a есть b; такимъ образомъ $ab:a=b$, а также $ab:b=a$. Подобно этому мы будемъ имѣть $abc:a=bc$, $abc:b=ac$, $abc:c=ab$; а также $abc:bc=a$, $abc:ac=b$, $abc:ab=c$. Эти выраженія можно писать еще такъ:

$$\frac{abc}{a}=bc, \qquad \frac{abc}{b}=ac, \qquad \frac{abc}{c}=ab;$$

$$\frac{abc}{bc}=a, \qquad \frac{abc}{ac}=b, \qquad \frac{abc}{ab}=c.$$

60. Положимъ, что требуется найти частное отъ дѣленія $60abc$ на $3c$. Такъ какъ $60abc=20ab\times 3c$, то мы будемъ имѣть $60abc:3c=20ab$. Подобно этому $60abc:4a=15bc$; $60abc:5ab=12c$; и такъ далѣе. Такимъ образомъ мы можемъ вывести слѣдующее правило для дѣленія одного одночлена на другой: *Если численный коэффиціентъ и буквенное произведеніе дѣлителя заключаются въ дѣлимомъ, то остальная часть дѣлимаго и будетъ частное.*

61. Если численный коэффиціентъ и буквенное произведеніе, изъ которыхъ состоитъ дѣлитель, *не заключаются* въ дѣлимомъ, то мы можемъ только указать дѣленіе при помощи соотвѣтственнаго этому дѣйствію обозначенія. Такъ, если $5a$ нужно раздѣлить на $2c$, то частное въ этомъ случаѣ можно только обозначить чрезъ $5a:2c$ или $\frac{5a}{2c}$. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ мы можемъ впрочемъ упростить выраженіе частнаго, пользуясь способомъ, употребляющимся въ Ариѳметикѣ. Такъ, если нужно раздѣлить $15a^2b$ на $6bc$, то частное будетъ $\frac{15a^2b}{6bc}$. Здѣсь дѣлимое равно $3b\times 5a^2$, и дѣлитель $=3b\times 2c$; поэтому, какъ въ Ариѳметикѣ, мы можемъ сократить множитель $3b$, встрѣчающійся въ дѣлимомъ и въ дѣлителѣ, и означить частное чрезъ $\frac{5a^2}{2c}$.

62. Чтобы раздѣлить степень какого-нибудь числа на другую степень того-же числа, нужно показателя послѣдней степени вычесть изъ показателя первой.

Такъ $a^5 : a^2 = a \times a \times a \times a \times a : a \times a = a \times a \times a = a^3 = a^{5-2}$.

Слѣдовательно, если m и n будутъ какія-нибудь цѣлыя числа, и m больше n, то мы будемъ имѣть $a^m : a^n$ или $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

63. Положимъ еще, что мы имѣемъ такое выраженіе $\frac{a^2}{a^5}$. Мы можемъ написать его такъ $\frac{a^2 \times 1}{a^2 \times a^3}$; тогда, какъ въ ст. 61, мы можемъ сократить общаго множителя a^2. Такимъ образомъ получимъ $\frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^3}$. Точно также надо поступать и въ другихъ подобныхъ случаяхъ.

Слѣдовательно, если m и n какія-нибудь цѣлыя числа и m меньше n, то мы будемъ имѣть $a^m : a^n$ или $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$.

64. Положимъ, что намъ представляется такое выраженіе, какъ $\frac{a^2}{b^2}$; его можно писать такъ $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. Дѣйствительно $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ значитъ $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$, но $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$, какъ мы знаемъ изъ Ариѳметики и какъ будетъ показано въ главѣ VIII. Подобнымъ-же образомъ можно объяснить и всякій другой такого рода случай.

Слѣдовательно, если n какое-нибудь цѣлое число, то

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

65. *Когда дѣлимое содержитъ болѣе одного члена, а дѣлитель состоитъ изъ одного только члена, то должно дѣлить каждый членъ дѣлимаго на этотъ дѣлитель, и такія отдѣльныя частныя, собранныя вмѣстѣ, дадутъ полное частное.*

Такъ $\frac{ab - cb}{b} = a - c$, потому что $(a - c)b = ab - cb$.

$\frac{ab^2 - abc + abd}{ab} = b - c + d$, потому что $(b - c + d)ab = ab^2 - abc + abd$.

Въ первомъ примѣрѣ мы видимъ, что соотвѣтственно члену ab въ дѣлимомъ и дѣлителю b получается въ частномъ членъ a, и соотвѣтственно члену $-cb$ въ дѣлимомъ и дѣлителю b въ частномъ получается членъ $-c$.

Въ ст. 49 мы уже сказали, что допускаемъ пока слѣдующія положенія, которыя будутъ объяснены впослѣдствіи.

$$b\times -c=-bc,\quad -b\times -c=bc.$$

Подобнымъ-же образомъ можно допустить и слѣдующія положенія:

$$\frac{-bc}{-c}=b,\qquad \frac{bc}{-c}=-b.$$

Такимъ образомъ, въ дѣленіи какъ и въ умноженіи, знакъ частнаго выводится изъ знаковъ дѣлимаго и дѣлителя по тому-же правилу: *одинаковые знаки даютъ* +, *разные знаки даютъ* —.

66. Когда дѣлитель, равно какъ и дѣлимое, содержитъ болѣе одного члена, то дѣйствіе алгебраическаго дѣленія должно производить подобно тому, какъ въ ариѳметикѣ производится дѣленіе многозначныхъ чиселъ. Въ этомъ случаѣ должно поступать по слѣдующему правилу.

Расположить дѣлимое и дѣлитель по степенямъ одной и той-же буквы, оба по восходящимъ или оба по нисходящимъ.

Найти, сколько разъ первый членъ дѣлителя заключается въ первомъ членѣ дѣлимаго, и принять этотъ результатъ за первый членъ частнаго.

Умножить весь дѣлитель на этотъ членъ, и произведеніе вычесть изъ дѣлимаго.

Снести столько членовъ дѣлимаго, сколько требуется въ данномъ случаѣ, и повторять указанное дѣйствіе, пока не будутъ снесены всѣ члены.

Примѣръ. Раздѣлить $a^2-2ab+b^2$ на $a-b$.

Дѣйствіе можно расположить въ такомъ порядкѣ:

$$\begin{array}{l|l} a^2-2ab+b^2 & a-b \\ \underline{a^2-ab} & \overline{a-b} \\ \quad -ab+b^2 & \\ \quad \underline{-ab+b^2} & \\ & \end{array}$$

Основаніемъ такому правилу служитъ то, что все дѣлимое можно разложить на столько частей, сколько понадобится, и найти полное частное, взявъ сумму всѣхъ отдѣльныхъ частныхъ. Такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ $a^2-2ab+b^2$ дѣйствительно разлагается при помощи дѣйствія дѣленія на двѣ части, именно на часть a^2-ab и на часть $-ab+b^2$; каждая изъ этихъ частей дѣлится на $a-b$; такимъ образомъ мы и получаемъ полное частное $a-b$.

67. Можетъ случиться, какъ и въ Ариѳметикѣ, что дѣленіе *нельзя въ точности выполнить*. Такъ напримѣръ, если мы будемъ дѣлить $a^2-2ab+2b^2$ на $a-b$, то получимъ, какъ раньше, въ частномъ $a-b$, но затѣмъ здѣсь *будетъ остатокъ* b^2. Результатъ выражается въ этомъ

случаѣ подобно тому, какъ это принято въ Ариѳметикѣ; мы пишемъ $\frac{a^2-2ab+2b^2}{a-b}=a-b+\frac{b^2}{a-b}$, то-есть, что здѣсь есть въ частномъ цѣлая часть $a-b$ и дробная часть $\frac{b^2}{a-b}$. Къ разсмотрѣнію алгебраическихъ дробей мы возвратимся въ главѣ VIII.

68. Важно замѣтить слѣдующіе примѣры:

$$\begin{array}{r|l} x^3-a^3 & x-a \\ \hline x^3-x^2a & x^2+xa+a^2 \\ \hline x^2a-a^3 & \\ x^2a-xa^2 & \\ \hline xa^2-a^3 & \\ xa^2-a^3 & \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^4-a^4 & x-a \\ \hline x^4-x^3a & x^3+x^2a+xa^2+a^3 \\ \hline x^3a-a^4 & \\ x^3a-x^2a^2 & \\ \hline x^2a^2-a^4 & \\ x^2a^2-xa^3 & \\ \hline xa^3-a^4 & \\ xa^3-a^4 & \\ \hline \end{array}$$

Учащійся легко можетъ провѣрить также слѣдующіе случаи дѣленія:

$$\frac{x^2-a^2}{x+a}=x-a; \qquad \frac{x^4-a^4}{x+a}=x^3-x^2a+xa^2-a^3;$$

$$\frac{x^3+a^3}{x+a}=x^2-xa+a^2; \qquad \frac{x^5+a^5}{x+a}=x^4-x^3a+x^2a^2-xa^3+a^4.$$

Каждый изъ этихъ примѣровъ дѣленія доставляетъ и примѣръ умноженія, такъ какъ произведеніе дѣлителя на частное должно равняться дѣлимому. Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующіе, заслуживающіе вниманія, выводы:

$$x^2-a^2=(x+a)(x-a),$$
$$x^3-a^3=(x-a)(x^2+xa+a^2),$$
$$x^3+a^3=(x+a)(x^2-xa+a^2),$$
$$x^4-a^4=(x-a)(x^3+x^2a+xa^2+a^3),$$
$$x^4-a^4=(x+a)(x^3-x^2a+xa^2-a^3),$$
$$x^5+a^5=(x+a)(x^4-x^3a+x^2a^2-xa^3+a^4).$$

69. Учащемуся полезно будетъ обратить вниманіе на слѣдующее:

x^n-a^n всегда дѣлится на $x-a$, будетъ-ли показатель n *четное* или *нечетное* цѣлое число.

x^n-a^n дѣлится на $x+a$, если показатель n будетъ *четное* цѣлое число.

x^n+a^n дѣлится на $x+a$, если показатель n будетъ *нечетное* цѣлое число.

Учащійся легко можетъ убѣдиться въ справедливости этого на всякомъ частномъ примѣрѣ; впослѣдствіи-же мы дадимъ общее доказательство этого въ главѣ XXXIII.

70. Съ помощью выводовъ, полученныхъ въ предыдущихъ статьяхъ, мы часто можемъ разлагать алгебраическія выраженія на множители. Такъ, что бы не означали A и B, мы имѣемъ

$$A^2-B^2=(A+B)(A-B),$$

и учащійся часто будетъ имѣть случай пользоваться этимъ общимъ выводомъ для различныхъ видовъ выраженій A и B. Напримѣръ, положимъ, что $A=a^2$ и $B=b^2$, такъ что $A^2=a^4$ и $B^2=a^4$; тогда мы будемъ имѣть

$$a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2),$$

а такъ какъ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$,

то $a^4-b^4=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$.

Положимъ еще $A=a^3$ и $B=b^3$, такъ что $A^2=a^6$ и $B^2=b^6$; тогда будемъ имѣть

$$a^6-b^6=(a^3+b^3)(a^3-b^3),$$

а такъ какъ по ст. 68

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$$

то

$$a^6-b^6=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2).$$

Положимъ еще $A=a^4$ и $B=b^4$, такъ что $A^2=a^8$ и $B^2=b^8$; тогда мы будемъ имѣть:

$$a^8-b^8=(a^4+b^4)(a^4-b^4)$$
$$=(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b).$$

Возьмемъ еще формулу

$$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2),$$

и положимъ, что $A=a^2$ и $B=b^2$; тогда получимъ

$$a^6-b^6=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4);$$

сравнивая это съ только что доказаннымъ выводомъ

$$a^6-b^6=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2),$$

мы заключаемъ, что

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4.$$

Это легко можетъ быть повѣрено по способу ст. 56. Дѣйствительно

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$$
$$=(a^2+b^2)^2-a^2b^2$$
$$=(a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$$
$$=a^4+a^2b^2+b^4.$$

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ мы можемъ также сдѣлать полезныя приложенія этихъ формулъ къ ариѳметическимъ вопросамъ. Напримѣръ

$$(127)^2-(123)^2=(127+123)\,(127-123)$$
$$=250\times 4=1000;$$

такимъ образомъ значеніе $(127)^2-(123)^2$ получается гораздо легче, чѣмъ путемъ возведенія въ квадратъ 127 и 123 и вычитанія второго результата изъ перваго.

Слѣдующіе добавочные примѣры также заслуживаютъ вниманія:

$$(a^2+ab\sqrt{2}+b^2)(a^2-ab\sqrt{2}+b^2)=(a^2+b^2)^2-(ab\sqrt{2})^2$$
$$=a^4+2a^2b^2+b^4-2a^2b^2$$
$$=a^4+b^4.$$

$$(a^2+ab\sqrt{3}+b^2)(a^2-ab\sqrt{3}+b^2)=(a^2+b^2)^2-ab\sqrt{3})^2$$
$$=a^4+2a^2b^2+b^4-3a^2b^2$$
$$=a^4-a^2b^2+b^4.$$

$$a^6+b^6=(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$$
$$=(a^2+b^2)(a^2+ab\sqrt{3}+b^2)(a^2-ab\sqrt{3}+b^2).$$

71. Дополнимъ эту главу еще слѣдующими примѣрами дѣленія.

Раздѣлить $8a^4-22a^3b+43a^2b^2-38ab^3+24b^4$ на $2a^2-3ab+4b^2$.

$$\begin{array}{l|l}
8a^4-22a^3b+43a^2b^2-38ab^3+24b^4 & 2a^2-3ab+4b^2 \\
\cline{2-2}
8a^4-12a^3b+16a^2b^2 & 4a^2-5ab+6b^2 \\
\hline
-10a^3b+27a^2b^2-38ab^3 & \\
-10a^3b+15a^2b^2-20ab^3 & \\
\hline
12a^2b^2-18ab^3+24b^4 & \\
12a^2b^2-18ab^3+24b^4 & \\
\hline
\end{array}$$

Частное будетъ $4a^2-5ab+6b^2$.

Раздѣлить $x^3-(a+b+c)x^2+ab+bc+ac)x-abc$ на $x-a$.

$$\begin{array}{l|l}
x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x-abc & x-a \\
\cline{2-2}
x^3-ax^2 & x^2-(b+c)x+bc. \\
\hline
-(b+c)x^2+(ab+bc+ac)x & \\
-(b+c)x^2+(ab\quad\ +ac)x & \\
\hline
bcx\quad -abc & \\
bcx\quad -abc & \\
\hline
\end{array}$$

Частное будетъ $x^2-(b+c)x+bc$.

Эти два примѣра приводятъ насъ къ слѣдующему заключенію: Когда дѣлимое и дѣлитель однородны, то однородно также и частное;

причемъ измѣреніе частнаго равно разности или избытку числа, выражающаго измѣреніе дѣлимаго надъ числомъ, выражающимъ измѣреніе дѣлителя. См. ст. 57.

Примѣры дѣленія.

1. Раздѣлить x^3+1 на $x+1$.
2. Раздѣлить $27x^3+8y^3$ на $3x+2y$.
3. Раздѣлить $a^3-2ab^2+b^3$ на $a-b$.
4. Раздѣлить $a^3-2a^2b-3ab^2$ на $a+b$.
5. Раздѣлить $64x^6-y^6$ на $2x-y$.
6. Раздѣлить a^5+b^5 на $a+b$.
7. Раздѣлить $x^3-x^2y+xy^2-y^3$ на $x-y$.
8. Раздѣлить x^3-7x-6 на $x-3$.
9. Раздѣлить $32x^5+y^5$ на $2x+y$.
10. Раздѣлить $x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5$ на x^3-y^3.
11. Раздѣлить $x^4+x^3-4x^2+5x-3$ на x^2+2x-3.
12. Раздѣлить $a^4+2a^2b^2+9b^4$ на $a^2+2ab+3b^2$.
13. Раздѣлить a^6-b^6 на $a^3+2a^2b+2ab^2+b^3$.
14. Раздѣлить $32a^4+54ab^3-81b^4$ на $2a+3b$.
15. Раздѣлить x^6-2x^3+1 на x^2-2x+1.
16. Раздѣлить $x^6-6x^4+9x^2-4$ на x^2-1.
17. Раздѣлить $a^4+a^3b-8a^2b^2+19ab^3-15b^4$ на $a^2+3ab-5b^2$.
18. Раздѣлить произведеніе $x^3-12x+16$ и $x^3-12x-16$ на x^2-16.
19. Раздѣлить произведеніе x^3-2x+1 и x^3-3x+2 на x^3-3x^2+3x-1.
20. Раздѣлить произведеніе x^2-x-1, $2x^2+3$, x^2+x-1 и $x-4$ на x^4-3x^2+1.
21. Раздѣлить произведеніе a^2+ax+x^2 и a^3+x^3 на $a^4+a^2x^2+x^4$.
22. Раздѣлить произведеніе $x^4-4x^3a+6x^2a^2-4xa^3+a^4$ и $x^2+2xa+a^2$ на $x^4-2x^3a+2xa^3-a^4$.
23. Раздѣлить $a^3+a^2b+a^2c-abc-b^2c-bc^2$ на a^2-bc.
24. Раздѣлить $3x^3+4abx^2-6a^2b^2x-4a^3b^3$ на $x+2ab$.
25. Раздѣлить произведеніе x^3-3x^2+3x-1, x^2-2x+1 и $x-1$ на $x^4-4x^3+6x^2-4x+1$.
26. Раздѣлить $6a^4-a^3b+2a^2b^2+13ab^3+4b^4$ на $2a^2-3ab+4b^2$.
27. Раздѣлить $x^3+y^3+3xy-1$ на $x+y-1$.

28. Раздѣлить $a^3+b^3-c^3+3abc$ на $a+b-c$.

29. Раздѣлить $2a^7b-5a^6b^2-11a^5b^3+5a^4b^4-26a^3b^5+7a^2b^6-12ab^7$ на $a^4-4a^3b+a^2b^2+3ab^3$.

30. Раздѣлить $a^2b^2+2abc^2-a^2c^2-b^2c^2$ на $ab+ac-bc$.

31. Раздѣлить произведеніе $a+b-c$, $a-b+c$ и $b+c-a$ на $a^2-b^2-c^2+2bc$.

32. Раздѣлить $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ на $a+b$.

33. Раздѣлить $(a^2-bc)^3+8b^3c^3$ на a^2+bc.

34. Раздѣлить $b(x^3-a^3)+ax(x^2-a^2)+a^3(x-a)$ на $(a+b)(x-a)$.

35. Раздѣлить $xy^3+2y^3z-xy^2z+xyz^2-x^3y-2yz^3+x^3z-xz^3$ на $y+z-x$.

36. Раздѣлить $a^2(b+c)-b^2(a+c)+c^2(a+b)+abc$ на $a-b+c$.

37. Раздѣлить $(a-b)x^3+(b^3-a^3)x+ab(a^2-b^2)$ на $(a-b)x+a^2-b^2$.

38. Раздѣлить $ax^2-ab^2+b^2x-x^3$ на $(x+b)(a-x)$.

39. Раздѣлить $(b-c)a^3+(c-a)b^3+(a-b)c^3$ на $a^2-ab-ac+bc$.

40. Раздѣлить $(ax+by)^2+(ay-bx)^2+c^2x^2+c^2y^2$ на x^2+y^2.

41. Раздѣлить $a^2b-bx^2+a^2x-x^3$ на $(x+b)(a-x)$.

42. Разложить $a^2-b^2-c^2+d^2-2(ad-bc)$ на два множителя.

43. Раздѣлить $b(x^3+a^3)+ax(x^2-a^2)+a^3(x+a)$ на $(a+b)(x+a)$.

44. Показать, что $(x^2-xy+y^2)^3+(x^2+xy+y^2)^3$ дѣлится на $2x^2+2y^2$.

45. Показать, что $(x+y)^7-x^7-y^7$ дѣлится на $(x^2+xy+y^2)^2$.

46. Если $A=bc-p^2$, $B=ca-q^2$, $C=ab-r^2$, $P=qr-ap$, $Q=rp-bq$ и $R=pq-cr$, то найти значеніе величинъ $\frac{BC-P^2}{a}$, $\frac{CA-Q^2}{b}$, $\frac{AB-R^2}{c}$, $\frac{QR-AP}{p}$, $\frac{RP-BQ}{q}$ и $\frac{PQ-CR}{r}$.

47. Разложить $a^{16}-x^{16}$ на пять множителей.

48. Разложить $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$ на четыре множителя.

49. Разложить $4(ad+bc)^2-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2$ на четыре множителя.

50. Показать, что $(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ax+by+cz)^2$ дѣлится на $a^2+b^2+c^2$ и на $x^2+y^2+z^2$.

ГЛАВА V.

Отрицательныя количества.

72. Въ Алгебрѣ намъ приводится имѣть дѣло съ такимъ вычитаніемъ, выполнить котораго мы не можемъ, потому что число, которое нужно вычесть, больше того, изъ котораго требуется его вычесть. Напримѣръ, мы знаемъ слѣдующее соотношеніе $a-(b+c)=a-b-c$; положимъ, что $a=7$, $b=7$ и $c=3$, такъ что $b+c=10$. Но соотношеніе $a-(b+c)=a-b-c$ не явно предполагаетъ, что $b+c$ меньше a; если-же мы пренебрежемъ этимъ предположеніемъ, то получимъ $7-10=7-7-3$; и такъ какъ $7-7$ есть нуль, то мы окончательно могли-бы писать $7-10=-3$.

73. При такомъ способѣ писанія равенства $7-10=-3$ мы можемъ подразумѣвать слѣдующее: «10 изъ 7 вычитать нельзя, но если вычесть 7 изъ 10, то остатокъ будетъ 3».

74. Съ перваго взгляда учащемуся пожалуй покажется невѣроятнымъ, чтобы такое выраженіе какъ $7-10$ могло встрѣтиться на практикѣ, а если-бы и встрѣтилось, то могло-бы произойти единственно или отъ ошибки, которую сейчасъ-же можно исправить, или отъ того, что предложена такая задача, рѣшить которую, очевидно, невозможно, а потому слѣдуетъ просто бросить. Но по мѣрѣ того, какъ учащійся будетъ подвигаться въ своихъ занятіяхъ дальше, онъ напротивъ будетъ находить, что такія выраженія встрѣчаются часто; можетъ напримѣръ случиться, что $a-b$ представится въ началѣ какого нибудь продолжительнаго изслѣдованія, когда не легко рѣшить сразу, будетъ-ли a больше или меньше b. Предметъ настоящей главы будетъ состоять въ томъ, чтобы показать, что въ подобныхъ случаяхъ мы можемъ вначалѣ предполагать, что a больше b, но что если окончательно оказалось-бы, что a меньше b, то мы все-таки могли-бы воспользоваться нашимъ изслѣдованіемъ.

75. Сдѣлаемъ одно поясненіе. Положимъ, что въ одинъ годъ купецъ имѣетъ извѣстную прибыль, выражающуюся извѣстнымъ числомъ рублей, а на другой годъ онъ терпитъ убытокъ въ извѣстное число рублей; спрашивается, какое измѣненіе произошло въ его капиталѣ? Пусть a будетъ прибыль перваго года, выраженная въ рубляхъ, и b убытокъ второго года, выраженный тоже въ рубляхъ. Тогда, если a больше b, то капиталъ купца *увеличился* на $a-b$ рублей; если-же b больше a, то капиталъ его *уменьшился* на $b-a$ рублей. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ $a-b$ показываетъ, что въ ариѳметическомъ смыслѣ такое вычитаніе не возможно; но въ Алгебрѣ нашли удобнымъ удержать для по-

казанія измѣненія въ капиталѣ разность $a—b$, которую мы можемъ надлежащимъ образомъ *истолковать*. Такъ напримѣръ, если $a=400$ и $b=500$, то капиталъ купца подвергся уменьшенію въ 100 рублей; что выражается символически такъ

$$400-500=-100,$$

и мы можемъ даже перевести эти символы въ слова, говоря, что капиталъ купца увеличился на «минусъ 100 рублей». Такія выраженія неудобны, разумѣется, въ обыкновенной рѣчи, но для математика они понятны, и онъ основательно и логически умѣетъ пользоваться вытекающими отсюда выводами.

76. Существуетъ много случаевъ, подобныхъ предыдущему, въ которыхъ для насъ бываетъ удобно имѣть возможность представить не одну только величину, но также и то, что можно назвать *качествомъ* или *особенностью* тѣхъ предметовъ, о которыхъ мы разсуждаемъ. Въ предыдущемъ случаѣ извѣстная сумма денегъ можетъ быть *пріобрѣтаема* или *теряема*; въ вопросахъ, относящихся къ хронологіи, мы можемъ отличать время, *предшествующее* извѣстной эпохѣ, отъ времени *послѣдующаго* за нею; въ вопросахъ о положеніи мы можемъ отличать разстояніе, измѣряемое къ *сѣверу* отъ извѣстной постоянной точки, отъ разстоянія, измѣряемаго къ *югу* отъ нея; и такъ далѣе. Такія пары относительныхъ величинъ математикъ различаетъ посредствомъ знаковъ $+$ и $-$. Такъ, если, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, нужно отличить прибыль отъ убытка, то мы можемъ обозначить прибыль $+100$ или просто 100, а убытокъ -100, если величины ихъ равны 100. Или мы могли-бы обозначить убытокъ чрезъ $+100$, а такую-же прибыль чрезъ -100. Здѣсь нужно замѣтить два обстоятельства: *вопервыхъ*, что когда не употреблено никакого знака, то надо подразумѣть знакъ $+$; *вовторыхъ*, что знакъ $+$ можно приписать той или другой изъ относительныхъ величинъ, и тогда во всемъ изслѣдованіи другой величинѣ долженъ будетъ принадлежать знакъ $-$.

77. Въ Ариѳметикѣ мы имѣемъ дѣло только съ числами, представляемыми символами 1, 2, 3, и проч. съ промежуточными между ними дробями; въ Алгебрѣ-же, кромѣ этихъ чиселъ мы разсматриваемъ еще другой рядъ символовъ $-1, -2, -3$, и проч. съ промежуточными дробями. Символы, предъ которыми стоитъ знакъ $-$, называются *отрицательными количествами*, а символы, предъ которыми стоитъ знакъ $+$, называются *положительными количествами*. Символы, не имѣющіе передъ собою знака, разсматриваются какъ имѣющіе знакъ $+$.

Абсолютной величиной какого нибудь количества называется число, представляемое этимъ количествомъ независимо отъ знака, стоящаго предъ количествомъ.

78. Въ предыдущихъ главахъ мы дали правила Сложенія, Вычитанія, Умноженія и Дѣленія алгебраическихъ выраженій. Правила эти

основаны на ариѳметическихъ понятіяхъ и остаются справедливыми до тѣхъ поръ, пока эти выраженія представляютъ собою величины разсматриваемыя Ариѳметикою, т. е. *величины положительныя*. Такъ, когда мы вводимъ такое выраженіе, какъ $a—b$, то предполагаемъ, что a и b *положительныя величины*, при чемъ a больше b. Но если мы пожелаемъ потомъ распространить наши разсужденія и *на отрицательныя величины*, то необходимо будетъ возвратиться вновь къ разсмотрѣнію этихъ основныхъ дѣйствій. Нашли удобнымъ допустить, что правила основныхъ дѣйствій должны быть одни и тѣ-же, обозначаютъ-ли принятые символы *положительныя*, или *отрицательныя* количества; поэтому мы должны обезпечить это удобство при помощи надлежащихъ опредѣленій. Дѣйствительно нужно замѣтить, что дѣлать опредѣленія находится въ нашей власти; напримѣръ *умноженіе* опредѣлено въ Ариѳметикѣ для положительныхъ количествъ, и мы, естественно, должны удержать это опредѣленіе; но *умноженіе отрицательныхъ количествъ* или *положительнаго* и *отрицательнаго количества* еще не было опредѣлено, и эти термины остаются пока не имѣющими смысла. Поэтому отъ насъ зависитъ опредѣлить ихъ какъ угодно, лишь-бы потомъ уже разъ на всегда держаться этого опредѣленія.

79. Учащійся долженъ помнить, что онъ еще не въ состояніи судить объ *удобствѣ*, которое можетъ послѣдовать, какъ мы намекнули, отъ разсматриванія основныхъ законовъ алгебраическихъ дѣйствій постоянными и неизмѣнными и отъ усвоенія болѣе обширнаго понятія такимъ словамъ, какъ сложеніе и умноженіе, съ цѣлью обезпечить ихъ неизмѣнность и постоянство. Онъ долженъ пока ограничиться наблюденіемъ за вѣрностью выводовъ, получающихся на основаніи опредѣленій. По мѣрѣ того, какъ онъ будетъ подвигаться дальше, онъ увидитъ, что Алгебра много выигрываетъ въ могуществѣ и полезности, благодаря введенію въ нее *отрицательныхъ количествъ* и распространенію смысла основныхъ дѣйствій. И онъ убѣдится, что хотя символы $+$ и $—$ повидимому употребляются для двухъ цѣлей, именно согласно съ опредѣленіями ст. 3 и 4 и согласно условію ст. 76, но никакого противорѣчія или недоразумѣнія изъ этого обстоятельства всетаки возникнуть не можетъ.

80. Два количества называются равными и могутъ быть соединены посредствомъ знака $=$, когда они имѣютъ одно и то-же численное значеніе и одинъ и тотъ-же знакъ. Такимъ образомъ они могутъ имѣть одну и ту-же абсолютную величину и быть не равными между собою. Напримѣръ 7 и $—7$ имѣютъ одинаковую *абсолютную величину*, но они не могутъ быть названы равными.

81. Въ Ариѳметикѣ цѣлью *сложенія* служитъ нахожденіе одного числа равнаго совокупности всѣхъ единицъ и дробей, содержащихся въ другихъ данныхъ числахъ. Такое пониманіе сложенія не примѣнимо къ отрицательнымъ количествамъ, т. е. мы еще не знаемъ *смысла* выра-

женій «приложить —3 къ 5», «приложить — 3 къ —5». Поэтому мы должны дать опредѣленный смыслъ словамъ *сложить*, *приложить* въ такихъ случаяхъ, и предлагаемый нами смыслъ опредѣляется слѣдующими правилами: *Чтобы сложить два количества съ одинаковымъ знакомъ, нужно сложить абсолютныя величины этихъ количествъ и поставить предъ суммой знакъ этихъ количествъ. Чтобы сложить два количества съ разными знаками, нужно вычесть меньшее по абсолютной величинѣ изъ большаго и предъ остаткомъ поставить знакъ того количества, которое имѣетъ большую абсолютную величину.*

Такъ, по первому правилу, если мы сложимъ 3 и 5, то получимъ 8, и если мы складываемъ —3 и —5, то сумма будетъ —8. По второму правилу, если мы сложимъ 3 и —5, то получимъ —2, если-же складываемъ —3 и 5, то получимъ 2.

82. Легко видѣть, что данныя выше правила лишаютъ слово *сложить* его обыкновеннаго ариѳметическаго смысла, пока дѣло идетъ о сложеніи такихъ количествъ, какія разсматриваетъ Ариѳметика, т. е. положительныхъ, но за то даетъ смыслъ этому слову въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ оно раньше не имѣло смысла. Читатель можетъ пожалуй возразить, что слову сложить не дано никакого новаго *опредѣленія*, но что дано лишь правило для *складыванія* двухъ количествъ. На это мы можемъ отвѣтить, что практическое употребленіе *опредѣленія* покажетъ намъ, что мы употребляемъ это слово правильно и основательно и данныя выше правила обезпечатъ эту цѣль въ настоящемъ случаѣ.

83. Но эти правила вовсе непроизвольны, то-есть учащійся легко можетъ всегда убѣдиться, даже на этой ступени его познаній, что они несомнѣнно имѣютъ большія преимущества. Такъ, чтобы воспользоваться численнымъ примѣромъ, даннымъ выше, положимъ, что кто-нибудь имѣетъ получить отъ одного лица 3 рубля и отъ другого 5 рублей, тогда мы можемъ сказать, что онъ обладаетъ 8 рублями. Но положимъ, что онъ *долженъ* одному лицу 3 рубля и другому 5 рублей, тогда онъ *долженъ* всего 8 рублей; на это можно смотрѣть, какъ на истолкованіе смысла символа —8, происходящаго отъ сложенія —3 и —5. Положимъ теперь, что ему приходится получить 3 рубля и заплатить 5 рублей, тогда онъ остается *въ долгу* на 2 рубля; на это можно смотрѣть, какъ на истолкованіе символа —2, происходящаго отъ сложенія 3 и —5. Наконецъ положимъ, что ему нужно получить 5 рублей и заплатить 3 рубля; это можно понимать такъ, что онъ обладаетъ 2 рублями, и это можетъ служить объясненіемъ того, что отъ сложенія —3 и 5 получается 2.

84. Такимъ образомъ въ Алгебрѣ *сложеніе* не предполагаетъ необходимо увеличенія въ ариѳметическомъ смыслѣ, и тѣмъ не менѣе для

обозначенія результата употребляется также слово *сумма*. Иногда, когда иначе могла-бы оказаться неясность въ этомъ отношеніи, употребляется терминъ *алгебраическая сумма*, чтобъ отличить этотъ результатъ отъ *ариѳметической суммы*, которая получилась-бы отъ ариѳметическаго сложенія *абсолютныхъ величинъ* разсматриваемыхъ членовъ.

85. Положимъ теперь, что намъ нужно сложить пять количествъ -2, $+5$, -13, -4 и $+8$. Сумма -2 и $+5$ есть $+3$; сумма $+3$ и -13 есть -10; сумма -10 и -4 есть -14; сумма -14 и $+8$ есть -6. Такимъ образомъ -6 будетъ искомая *сумма*. Но мы можемъ сначала найти сумму отрицательныхъ количествъ: -2, -13 и -4, что дастъ -19; потомъ найти сумму положительныхъ количествъ: $+5$ и $+8$, что дастъ $+13$. Тогда искомая сумма приметъ видъ $+13-19$, то-есть -6, какъ и раньше. Легко убѣдиться, съ помощью повѣрки, что результатъ получится одинаковый, каковъ-бы не былъ порядокъ, въ которомъ мы беремъ члены, то-есть $-2-13+5+8-4$, $8-13-2-4+5$, и такъ далѣе всѣ даютъ -6.

86. Положимъ теперь, что намъ нужно *сложить* два или болѣе алгебраическихъ выраженій, напримѣръ $2a-3b+4c$ и $-a-2b+c+2d$. Мы получаемъ для ихъ *суммы*

$$2a-3b+4c-a-2b+c+2d.$$

Здѣсь мы можемъ соединить вмѣстѣ подобные члены; такъ

$$2a-a=a,\quad -3b-2b=-5b,\quad 4c+c=5c,$$

и *сумма* будетъ $a-5b+5c+2d$.

Такимъ образомъ мы можемъ дать слѣдующее правило для алгебраическаго сложенія: *Нужно написать члены въ одной строкѣ съ тѣми знаками, какіе у нихъ есть; собрать вмѣстѣ подобные члены и наконецъ расположить члены результата въ извѣстномъ порядкѣ.*

87. Въ ариѳметическомъ вычитаніи намъ всегда приходится отнимать нѣкоторое число, называющееся *вычитаемымъ*, отъ другого числа, которое называется *уменьшаемымъ*, причемъ полученный результатъ называется остаткомъ. Итакъ остатокъ можно опредѣлить какъ такое число, которое должно приложить къ вычитаемому, чтобы получить уменьшаемое, а цѣль вычитанія состоитъ въ нахожденіи этого *остатка*.

Тѣмъ-же самымъ опредѣленіемъ мы будемъ пользоваться и въ алгебраическомъ вычитаніи, то-есть будемъ говорить, что при вычитаніи намъ нужно найти такое количество, которое должно приложить къ вычитаемому, чтобы получить уменьшаемое. Изъ этого опредѣленія вытекаетъ слѣдующее правило: *Нужно измѣнить знакъ каждаго члена въ вычитаемомъ, и полученное такимъ образомъ выраженіе приложить къ уменьшаемому; результатъ будетъ искомый остатокъ.*

Дѣйствительно, легко видѣть, что если къ составленному такимъ образомъ выраженію мы приложимъ вычитаемое, приписывая каждый

членъ съ принадлежащимъ ему знакомъ, то всѣ члены вычитаемаго исчезнутъ и останется уменьшаемое, которое мы и искали.

88. Обратимъ теперь вниманіе на другое обстоятельство. Согласно нашему положенію *сумма* $+a$ и $-b$ означается посредствомъ $a-b$; если мы вычтемъ $-b$ изъ a, то результатъ будетъ $a+b$; сумма $-a$, $+b$ и $-c$ будетъ $-a+b-c$, и такъ далѣе. Но до сихъ поръ мы полагали, что самыя буквы представляютъ *положительныя числа*; напримѣръ, когда мы говоримъ, что сумма $+a$ и $-b$ есть $a-b$, то a можетъ равняться, положимъ, 6, а b равняться 10; но положимъ, что a есть -6 и b есть -10, окажутся-ли наши правила пригодными и здѣсь? Такъ какъ b есть -10, то $-b$ или $-(-10)$ естественно приметъ значеніе 10, а $+a$ или $+(-6)$ будетъ имѣть значеніе -6, сумма-же 10 и -6 есть 4.

89. Такимъ образомъ, если a само по себѣ *отрицательное количество*, то мы можемъ понимать его какъ $+a$ и какъ $-a$; смыслъ этого будетъ слѣдующій: пусть $a=-\alpha$, такъ что α есть положительное количество, тогда $+a$ или $+(-\alpha)=-\alpha$, а $-a$ или $-(-\alpha)=\alpha$. Въ предыдущей статьѣ мы сказали, что такой смыслъ *естественно* слѣдуетъ изъ сказаннаго раньше; но впрочемъ не представляетъ большой важности, будемъ-ли мы разсматривать такое пониманіе какъ слѣдствіе предыдущаго, или будемъ смотрѣть на него, какъ на новый способъ истолкованія. Наибольшая важность состоитъ въ томъ, чтобы пользоваться принятыми правилами однообразно и послѣдовательно, разъ они уже допущены.

Такъ какъ $+(-\alpha)=-\alpha$ и $-(-\alpha)=\alpha$, т. е. $+\alpha$, то мы можемъ высказать относительно знаковъ то-же самое правило, какъ и раньше, именно *одинаковые знаки даютъ* $+$, разные $-$.

90. Въ умноженіи нужно разсмотрѣть четыре случая. Пусть a и b означаютъ два числа, тогда намъ нужно будетъ разсмотрѣть

$$+a\times+b,\quad -a\times+b,\quad +a\times-b,\quad -a\times-b.$$

Первый случай представляетъ обыкновенное ариѳметическое умноженіе и не требуетъ никакого замѣчанія. Обыкновенное опредѣленіе умноженія прилагается равнымъ образомъ и ко второму случаю; дѣйствительно, положимъ, напримѣръ, что $b=3$, тогда $-a\times3$ показываетъ, что $-a$ должно повториться *три* раза, то-есть въ результатѣ умноженія мы будемъ имѣть $-a-a-a$ или $-3a$. Итакъ

$$-a\times+b=-ab.$$

Въ двухъ другихъ случаяхъ множитель *отрицательное количество*, вслѣдствіе чего общее ариѳметическое понятіе объ умноженіи здѣсь не приложимо; поэтому мы должны съ помощью надлежащаго опредѣленія дать смыслъ этому термину въ настоящемъ случаѣ. Но мы замѣчаемъ, что когда множитель—положительное число, то знакъ множимаго сохраняется въ произведеніи, а потому сдѣлаемъ слѣдующее до-

пущеніе: *Когда множитель—отрицательное число, то нужно произвести умноженіе такъ, какъ будто-бы множитель былъ положительнымъ, а потомъ измѣнить въ произведеніи знакъ.* Отсюда мы непосредственно заключаемъ, что

$$+a\times-b=-ab \text{ и } -a\times-b=+ab.$$

91. Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующее правило: *Чтобы перемножить между собою два количества, каковы бы не были ихъ знаки, нужно умножить ихъ, не обращая вниманія на знаки, и предъ произведеніемъ поставить* + *или* —, *смотря по тому, будутъ-ли оба множителя съ одинаковыми знаками, или съ разными.* Какъ уже было замѣчено, правило знаковъ въ умноженіи сокращенно выражается такъ: *одинаковые знаки даютъ* +, *разные* —.

92. Въ предыдущихъ статьяхъ мы предполагали, что сами a и b означаютъ ариѳметическія числа; поэтому важно замѣтить, что если они означаютъ и какія-нибудь положительныя или отрицательныя количества, то и тогда полученные четыре вывода остаются справедливыми, то-есть

$$+a\times+b=+ab,\quad -a\times+b=-ab,\quad +a\times-b=-ab,$$
$$-a\times-b=+ab.$$

Возьмемъ, напримѣръ, послѣдній изъ этихъ случаевъ и положимъ, что a есть отрицательное количество, такъ что можетъ быть обозначено чрезъ $-\alpha$; тогда $-a$ будетъ положительное количество и $=\alpha$ (ст. 89). Слѣдовательно $-a\times-b=\alpha\times-b$, а это будетъ по третьему случаю $=-\alpha b$. Такъ-же $ab=-\alpha\times b=-\alpha b$, по второму случаю.

Такимъ образомъ выводъ $-a\times-b$ остается справедливымъ, когда a будетъ и отрицательнымъ количествомъ. Подобнымъ-же образомъ можетъ быть доказанъ и всякій другой случай.

93. Мы должны теперь показать, что и правила для умноженія двучленныхъ или многочленныхъ выраженій, данныя въ ст. 48, также остаются справедливыми, что́ бы не означали эти символы. Возьмемъ напримѣръ случай

$$(a-b)c=ac-bc.$$

При доказательствѣ этого мы предполагали, что c положительное количество; положимъ теперь, что оно будетъ отрицательнымъ, именно $-\gamma$. Въ силу условія статьи 90, чтобы найти произведеніе $a-b$ на $-\gamma$, мы должны умножить $a-b$ на γ и потомъ измѣнить знакъ каждаго члена въ результатѣ. Но

$$(a-b)\gamma=a\gamma-b\gamma;$$

такимъ образомъ $(a-b)\times-\gamma=-a\gamma+b\gamma.$

А такъ какъ $c=-\gamma$, то мы имѣемъ

$$ac-bc=-a\gamma+b\gamma;$$

такъ что условіе $(a-b)c=ac-bc$

остается справедливымъ, будетъ-ли c положительнымъ или отрицательнымъ. Подобнымъ-же образомъ могутъ быть доказаны и другіе случаи.

94. Обыкновенное опредѣленіе дѣленія будетъ имѣть общее значеніе. Мы предполагаемъ, что дано произведеніе и одинъ изъ множителей, и намъ нужно опредѣлить другой множитель.

Поэтому, если мы произведемъ дѣленіе, не обращая вниманія на знаки, то получимъ частное независимо отъ знаковъ. Тогда останется опредѣлить знакъ, для чего мы можемъ дать слѣдующее правило:

Когда дѣлимое и дѣлитель имѣютъ одинаковые знаки, то частное должно имѣть знакъ $+$; *когда дѣлимое и дѣлитель имѣютъ разные знаки, то частное должно имѣть знакъ* $-$.

Правило это вытекаетъ изъ того, что произведеніе дѣлителя и частнаго должно равняться дѣлимому. Правило знаковъ при дѣленіи, какъ и прежде, можно выразить сокращенно такъ-же: *одинаковые знаки даютъ* $+$, *разные знаки даютъ* $-$.

95. Слова *больше* и *меньше* часто употребляются въ Алгебрѣ въ болѣе широкомъ смыслѣ. Мы говоримъ, что a *больше* b или что b *меньше* a, если $a-b$ *будетъ положительная величина.* Это согласно съ обыкновеннымъ языкомъ, когда a и b сами по себѣ положительны, но нашли удобнымъ распространить значеніе словъ *больше* и *меньше*, такъ что опредѣленіе это можетъ оставаться справедливымъ также и тогда, когда a или b отрицательно, или оба они отрицательны. Такъ, напримѣръ, на *алгебраическомъ языкѣ* 1 больше чѣмъ -2 и -2 больше, чѣмъ -3.

96. Прежде чѣмъ оставимъ эту часть нашего предмета, мы должны сдѣлать нѣсколько общихъ замѣчаній. Предметъ Алгебры нѣкоторыми новѣйшими писателями раздѣляется на двѣ части, которыя они называютъ *Ариѳметической Алгеброй* и *Символической Алгеброй*. Въ Ариѳметической Алгебрѣ символы употребляются для означенія чиселъ и дѣйствій, встрѣчающихся въ Ариѳметикѣ. Здѣсь, какъ это показано въ предыдущихъ главахъ настоящаго сочиненія, мы начинаемъ съ опредѣленія нашихъ символовъ и потомъ доходимъ до извѣстныхъ выводовъ, каковъ напримѣръ выводъ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Въ Символической Алгебрѣ мы допускаемъ, что правила Ариѳметической Алгебры имѣютъ всеобщее значеніе и опредѣляемъ, какъ нужно ихъ выражать символами и дѣйствіями, чтобы достигнуть такого результата. Такимъ образомъ, мы можемъ сказать, что въ настоящей главѣ мы занимались изслѣдованіемъ того, какой смыслъ должно придавать символамъ, чтобы выводы предшествующихъ главъ могли имѣть общее значеніе. И это неизбѣжно привело насъ къ теоріи *отрицательныхъ* количествъ и къ болѣе широкому пониманію словъ: сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе.

97. Въ нѣкоторыхъ старыхъ сочиненіяхъ по Алгебрѣ дѣлаются

весьма недостаточныя указанія относительно расширенія смысла, который мы придаемъ извѣстнымъ простымъ ариѳметическимъ терминамъ. Доказательства, приводимыя въ этихъ сочиненіяхъ и изслѣдованія ихъ сохраняютъ свое значеніе только до тѣхъ поръ, пока символы имѣютъ чисто ариѳметическій смыслъ, такъ что въ сущности эти доводы и изслѣдованія безъ всякаго доказательства распространяются на символы, уже вовсе не имѣющіе ариѳметическаго смысла. Въ новѣйшихъ сочиненіяхъ, какъ и въ настоящемъ, дѣлаются попытки установить болѣе полныя доказательства. Впрочемъ нельзя отрицать того, что этотъ отдѣлъ нашего предмета представляетъ значительныя затрудненія для начинающаго, такъ что онъ вѣроятно лишь послѣ многократнаго обсужденія вопроса въ состояніи будетъ придти къ убѣжденію въ общей справедливости основныхъ теоремъ.

Мы совѣтуемъ учащемуся идти дальше, до главы объ уравненіяхъ; тамъ онъ увидитъ нѣкоторыя дальнѣйшія замѣчанія относительно отрицательныхъ количествъ, послѣ чего можетъ прочитать настоящую главу снова. Было-бы несовмѣстно съ планомъ этого сочиненія входить въ бо́льшія подробности, касающіяся этой части Алгебры; настоящая глава можетъ дать краткій очеркъ, который учащійся самъ впослѣдствіи дополнитъ чтеніемъ другихъ сочиненій и собственнымъ размышленіемъ.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи намъ встрѣтится надобность въ извѣстныхъ предложеніяхъ, которыя принимаются въ Ариѳметикѣ, какъ очевидныя аксіомы и которыя оказываются также справедливыми и тогда, когда мы придаемъ терминамъ и символамъ болѣе обширный смыслъ.

98. Если къ равнымъ количествамъ приложить равныя-же, то суммы будутъ равны.

99. Если отъ равныхъ количествъ отнять равныя-же, то остатки будутъ равны.

Такъ напримѣръ, если $A=pB+C$, то, отнимая отъ этихъ равныхъ количествъ по C, будемъ имѣть $A-C=pB$.

100. Если равныя количества умножить на тѣ-же или на равныя количества, то произведенія будутъ равны.

Такъ, если $a=b$, то и $a^n=b^n$ и $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$.

101. Если равныя количества раздѣлить на тѣ же или на равныя количества, то частныя будутъ равны.

102. Если одно и то-же количество приложить къ другому и вычесть изъ него, то величина послѣдняго не измѣнится.

103. Если какое нибудь количество умножить и раздѣлить на другое количество, то величина его не измѣнится.

104. Важно обратить вниманіе читателя на то обстоятельство, что эти предложенія теперь остаются справедливыми, будутъ-ли разсматриваемыя количества положительными или отрицательными, и понимаемъ

ли мы термины сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе въ простомъ или широкомъ ихъ смыслѣ. Напримѣръ, если $a=b$ и $c=d$, то $ac=bd$; это очевидно, если всѣ буквы означаютъ положительныя количества. Но положимъ, что c будетъ нѣкоторое отрицательное количество, такъ что мы можемъ его представить чрезъ $-\gamma$; тогда и d должно быть отрицательнымъ количествомъ, и если мы означимъ его чрезъ $-\delta$, то будемъ имѣть $\gamma=\delta$; слѣдовательно $a\gamma=b\delta$; слѣдовательно $-a\gamma=-b\delta$, и такимъ образомъ $ac=bd$.

Разные примѣры.

1. Показать, что $x^2+y^2+4z^2+2xy+8xz$ и $4(x+z)^2$ будутъ тожественно равны, когда x и y каждое равно a.

2. Если $a=1$, $b=\frac{2}{3}$, $x=7$ и $y=8$, то найти значеніе выраженія:

$$5\,(a-b)\sqrt[3]{\{(a+x)y^2\}}-b\sqrt{\{(a+x)y\}}+a.$$

3. Если $a=\frac{5}{7}$, $b=\frac{1}{2}$, $x=5$ и $y=\frac{9}{2}$, то найти значеніе

$$(10a+20b)\sqrt{\{(x-b)y\}}-3a\sqrt[3]{\{y^2\,(x-b)\}}+5b.$$

4. Если $a=\frac{4}{5}$, $b=2$, $x=\frac{10}{3}$ и $y=\frac{4}{3}$, то найти значеніе

$$(a+b)\sqrt[3]{\{(x-b)y^2\}}-a\sqrt{\{y(x-b)\}}+x.$$

5. Подставить $y+3$ вмѣсто x въ выраженіе $x^4-x^3+2x^2-3$ и расположить результатъ по степенямъ y.

6. Показать, что

$$\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}^2=2\{(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4\}.$$

7. Если $2s=a+b+c$, то показать, что

$$(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2+s^2=a^2+b^2+c^2.$$

8. Если $2s=a+b+c$, то показать, что

$$2\,(s-a)(s-b)+2\,(s-b)(s-c)+2\,(s-c)(s-a)=2s^2-a^2-b^2-c^2.$$

9. Если $2s=a+b+c$, то показать, что

$$2\,(s-a)(s-b)(s-c)+a(s-b)(s-c)+b(s-c)(s-a)+c(s-a)(s-b)=abc.$$

10. Показать, что

$$(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3+a^3+b^3+c^3=6abc.$$

11. Показать, что если $a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{n}{2}s$, то

$$(s-a_1)^2+(s-a_2)^2+\ldots+(s-a_n)^2=a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\ldots+a_n{}^2.$$

12. Если $2s=a+b+c$ и $2\sigma^2=a^2+b^2+c^2$, то показать, что

$$(\sigma^2-a^2)(\sigma^2-b^2)+(\sigma^2-b^2)(\sigma^2-c^2)+(\sigma^2-c^2)(\sigma^2-a^2)=4s(s-a)(s-b)(s-c).$$

ГЛАВА VI.

Общій наибольшій дѣлитель.

105. Въ Ариѳметикѣ *общимъ наибольшимъ дѣлителемъ* двухъ или болѣе цѣлыхъ чиселъ называется наибольшее число, на которое всѣ они могутъ дѣлиться безъ остатка. Этотъ терминъ употребляется также и въ Алгебрѣ, и значеніе его выяснится изъ слѣдующаго опредѣленія *общаго наибольшаго дѣлителя* двухъ или болѣе алгебраическихъ выраженій.

Пусть два или нѣсколько алгебраическихъ выраженій расположены по нисходящимъ степенямъ одной и той-же буквы, тогда множитель наиболѣе высокой степени, дѣлящій безъ остатка эти выраженія, называется ихъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ.

106. Терминъ *общій наибольшій дѣлитель* является не вполнѣ свойственнымъ въ Алгебрѣ, потому что слова *большее* и *меньшее* лишь въ рѣдкихъ случаяхъ могутъ быть примѣняемы къ алгебраическимъ выраженіямъ, въ которыхъ не дано частнаго численнаго значенія составляющимъ ихъ буквамъ. Лучше было-бы употреблять выраженіе *общій наивысшій дѣлитель*; но согласно съ установившимся обычаемъ мы удерживаемъ терминъ *общій наибольшій дѣлитель*. Вмѣсто этого длиннаго названія мы часто будемъ для краткости писать здѣсь лишь его начальныя буквы о. н. д.

Когда какое нибудь выраженіе дѣлитъ безъ остатка два или болѣе другихъ выраженій, то мы будемъ называть его *общимъ* ихъ *дѣлителемъ* или короче просто ихъ *дѣлителемъ*.

107. Правило для нахожденія о. н. д. двухъ алгебраическихъ выраженій состоитъ въ слѣдующемъ:

Пусть A и B будутъ два алгебраическія выраженія и пусть они расположены по нисходящимъ степенямъ какой нибудь одной и той-же буквы и положимъ, что показатель у высшей степени этой буквы въ A не меньше, чѣмъ показатель наивысшей степени той-же буквы въ B. Раздѣлимъ A на B; потомъ примемъ остатокъ за дѣлитель, а B за дѣлимое; затѣмъ новый остатокъ примемъ за дѣлитель, а предыдущій остатокъ за дѣлимое, и будемъ продолжать поступать такимъ образомъ, пока не будетъ наконецъ никакого остатка; тогда послѣдній дѣлитель и будетъ искомымъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ.

108. Примѣръ. Найти о. н. д. для

$$x^2-6x+8 \text{ и } 4x^3-21x^2+15x+20.$$

$$\begin{array}{l|l} 4x^3-21x^2+15x+20 & x^2-6x+8 \\ \underline{4x^3-24x^2+32x} & \overline{4x+3} \\ \hline 3x^2-17x+20 & \\ \underline{3x^2-18x+24} & \\ \hline x-4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2-6x+8 & x-4 \\ \underline{x^2-4x} & \overline{x-2} \\ \hline -2x+8 & \\ \underline{-2x+8} & \\ \hline \end{array}$$

Такимъ образомъ искомый общій наибольшій дѣлитель есть $x-4$.

109. Справедливость правила, даннаго въ ст. 107, основывается на слѣдующихъ началахъ:

1) Если P дѣлитъ A, то оно должно дѣлить и mA. Дѣйствительно, такъ какъ P дѣлитъ A, то мы можемъ положить, что $A=aP$, тогда $mA=maP$, и такимъ образомъ mA дѣлится на P.

2) Если P дѣлитъ A и B. то оно будетъ дѣлить и $mA\pm nB$. Дѣйствительно, такъ какъ P дѣлитъ A и B, то мы можемъ положить, что $A=aP$ и $B=bP$, тогда $mA\pm nB=(ma\pm nb)P$; такимъ образомъ $mA\pm nB$ дѣлится на P.

Мы можемъ теперь доказать данное въ ст. 107 правило.

110. Обозначимъ буквами A и B два выраженія, и пусть эти послѣднія расположены по нисходящимъ степенямъ одной и той-же буквы, и положимъ, что показатель наивысшей степени этой буквы въ A не меньше показателя высшей степени этой буквы въ B. Раздѣлимъ A на B; пусть p означаетъ частное и C остатокъ. Раздѣлимъ B на C; пусть q означаетъ частное и D остатокъ. Раздѣлимъ C на D и положимъ, что остатка уже не будетъ, а частное означимъ чрезъ r. Тогда мы будемъ имѣть слѣдующіе результаты.

$$A=pB+C;\ B=qC+D;\ C=rD.$$

Покажемъ сперва, что D есть общій дѣлитель A и B.

D дѣлитъ C, потому что $C=rD$, слѣдовательно D дѣлитъ qC, а также и $qC+D$; то-есть D дѣлитъ B. Далѣе, такъ какъ D дѣлитъ B и C, то оно дѣлитъ $pB+C$, то-есть D дѣлитъ A. Слѣдовательно D дѣлитъ A и B.

Такимъ образомъ мы доказали, что D есть общій дѣлитель A и B; покажемъ теперь, что D есть ихъ *наибольшій* общій дѣлитель.

По ст. 109 всякое выраженіе, дѣлящее A и B, дѣлитъ $A-pB$, то-есть C; поэтому всякое выраженіе, дѣлящее A и B, будетъ также дѣлителемъ B и C. Подобно этому всякое выраженіе, дѣлящее B и C,

будетъ и дѣлителемъ C и D. Итакъ всякое выраженіе, дѣлящее A и B дѣлитъ и D. Но никакое выраженіе выше D не можетъ быть дѣлителемъ D. Слѣдовательно D есть искомый о. н. д.

111. Совершенно такимъ-же образомъ, какъ доказывалось въ предыдущей статьѣ, что D измѣряетъ A и B или дѣлитъ ихъ, можно показать, что всякое выраженіе, дѣлящее D, измѣряетъ также или дѣлитъ A и B. А въ предыдущей статьѣ показано, что всякое выраженіе, измѣряющее A и B, дѣлитъ D. Такимъ образомъ всякій дѣлитель A и B будетъ также дѣлителемъ и ихъ о. н. дѣлителя; и наоборотъ всякій дѣлитель о. н. дѣлителя будетъ дѣлить также A и B.

112. Какъ примѣръ приложенія сказаннаго въ ст. 110, положимъ что требуется найти общій наибольшій дѣлитель выраженій x^2+5x+4 и x^3+4x^2+5x+2.

$$\begin{array}{l|l} x^3+4x^2+5x+2 & x^2+5x+4 \\ \underline{x^3+5x^2+4x} & \overline{x-1} \\ -x^2+x+2 & \\ \underline{-x^2-5x-4} & \\ 6x+6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2+5x+4 & 6x+6 \\ \underline{x^2+x} & \overline{\frac{x}{6}+\frac{4}{6}} \\ 4x+4 & \\ \underline{4x+4} & \\ & \end{array}$$

Этотъ примѣръ обращаетъ вниманіе наше на новое обстоятельство: послѣдній дѣлитель здѣсь $6x+6$, который, согласно правилу, долженъ быть искомымъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ. Изъ предыдущаго дѣйствія мы видимъ, что когда x^2+5x+4 дѣлится на $6x+6$, то частное оказывается $\frac{x}{6}+\frac{4}{6}$. Если будемъ дѣлить на $6x+6$ другое данное выраженіе, именно x^3+4x^2+5x+2, то мы получимъ въ частномъ $\frac{x^2}{6}+\frac{x}{2}+\frac{1}{3}$. Учащійся сразу замѣтитъ, что $6x+6$ не можетъ быть общей мѣрой двухъ данныхъ выраженій, потому что получаемыя при дѣленіи частныя представляютъ собою дроби. Но мы видимъ, что въ этихъ частныхъ буква x не входитъ въ знаменатели дробей, хотя коэффиціенты степеней x и дробные. Поэтому такія выраженія, какъ $\frac{x}{6}+\frac{2}{3}$ и $\frac{x^2}{6}+\frac{x}{2}+\frac{1}{3}$ можно называть *по отношенію къ x цѣлыми выраженіями*.

Такимъ образомъ, въ этомъ примѣрѣ, когда мы говоримъ, что $6x+6$ есть о. н. д. двухъ данныхъ выраженій, то мы лишь подъ этимъ разумѣемъ, что нельзя найти никакого дѣлителя, который содержалъ-бы въ себѣ высшую степень x, чѣмъ встрѣчающаяся въ выраженіи $6x+6$. Другіе дѣлители, какіе можно найти, будутъ отличаться отъ этого только въ томъ, что касается численныхъ коэффиціентовъ. Такъ $3x+3$ и $2x+2$ будутъ тоже дѣлителями; одинъ изъ нихъ представляетъ *половину*, а другой *треть* дѣлителя $6x+6$, и когда мы раздѣлимъ данныя выраженія на эти дѣлители, то соотвѣтствующія частныя будутъ одно *въ два*, а другое—*въ три* раза болѣе предыдущаго. Но и $x+1$ будетъ также дѣлитель и соотвѣтствующія частныя будутъ $x+4$ и x^2+3x+2; въ такомъ случаѣ мы можемъ условно принять за общій наибольшій дѣлитель $x+1$, лишь бы частныя были свободны отъ дробныхъ коэффиціентовъ.

113. Чтобы избѣжать *дробныхъ коэффиціентовъ* въ частныхъ принято обыкновенно при производствѣ дѣйствія отысканія общаго наибольшаго дѣлителя *отбрасывать* извѣстные множители, не составляющіе части искомаго общаго наибольшаго дѣлителя.

Положимъ, что намъ нужно найти о. н. д. для A и B; и положимъ, что на нѣкоторой ступени производимаго дѣйствія мы пришли къ выраженіямъ K и R, одно изъ которыхъ должно быть дѣлимымъ, а другое дѣлителемъ. Пусть $R=mS$, гдѣ m не заключаетъ ни одного изъ множителей, какіе могутъ быть въ K; въ такомъ случаѣ m можно отбросить, т. е. вмѣсто того, чтобы продолжать дѣйствіе надъ K и R, мы можемъ продолжать его надъ K и S.

Дѣйствительно, какъ это было уже показано, мы знаемъ, что A и B имѣютъ какъ разъ тѣхъ-же общихъ дѣлителей, какъ K и R.

Но всякій общій дѣлитель K и S есть общій дѣлитель K и R, а слѣдовательно и общій дѣлитель A и B.

И всякій общій дѣлитель K и R будетъ общимъ дѣлителемъ K и mS. Но m не содержитъ въ себѣ ни одного изъ множителей, содержащихся въ K. Слѣдовательно всякій общій дѣлитель K и R есть общій дѣлитель K и S. Поэтому всякій общій дѣлитель A и B будетъ общимъ дѣлителемъ K и S.

Такимъ образомъ мы видимъ, что A и B имѣютъ какъ разъ тѣхъ-же общихъ дѣлителей, какихъ имѣютъ K и S, а это и нужно было доказать.

114. Извѣстнаго рода множитель можетъ быть также и введенъ на всякой ступени дѣйствія.

Положимъ, что намъ нужно найти о. н. д. для A и B, и что на какой нибудь ступени дѣйствія его нахожденія мы пришли къ выраженіямъ K и R, одно изъ которыхъ должно быть дѣлимымъ, а другое—дѣлителемъ Пусть $L=nK$, гдѣ n не заключаетъ въ себѣ ни одного

изъ множителей, содержащихся въ R; тогда мы можемъ ввести этотъ множитель n, то-есть продолжать дѣйствіе надъ L и R вмѣсто того, чтобы продолжать его надъ K и R.

Дѣйствительно, какъ уже доказано, мы знаемъ, что A и B имѣютъ тѣхъ-же самыхъ общихъ дѣлителей, какихъ имѣютъ K и R.

Но всякій общій дѣлитель K и R будетъ общимъ дѣлителемъ L и R, такъ что всякій общій дѣлитель A и B будетъ общимъ дѣлителемъ L и R.

И всякій общій дѣлитель L и R будетъ дѣлителемъ nK и R. Но n не содержитъ ни одного изъ множителей, содержащихся въ R. Слѣдовательно всякій общій дѣлитель L и R будетъ общимъ дѣлителемъ K и R, а слѣдовательно и общимъ дѣлителемъ A и B.

Такимъ образомъ мы видимъ, что A и B какъ разъ имѣютъ тѣхъ-же общихъ дѣлителей, какихъ имѣютъ L и R, а это и нужно было доказать.

115. Мы видимъ такимъ образомъ, что извѣстные множители какъ въ дѣлимомъ, такъ и въ дѣлителѣ могутъ быть отбрасываемы, или напротивъ вводимы въ нихъ; на практикѣ обыкновенно удаляютъ множителей изъ дѣлителей, и вводятъ множителей въ дѣлимыя, при чемъ подобные множители вообще представляютъ собою *численныхъ* множителей. Разсужденія статей 113 и 114 показываютъ, что такое введеніе или отбрасываніе множителей можетъ быть совершаемо на любой ступени дѣйствія и напримѣръ, если угодно, въ самомъ началѣ. При помощи такихъ видоизмѣненій процесса нахожденія о. н. д. мы можемъ избѣгать введенія дробныхъ коэффиціентовъ. Слѣдующій примѣръ объяснитъ это учащемуся.

Требуется найти о. н. д. выраженій:

$$3x^5-10x^3+15x+8 \text{ и } x^5-2x^4-6x^3+4x^2+13x+6.$$

$$\begin{array}{l|l} 3x^5 \quad -10x^3 \quad +15x+8 & x^5-2x^4-6x^3+4x^2+13x+6 \\ \hline 3x^5-6x^4-18x^3+12x^2+39x+18 & 3 \\ \hline 6x^4+8x^3-12x^2-24x-10 & \end{array}$$

Прежде чѣмъ перейти къ слѣдующему дѣленію, мы можемъ отбросить множитель 2 въ каждомъ членѣ новаго дѣлителя, а каждый членъ новаго дѣлимаго помножить на 3. Затѣмъ будемъ продолжать дѣйствіе слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{l|l} 3x^5-6x^4-18x^3+12x^2+39x+18 & 3x^4+4x^3-6x^2-12x-5 \\ \hline 3x^5+4x^4-6x^3-12x^2-5x & x \\ \hline -10x^4-12x^3+24x^2+44x+18 & \end{array}$$

Отбросимъ множитель 2 въ каждомъ членѣ послѣдняго выраженія и затѣмъ умножимъ каждый членъ на 3. Тогда получимъ

$$-15x^4-18^3+36x^2+66x+27.$$

Будемъ продолжать дѣленіе.

$$\begin{array}{l|l} -15x^4-18x^3+36x^2+66x+27 & 3x^4+4x^3-6x^2-12x-5 \\ \underline{-15x^4-20x^3+30x^2+60x+25} & \underline{\quad -5} \\ 2x^3+6x^2+6x+2 & \end{array}$$

Удалимъ множитель 2 изъ остатка и будемъ продолжать дѣйствіе слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{l|l} 3x^4+4x^3-6x^2-12x-5 & x^3+3x^2+3x+1 \\ \underline{3x^4+9x^3+9x^2+3x} & \underline{\quad 3x-5} \\ -5x^3-15x^2-15x-5 & \\ \underline{-5x^3-15x^2-15x-5} & \end{array}$$

Итакъ, искомый общій наибольшій дѣлитель будетъ

$$x^3+3x^2+3x+1.$$

116. Положимъ, что первоначальныя выраженія A и B содержатъ общій множитель F, который видѣнъ съ перваго взгляда; пусть $A=aF$ и $B=bF$. Тогда F будетъ множителемъ о. н. д., какъ показано въ ст. 111. Поэтому мы можемъ найти о. н. д. для a и b и умножить его на F; это произведеніе и будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ A и B.

117. Подобнымъ-же образомъ, если на какой нибудь ступени дѣйствія мы замѣтимъ, что извѣстный множитель окажется общимъ дѣлимому и дѣлителю, то можемъ отбросить его и продолжать дѣйствіе надъ остальными множителями. На этотъ опущенный множитель нужно будетъ помножить послѣдній дѣлитель, который получится при продолженіи дѣйствія, и это произведеніе будетъ искомымъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ.

118. Положимъ напримѣръ, что мы ищемъ о. н. д. выраженій $(x-1)^2(x-2)(x-3)$ и $(x-1)^3(x-4)(x-5)$. Здѣсь множитель $(x-1)^2$ оказывается общимъ для обоихъ предложенныхъ выраженій, а слѣдовательно онъ и есть о. н. д. Сверхъ того въ этомъ примѣрѣ $(x-1)^2$ есть полный общій наибольшій дѣлитель, потому что нельзя найти никакого общаго дѣлителя кромѣ единицы для выраженій $(x-2)(x-3)$ и $(x-1)(x-4)(x-5)$, представляющихъ остальные множители данныхъ выраженій. Это можно доказать повѣркой, но когда учащійся освоится съ вопросомъ о разложеніи алгебраическихъ выраженій на множители, то для него это будетъ видно съ перваго взгляда. Разложеніе алгебраическихъ выраженій на множители излагается въ *Теоріи Уравненій*.

119. Положимъ теперь, что ищется общій наибольшій дѣлитель *трехъ* алгебраическихъ выраженій A, B, C.

Найдемъ общій наибольшій дѣлитель двухъ изъ нихъ, напр. A и

B. Пусть этотъ о. н. д. будетъ D; тогда общій наибольшій дѣлитель D и C будетъ искомымъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ A, B и C.

Дѣйствительно по ст. 111 всякій дѣлитель D и C дѣлитъ такъ-же A, B и C; точно также и каждый дѣлитель A, B и C дѣлитъ D и C. Такимъ образомъ о. н. д. D и C будетъ о. н. д. A, B и C.

120. Подобнымъ-же образомъ мы можемъ найти о. н. д. *четырехъ* алгебраическихъ выраженій. Для этого мы должны найти о. н. д. двухъ данныхъ выраженій и также о. н. д. другихъ двухъ выраженій; тогда о. н. д. двухъ найденныхъ такимъ образомъ выраженій будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ четырехъ данныхъ выраженій.

121. Опредѣленіе и дѣйствія, показанныя въ предыдущихъ статьяхъ этой главы, относятся къ *многочленнымъ* выраженіямъ. Значеніе термина *общій наибольшій дѣлитель*, въ случаѣ *простыхъ* выраженій можно видѣть изъ слѣдующаго примѣра:

Требуется найти общій наибольшій дѣлитель для $432a^4b^2xy$, $270a^2b^3x^2z$ и $90a^3bx^3$.

Найдемъ по правиламъ ариѳметики о. н. д. численныхъ коэффиціентовъ 432, 270 и 90; онъ будетъ 18. За этимъ численнымъ коэффиціентомъ мы напишемъ каждую изъ буквъ, общую всѣмъ одночленамъ, и каждой изъ буквъ дадимъ соотвѣтственно наименьшій показатель, съ какимъ она встрѣчается въ данныхъ выраженіяхъ. Такимъ образомъ мы получимъ $18a^2bx$, на которое дѣлятся всѣ данныя простыя выраженія; оно и будетъ представлять ихъ общій наибольшій дѣлитель.

Примѣры отысканія общаго наибольшаго дѣлителя.

Найти общій наибольшій дѣлитель въ слѣдующихъ примѣрахъ:

1. x^2-3x+2 и x^2-x-2.
2. $x^3+3x^2+4x+12$ и x^3+4x^2+4x+3.
3. x^3+x^2+x-3 и x^3+3x^2+5x+3.
4. x^3+1 и x^3+mx^2+mx+1.
5. $6x^3-7ax^2-20a^2x$ и $3x^2+ax-4a^2$.
6. x^5-y^5 и x^2-y^2.
7. $3x^3-13x^2+23x-21$ и $6x^3+x^2-44x+21$.
8. $x^4-3x^3+2x^2+x-1$ и x^3-x^2-2x+2.
9. $x^4-7x^3+8x^2+28x-48$ и $x^3-8x^2+19x-14$.
10. $x^4-x^3+2x^2+x+3$ и x^4+2x^3-x-2.
11. $4x^4+9x^3+2x^2-2x-4$ и $3x^3+5x^2-x+2$.
12. $2x^4-12x^3+19x^2-6x+9$ и $4x^3-18x^2+19x-3$.
13. $6x^4+x^3-x$ и $4x^3-6x^2-4x+3$.

14. $12x^2-15yx+3y^2$ и $6x^3-6yx^2+2y^2x-2y^3$.

15. $2x^5-11x^2-9$ и $4x^5+11x^4+81$.

16. $2a^4+3a^3x-9a^2x^2$ и $6a^4x-17a^3x^2+14a^2x^3-3ax^4$.

17. $2x^3+(2a-9)x^2-(9a+6)x+27$ и $2x^2-13x+18$.

18. $a^3x^3-a^2bx^2y+ab^2xy^2-b^3y^3$ и $2a^2bx^2y-ab^2xy^2-b^3y^3$.

19. $x^3+ax^2-axy-y^3$ и $x^4+2x^3y-a^2x^2+x^2y^2-2axy^2-y^4$.

20. $x^5+3x^4-8x^2-9x-3$ и $x^5-2x^4-6x^3+4x^2+13x+6$.

21. $6x^5-4x^4-11x^3-3x^2-3x-1$ и $4x^4+2x^3-18x^2+3x-5$.

22. $x^4-ax^3-a^2x^2-a^3x-2a^4$ и $3x^3-7ax^2+3a^2x-2a^3$.

23. $x^3-9x^2+26x-24$, $x^3-10x^2+31x-30$ и
$x^3-11x^2+38x-40$.

24. x^4-10x^2+9, $x^4+10x^3+20x^2-10x-21$ и
$x^4+4x^3-22x^2-4x+21$.

ГЛАВА VII.

Общее наименьшее кратное.

122. Въ ариѳметикѣ *общимъ наименьшимъ кратнымъ* двухъ или болѣе цѣлыхъ чиселъ называется наименьшее изъ чиселъ, въ которыхъ содержится безъ остатка каждое изъ данныхъ чиселъ. Этотъ-же терминъ употребляется и въ алгебрѣ, и значеніе его здѣсь выяснится изъ слѣдующаго опредѣленія *общаго наименьшаго кратнаго* двухъ или болѣе алгебраическихъ выраженій: пусть два или болѣе алгебраическихъ выраженія расположены по нисходящимъ степенямъ какой нибудь общей буквы; тогда выраженіе наименьшей степени относительно той-же буквы, дѣлящееся на каждое изъ данныхъ выраженій, будетъ ихъ общимъ наименьшимъ кратнымъ.

123. Для краткости, слова *общее наименьшее кратное* мы часто будемъ замѣнять начальными буквами о. н. к. Терминъ этотъ точно также не совсѣмъ свойственъ алгебраическимъ выраженіямъ по причинѣ, указанной уже въ ст. 106.

Всякое выраженіе, дѣлящееся на другое, можетъ быть названо кратнымъ этого послѣдняго.

124. Покажемъ теперь, какъ найти общее наименьшее кратное двухъ алгебраическихъ выраженій. Пусть A и B означаютъ два алгебраическія выраженія и пусть D будетъ ихъ общій наибольшій дѣлитель.

Положимъ, что $A=aD$ и $B=bD$ Тогда, по свойству общаго наибольшаго дѣлителя, a и b не имѣютъ никакого общаго множителя, а слѣдовательно ихъ наименьшее кратное есть ab. Отсюда слѣдуетъ, что выраженіе наименьшей степени, дѣлящееся на aD и bD, будетъ abD.

И $$abD=Ab=Ba=\frac{AB}{D}.$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующее правило для нахожденія наименьшаго кратнаго двухъ алгебраическихъ выраженій: Нужно найти ихъ общій наибольшій дѣлитель, раздѣлить на него одно изъ выраженій и частное помножить на другое выраженіе; или иначе: раздѣлить произведеніе этихъ выраженій на ихъ общій наибольшій дѣлитель.

125. Если M будетъ наименьшее кратное A и B, то очевидно, что всякое кратное M будетъ общимъ кратнымъ A и B.

126. *Всякое общее кратное двухъ алебраическихъ выраженій есть кратное ихъ общаго наименьшаго кратнаго.*

Пусть A и B означаютъ два выраженія и пусть M ихъ о. н. к.; пусть далѣе N означаетъ какое нибудь другое общее кратное. Положимъ, если возможно, что раздѣливъ N на M, мы получимъ остатокъ R; обозначимъ частное черезъ q. Итакъ $R=N-qM$. Но A и B заключаются безъ остатка въ M и N, а слѣдовательно (ст. 109) они дѣлятъ и R. Но степень R будетъ *ниже* степени M. Итакъ существуетъ нѣкоторое кратное выраженій A и B меньшей степени, чѣмъ ихъ наименьшее кратное. Но такое заключеніе нелѣпо, а потому не можетъ существовать никакого остатка R, то-есть N есть кратное M.

127. Теперь положимъ, что мы ищемъ общее наименьшее кратное для *трехъ* алгебраическихъ выраженій A, B, C. Найдемъ о. н к. двухъ изъ нихъ, напримѣръ A и B; пусть M означаетъ это о. н. к.; тогда о. н. к. для M и C будетъ искомымъ общимъ наименьшимъ кратнымъ A, B и C.

Дѣйствительно, всякое кратное M и C будетъ кратнымъ для A, B и C (ст. 125). И всякое кратное для A и B будетъ кратнымъ для M (ст. 126); такимъ образомъ всякое кратное A, B и C будетъ кратнымъ для M и C. Слѣдовательно о. н. к. выраженій M и C будетъ о. н. к. и выраженій A, B и C.

128. Разлагая алгебраическія выраженія на составляющіе ихъ множители, мы можемъ иногда облегчить дѣйствіе нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя и общаго наименьшаго кратнаго. Напримѣръ, пусть требуется найти наименьшее кратное для x^2-a^2 и x^3-a^3. Такъ какъ

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a) \text{ и } x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2),$$

то мы заключаемъ, что $x-a$ есть общій наибольшій дѣлитель этихъ двухъ выраженій; слѣдовательно наименьшее ихъ кратное будетъ $(x+a)(x^3-a^3)$, то-есть

$$x^4+ax^3-a^3x-a^4.$$

129. Предыдущія статьи этой главы относятся къ *многочленнымъ* выраженіямъ. Въ случаѣ простыхъ или одночленныхъ выраженій смыслъ термина *общее наименьшее кратное* выяснится изъ слѣдующаго примѣра.

Требуется найти наименьшее кратное выраженій

$$432a^4b^2xy,\ 270a^2b^3x^2z,\ 90a^3bx^3.$$

Найдемъ по правиламъ ариѳметики общее наименьшее кратное численныхъ коэффиціентовъ 432, 270 и 90; оно будетъ 2160. Рядомъ съ этимъ числомъ напишемъ каждую изъ буквъ, встрѣчающихся въ этихъ одночленахъ, и дадимъ каждой изъ нихъ *наибольшій* показатель, съ какимъ она входитъ въ одно изъ выраженій. Такимъ образомъ мы получимъ $2160a^4b^3x^3yz$, которое будетъ дѣлиться на всѣ данныя выраженія и будетъ называться ихъ общимъ наименьшимъ кратнымъ

130. Теорія общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго не представляются необходимыми для послѣдующихъ главъ этой книги, и нѣкоторыя затрудненія, какія встрѣтятся въ этой теоріи учащемуся, могутъ быть отложены до тѣхъ поръ, пока онъ не прочтетъ теорію уравненій. Однако-же примѣры, относящіеся къ предыдущей и настоящей главамъ должны быть старательно продѣланы, такъ какъ они представляютъ хорошее упражненіе во всѣхъ основныхъ алгебраическихъ дѣйствіяхъ.

Примѣры на нахожденіе наименьшаго кратнаго.

Найти общее наименьшее кратное въ слѣдующихъ примѣрахъ:

1. $6x^2-x-1$ и $2x^2+3x-2$.
2. x^3-1 и x^2+x-2.
3. $x^3-9x^2+23x-15$ и x^2-8x+7.
4. $3x^2-5x+2$ и $4x^3-4x^2-x+1$.
5. $(x+1)(x^2-1)$ и x^3-1.
6. $x^3+2x^2y-xy^2-2y^3$ и $x^3-2x^2y-xy^2+2y^3$.
7. $2x-1$, $4x^2-1$ и $4x^2+1$.
8. x^3-x, x^3-1 и x^3+1.
9. x^2-4a^2, $(x+2a)^3$ и $(x-2a)^3$.
10. $x^3-6x^2+11x-6$, $x^3-9x^2+26x-24$ и $x^3-8x^2+19x-12$.
11. $x^3-9x^2+26x-24$, $x^3-10x^2+31x-30$ и $x^3-11x^2+38x-40$.
12. x^4-10x^2+9, $x^4+10x^3+20x^2-10x-21$ и $x^4+4x^3-22x^2-4x+21$.

13. x^2-4a^2, $x^3+2ax^2+4a^2x+8a^3$ и $x^3-2ax^2+4a^2x-8a^3$.

14. $x^2-(a+b)x+ab$, $x^2-(b+c)x+bc$ и $x^2-(c+a)x+ca$.

15. $2x^3+(2a-3b)x^2-(2b^2+3ab)x+3b^3$ и $2x^2-(3b-2c)x-3bc$

16. $6(a^3-b^3)(a-b)^3$, $9(a^4-b^4)(a-b)^2$ и $12(a^2-b^2)^3$.

ГЛАВА VIII.

Дроби.

131. Въ этой главѣ мы намѣрены обратить вниманіе учащагося на нѣкоторыя предложенія относительно дробей, извѣстныя ему уже изъ Ариѳметики, и затѣмъ показать, что предложенія эти въ ихъ общемъ видѣ остаются справедливыми и въ Алгебрѣ. Въ нижеслѣдующихъ статьяхъ, буквы представляютъ вообще цѣлыя числа, если не оговорено противнаго.

132. Выраженіемъ $\frac{a}{b}$ мы показываемъ, что единица раздѣлена на b равныхъ частей и что такихъ частей взято a. Выраженіе это называется *дробью*, причемъ a называется ея *числителемъ*, а b *знаменателемъ*, такъ что знаменатель показываетъ, на сколько равныхъ частей нужно раздѣлить единицу, а числитель показываетъ, сколько такихъ частей нужно взять.

Всякое цѣлое число можно разсматривать какъ дробь съ знаменателемъ единица, то-есть $p=\frac{p}{1}$.

133. Правило для умноженія дроби на цѣлое число состоитъ въ томъ, что нужно или *умножить на это цѣлое число числитель*, или *раздѣлить на это число знаменатель*.

Пусть $\frac{a}{b}$ означаетъ нѣкоторую дробь и c—нѣкоторое цѣлое число; тогда $\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}$. Дѣйствительно, въ каждой изъ дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{ac}{b}$ единица раздѣлена на b равныхъ частей, но въ дроби $\frac{ac}{b}$ ихъ въ c разъ больше, чѣмъ въ дроби $\frac{a}{b}$.

Это доказываетъ первый способъ умноженія.

Теперь, пусть $\frac{a}{bc}$ означаетъ какую-нибудь дробь, а c—какое-нибудь цѣлое число; тогда будетъ $\frac{a}{bc} \times c = \frac{a}{b}$. Дѣйствительно, въ каждой изъ дробей $\frac{a}{bc}$ и $\frac{a}{b}$ взято одно и тоже число частей, но каждая часть въ дроби $\frac{a}{b}$ въ c разъ больше каждой части въ дроби $\frac{a}{bc}$, потому что въ дроби $\frac{a}{bc}$ единица раздѣлена на число частей въ c разъ большее того, на которое раздѣлена она въ дроби $\frac{a}{b}$; поэтому дробь $\frac{a}{b}$ въ c разъ больше дроби $\frac{a}{bc}$.

Это доказываетъ второй способъ умноженія дроби на цѣлое число.

134. Правило для дѣленія дроби на цѣлое число состоитъ въ томъ, что нужно или *умножить знаменателя на это цѣлое число*, или *раздѣлить числителя на это цѣлое число.*

Пусть $\frac{a}{b}$ означаетъ какую-нибудь дробь и c—какое-нибудь цѣлое число; тогда мы будемъ имѣть $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$. Дѣйствительно, по ст. 133, $\frac{a}{b}$ въ c разъ больше $\frac{a}{bc}$, а слѣдовательно $\frac{a}{bc}$ есть $\frac{1}{c}$ часть дроби $\frac{a}{b}$.

Это доказываетъ первый способъ дѣленія.

Теперь, пусть $\frac{ac}{b}$ означаетъ какую-нибудь дробь, а c какое-нибудь цѣлое число; тогда $\frac{ac}{b} : c = \frac{a}{b}$. Дѣйствительно, по ст. 133, $\frac{ac}{b}$ въ c разъ больше $\frac{a}{b}$, а слѣдовательно $\frac{a}{b}$ есть $\frac{1}{c}$ часть дроби $\frac{ac}{b}$.

Это доказываетъ второй способъ дѣленія дроби на цѣлое число.

135. Если какое-нибудь количество будетъ умножено и раздѣлено на одно и то-же число, то величина его не измѣнится. Поэтому, если числитель и знаменатель дроби *помножимъ* на одно и то-же число, то величина дроби не измѣнится. Дѣйствительно, умножая числителя дроби, мы *умножаемъ* самую дробь на данное число, а умножая ея знаменателя, мы дѣлимъ дробь на то-же самое число. (Ст. 133 и 134).

Такимъ образомъ $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$. Точно также, если числитель и знаменатель дроби *раздѣлить* на одно и то-же число, величина дроби не измѣнится.

136. Слѣдовательно алгебраическую дробь можно приводить къ другой равной ей дроби посредствомъ дѣленія ея числителя и знаменателя на общаго имъ дѣлителя. Когда числитель и знаменатель будутъ раздѣлены на ихъ общій наибольшій дѣлитель, то дробь приведется къ ея простѣйшему виду и будетъ *несократимой*. Напримѣръ, разсмотримъ дробь $\frac{6x^2-7x-20}{4x^3-27x+5}$. Здѣсь общій наибольшій дѣлитель числителя и знаменателя будетъ $2x-5$; раздѣливъ на него числителя и знаменателя, мы найдемъ, что

$$\frac{6x^2-7x-20}{4x^3-27x+5}=\frac{3x+4}{2x^2+5x-1}.$$

137. Такъ какъ $\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b}$ (Ст. 94), то очевидно, что мы можемъ измѣнять знаки числителя и знаменателя дроби, не измѣняя этимъ величины дроби.

138. Чтобы привести дроби къ одному знаменателю, нужно *помножить числитель каждой дроби на всѣ знаменатели, кромѣ своего, и перемножить между собою всѣхъ знаменателей; первыя произведенія дадутъ соотвѣтственные числители дробей, послѣднее—ихъ общій знаменатель.*

Такъ, положимъ, что данныя дроби будутъ $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ и $\frac{e}{f}$; тогда, по ст. 135, $\frac{a}{b}=\frac{adf}{bdf}$, $\frac{c}{d}=\frac{cbf}{bdf}$, $\frac{e}{f}=\frac{ebd}{bdf}$; такимъ образомъ дроби $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{cbf}{bdf}$ и $\frac{ebd}{bdf}$ будутъ соотвѣтственно имѣть ту-же величину, какъ и данныя, но знаменатель у нихъ будетъ одинаковый bdf.

139. Если знаменатели имѣютъ какихъ-нибудь общихъ множителей, то мы можемъ поступать слѣдующимъ образомъ: *Найдемъ наименьшее кратное знаменателей—это будетъ общій знаменатель; чтобы получить новый числитель, соотвѣтствующій каждой изъ дробей, умножимъ числитель этой дроби на частное отъ дѣленія наименьшаго кратнаго на знаменатель этой дроби.*

Положимъ напримѣръ, что данныя дроби будутъ $\frac{a}{mx}$, $\frac{b}{my}$, $\frac{c}{mz}$. Здѣсь общее наименьшее кратное знаменателей будетъ $mxyz$; и $\frac{a}{mx}=\frac{ayz}{mxyz}$, $\frac{b}{my}=\frac{bxz}{mxyz}$, $\frac{c}{mz}=\frac{cxy}{mxyz}$.

140. Чтобы сложить двѣ дроби или вычесть одну изъ другой, *нужно привести ихъ къ общему знаменателю и тогда сложить или вычесть ихъ числители, удержавъ общаго знаменателя.*

Напримѣръ $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$; это непосредственно слѣдуетъ изъ понятія о дроби.

Такъ-же $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd}=\frac{ad+cb}{bd}$;

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}=\frac{a-b}{a^2-b^2}+\frac{a+b}{a^2-b^2}=\frac{2a}{a^2-b^2};$$

$$a+\frac{b}{c}=\frac{a}{1}+\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c};$$

$$2+\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}=\frac{2(a^2-b^2)}{a^2-b^2}+\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}+\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{2a^2-2b^2+a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}=\frac{4a^2}{a^2-b^2};$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b};$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c+d}{c-d}=\frac{a(c-d)}{b(c-d)}-\frac{b(c+d)}{b(c-d)}=\frac{ac-ad-(bc+bd)}{b(c-d)}$$

$$=\frac{ac-ad-bc-bd}{b(c-d)};$$

$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}-\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{a^2-b^2}=\frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

141. Правило для умноженія двухъ дробей состоитъ въ томъ, что *для полученія новаго числителя надо перемножить числителей, и для полученія новаго знаменателя перемножить знаменателей данныхъ дробей.*

Это доказывается обыкновенно слѣдующимъ образомъ: Пусть $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ будутъ двѣ дроби, которыя нужно перемножить между собою; положимъ, что $\frac{a}{b}=x$ и $\frac{c}{d}=y$; тогда

$$a=bx,\ c=dy,$$

а потому $$ac=bdxy;$$

раздѣлимъ обѣ части равенства на bd; тогда найдемъ, что

$$\frac{ac}{bd}=xy=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}.$$

Этотъ способъ удовлетворителенъ, когда x и y *на самомъ дѣлѣ* будутъ цѣлыя числа, хотя и представляются въ дробномъ видѣ, потому что здѣсь мы понимаемъ слово *умноженіе* въ обыкновенномъ смыслѣ. Онъ будетъ также удовлетворителенъ, когда одно изъ двухъ чиселъ x и y будетъ цѣлымъ, потому что мы можемъ свести это къ умноженію дроби на цѣлое число, какъ въ ст. 133. Но когда x и y оба—дробныя, то мы не можемъ показать умноженія ихъ другъ на друга, не опредѣливъ, что́ мы понимаемъ въ этомъ случаѣ подъ словомъ *умноженіе*, потому что по обыкновенному понятію объ умноженіи множитель долженъ быть цѣлымъ числомъ.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ-называемое правило умноженія дробей есть въ сущности *опредѣленіе* того, что мы условно понимаемъ подъ умноженіемъ дробей. И это опредѣленіе такъ выбрано, что когда одна изъ двухъ дробей, которыя мы желаемъ перемножить, есть цѣлое число, представленное въ дробной формѣ, или обѣ онѣ—цѣлыя числа, то результатъ опредѣленія совпадаетъ со слѣдствіями, вытекающими изъ обычнаго пониманія слова *умноженіе*.

142. Слѣдующее опредѣленіе словами можетъ болѣе ясно указать на связь между смысломъ слова умноженіе, когда оно прилагается къ цѣлымъ числамъ, и смысломъ его въ приложеніи къ дробямъ. Когда мы умножаемъ одно цѣлое число a на другое b, то это дѣйствіе мы можемъ опредѣлить такимъ образомъ: *какъ мы поступили съ единицей для полученія числа* b, *такъ-же мы должны поступить и съ* a, *чтобы получить* b *разъ* a. Но b получено изъ единицы повтореніемъ этой единицы b разъ, поэтому и число a нужно повторить b разъ, чтобъ получить b разъ a. Теперь пусть требуется умножить дробь $\frac{a}{b}$ на $\frac{c}{d}$; допуская предыдущее опредѣленіе, мы можемъ сказать: *Какъ мы поступили съ единицей для полученія* $\frac{c}{d}$, *такъ-же должны поступить съ* $\frac{a}{b}$, *чтобы получить* $\frac{c}{d}$ *разъ* $\frac{a}{b}$. Для полученія $\frac{c}{d}$ изъ единицы, единица была раздѣлена на d равныхъ частей и взято было c такихъ частей; поэтому, чтобъ получить $\frac{c}{d}$ разъ $\frac{a}{b}$, нужно дробь $\frac{a}{b}$ раздѣлить на d равныхъ частей, и такихъ частей взять c. Но по ст. 134,

если $\frac{a}{b}$ раздѣлить на d равныхъ частей, то каждая изъ нихъ будетъ $\frac{a}{bd}$, и если взять c такихъ частей, то результатъ будетъ $\frac{ac}{bd}$.

Такимъ образомъ можно дать слѣдующее опредѣленіе умноженія: Чтобы получить произведеніе множителя и множимаго, мы должны поступить съ множимымъ точно такъ-же, какъ было поступлено съ единицей для полученія множителя.

143. Чтобы умножить *три* или болѣе дробей между собою, *нужно перемножить всѣ ихъ числители—это будетъ новый числитель, и всѣ ихъ знаменатели—это будетъ новый знаменатель.*

144. Положимъ, что намъ нужно *раздѣлить* $\frac{a}{b}$ на $\frac{c}{d}$. Здѣсь по свойству дѣленія мы должны отыскать такое количество, которое по умноженіи на $\frac{c}{d}$ давало бы $\frac{a}{b}$. Таковъ *смыслъ* слова дѣленіе въ приложеніи къ цѣлымъ числамъ, и тотъ-же смыслъ мы должны придавать ему, прилагая его къ дробямъ, такъ какъ другого опредѣленія не было дано до сихъ поръ.

Пусть $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = x$; тогда $\frac{a}{b} = x \times \frac{c}{d} = \frac{xc}{d}$; отсюда $\frac{ad}{b} = xc$ и $x = \frac{ad}{bc}$.

Такимъ образомъ мы получили правило дѣленія одной дроби на другую: *нужно обратить дѣлитель и поступать какъ при умноженіи.*

145. До сихъ поръ мы предполагали въ настоящей главѣ, что буквы представляютъ собою *цѣлыя числа*, и такимъ образомъ лишь повторили тѣ правила и доказательства, какія извѣстны учащемуся изъ Ариѳметики. Но, благодаря нашимъ обобщеннымъ опредѣленіямъ, мы можемъ доказать, что всѣ данныя правила и формулы остаются справедливыми и тогда, когда буквы означаютъ собою какія нибудь *цѣлыя или дробныя* числа. Возьмемъ, напримѣръ, формулу $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, и положимъ, что мы желаемъ показать ея справедливость, когда

$$a = \frac{m}{n},\ b = \frac{p}{q} \text{ и } c = \frac{r}{s}.$$

Здѣсь $\frac{a}{b} = \frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \times \frac{q}{p} = \frac{mq}{np}$;

также $ac = \frac{mr}{ns}$ и $bc = \frac{pr}{qs}$;

итакъ $\frac{ac}{bc} = \frac{mr}{ns} : \frac{pr}{qs} = \frac{mr}{ns} \times \frac{qs}{pr} = \frac{mrqs}{nspr} = \frac{mq}{np}$.

Такимъ образомъ, мы доказали, что формула справедлива.

Сверхъ того эти формулы и правила остаются справедливыми и тогда, когда буквы означаютъ *количества отрицательныя*, въ силу замѣчаній, сдѣланныхъ выше въ главѣ V.

146. Посредствомъ предыдущихъ правилъ и формулъ мы можемъ упрощать такія алгебраическія дроби, въ которыхъ числители и знаменатели сами представляютъ дробныя выраженія. Напримѣръ

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a}}=\frac{\frac{a(a+b)+b^2}{b(a+b)}}{\frac{a^2-b(a-b)}{a(a-b)}}=\frac{a^2+ab+b^2}{b(a+b)}\times\frac{a(a-b)}{a^2-ab+b^2}=\frac{a(a^3-b^3)}{b(a^3+b^3)}.$$

147. Не лишне будетъ предостеречь начинающаго, что при упрощеніи дробныхъ выраженій онъ долженъ, во избѣжаніе ненужнаго труда, останавливаться на простѣйшихъ видахъ ихъ, какіе можно допустить. Напримѣръ, положимъ, что намъ нужно привести слѣдующее выраженіе къ одной дроби

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}.$$

Мы могли-бы принять за общій знаменатель произведеніе всѣхъ знаменателей и преобразовать соотвѣтственно каждую изъ трехъ дробей, но небольшое размышленіе покажетъ намъ, что здѣсь существуетъ болѣе простой знаменатель, который мы можемъ представить въ слѣдующемъ симметрическомъ видѣ.

$$(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c).$$

Поэтому предыдущія выраженія мы можемъ написать такимъ образомъ:

$$-\frac{a}{(a-b)(c-a)(x-a)}-\frac{b}{(a-b)(b-c)(x-b)}-\frac{c}{(c-a)(b-c)(x-c)};$$

тогда посредствомъ приведенія къ одному знаменателю мы найдемъ

$$-\frac{a(b-c)(x-b)(x-c)+b(c-a)(x-a)(x-c)+c(a-b)(x-a)(x-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$$

Произведя перемноженіе въ числителѣ, мы найдемъ, что онъ приведется къ

$$x\{a(c^2-b^2)+b(a^2-c^2)+c(b^2-a^2)\}$$

и мы найдемъ точно также, что

$$-\{a(c^2-b^2)+b(a^2-c^2)+c(b^2-a^2)\}=(a-b)(b-c)(c-a).$$

Такимъ образомъ предложенное выраженіе обратится въ

$$\frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

Въ видѣ другого примѣра можно показать, что

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x-a)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)(x-b)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)(x-c)} = \frac{x^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

Примѣры дробей.

Упростить слѣдующія дроби:

1. $\frac{x^2+2x-3}{x^2+6x-7}$.
2. $\frac{x^2-3x-4}{x^2-4x-5}$.
3. $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.
4. $\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{a^2+2ab+b^2}$.
5. $\frac{x^4+10x^3+35x^2+50x+24}{x^3+9x^2+26x+24}$.
6. $\frac{3x^3-16x^2+23x-6}{2x^3-11x^2+17x-6}$.
7. $\frac{6x^3-5x^2+4}{2x^3-x^2-x+2}$.
8. $\frac{2x^3+9x^2+7x-3}{3x^3+5x^2-15x+4}$.
9. $\frac{3x^2+12x+9}{x^5+5x^3+6}$.
10. $\frac{x^3-6x^2-37x+210}{x^3+4x^2-47x-210}$.
11. $\frac{x^4+2x^2+9}{x^4-4x^3+4x^2-9}$.
12. $\frac{x^3+2x^2+2x}{x^5+4x}$.
13. $\frac{x^4-x^3-x+1}{x^4-2x^3-x^2-2x+1}$.
14. $\frac{a^5-a^4b-ab^4+b^5}{a^4-a^3b-a^2b^2+ab^3}$.
15. $\frac{bx+2}{2b+(b^2-4)x-2bx^2}$.
16. $\frac{(x+y)^7-x^7-y^7}{(x+y)^5-x^5-y^5}$.

Произвести сложеніе и вычитаніе, указанное въ слѣдующихъ примѣрахъ отъ 17 до 37.

17. $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}$.
18. $\frac{a}{2a-2b} + \frac{b}{2b-2a}$.
19. $\frac{2}{x} - \frac{3}{2x-1} - \frac{2x-3}{4x^2-1}$.
20. $\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)(a+b) - \left(\frac{a+b}{m} - \frac{a-b}{n}\right)$.
21. $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}$.

22. $\dfrac{5}{2(x+1)} - \dfrac{1}{10(x-1)} - \dfrac{24}{5(2x+3)}$.

23. $\dfrac{b-a}{x-b} - \dfrac{a-2b}{x+b} + \dfrac{3x(a-b)}{x^2-b^2}$.

24. $\dfrac{3+2x}{2-x} - \dfrac{2-3x}{2+x} + \dfrac{16x-x^2}{x^2-4}$.

25. $\dfrac{3}{1-2x} - \dfrac{7}{1+2x} - \dfrac{4-20x}{4x^2-1}$.

26. $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{b}{a^2-b^2} - \dfrac{a}{a^2+b^2}$.

27. $\dfrac{1}{x^2-y^2} + \dfrac{1}{(x+y)^2} - \dfrac{1}{(x-y)^2}$.

28. $\dfrac{(a^2+b^2)^2}{ab(a-b)^2} - \dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a} - 2$.

29. $\dfrac{a}{a-x} + \dfrac{3a}{a+x} - \dfrac{2ax}{a^2-x^2}$.

30. $\dfrac{3a-4b}{7} - \dfrac{2a-b-c}{3} + \dfrac{15a-4c}{12} - \dfrac{a-4b}{21}$.

31. $\dfrac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \dfrac{b+c}{(c-a)(a-b)} + \dfrac{c+a}{(a-b)(b-c)}$.

32. $\dfrac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)} + \dfrac{b^2-ca}{(b+c)(b+a)} + \dfrac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}$.

33. $\dfrac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2+ca}{(b+c)(b-a)} + \dfrac{c^2+ab}{(c-a)(c+b)}$.

34. $\dfrac{bc}{(c-a)(a-b)} + \dfrac{ca}{(a-b)(b-c)} + \dfrac{ab}{(b-c)(c-a)}$.

35. $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)} + \dfrac{1}{b(b-c)(b-a)} + \dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$.

36. $\dfrac{a-b}{a+b} + \dfrac{b-c}{b+c} + \dfrac{c-a}{c+a} + \dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

37. $\dfrac{2}{a-b} + \dfrac{2}{b-c} + \dfrac{2}{c-a} + \dfrac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

38. **Умножить** $\dfrac{(a-b)^2}{b+a}$ **на** $\dfrac{b}{x(a-b)}$.

39. **Умножить** $\dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}$ **на** $\dfrac{x^3-y^3}{xy(x+y)}$.

40. Перемножить $\frac{3ax}{4by}$, $\frac{a^2-x^2}{c^2-x^2}$, $\frac{bc+bx}{a^2+ax}$ и $\frac{c-x}{a-x}$.

41. Доказать, что

$$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2=4+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).$$

42. Перемножить $\frac{1-x^2}{1+y}$, $\frac{1-y^2}{x+x^2}$ и $1+\frac{x}{1-x}$.

43. Умножить $\frac{x(a-x)}{a^2+2ax+x^2}$ на $\frac{a(a+x)}{a^2-2ax+x^2}$.

44. Упростить $\frac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2}\times\frac{a-b}{a^2+ab}$.

45. Упростить $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}-\frac{4y^2}{x^2-y^2}\right)\frac{x+y}{2y}$.

46. Упростить $\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\cdot\frac{a+b}{a-b}\cdot\left(\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\right)^2$.

47. Умножить $\frac{x^2}{a^2}-\frac{x}{a}+1$ на $\frac{x^2}{a^2}+\frac{x}{a}+1$.

48. Умножить x^2-x+1 на $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1$.

49. Упростить $\frac{x^2+x(a+b)+ab}{x^2-x(a+b)+ab}\times\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}$.

50. Раздѣлить $\frac{ax-x^2}{(a+x)^2}$ на $\frac{x^2}{a^2-x^2}$.

51. Раздѣлить $\frac{4(a^2-ab)}{b(a+b)^2}$ на $\frac{6ab}{a^2-b^2}$.

52. Раздѣлить $\frac{2y^2}{x^3+y^3}$ на $\frac{y}{y+x}$.

53. Раздѣлить $\frac{2x+y}{x+y}+\frac{2y-x}{x-y}-\frac{x^2}{x^2-y^2}$ на $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

54. Упростить $\left(\frac{x^2}{y^3}+\frac{1}{x}\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)$.

55. Упростить $\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right):\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)$.

56. Упростить $\left(\frac{x+2y}{x+y}+\frac{x}{y}\right):\left(\frac{x+2y}{y}-\frac{x}{x+y}\right)$.

57. Раздѣлить $x^4-\frac{1}{x^4}$ на $x+\frac{1}{x}$.

58. Раздѣлить $x^2+\frac{1}{x^2}+2$ на $x+\frac{1}{x}$.

59. Раздѣлить $x^2+1+\frac{1}{x^2}$ на $\frac{1}{x}-1+x$.

60. Раздѣлить $a^2-b^2-c^2+2bc$ на $\frac{a+b-c}{a+b+c}$.

61. Раздѣлить $\frac{a^3+3a^2x+3ax^2+x^3}{x^3-y^3}$ на $\frac{(a+x)^2}{x^2+xy+y^2}$.

62. Раздѣлить $a^2-b^2-c^2-2bc$ на $\frac{a+b+c}{a+b-c}$.

63. Раздѣлить $x^2-3ax-2a^2+\frac{12a^3}{x+3a}$ на $3x-6a-\frac{2x^2}{x+3a}$.

64. Раздѣлить $\frac{x^2}{2a^2}-4+\frac{6a^2}{x^2}$ на $\frac{x}{2a}-\frac{3a}{x}$.

65. Упростить $\dfrac{\frac{a+b}{c+d}+\frac{a-b}{c-d}}{\frac{a+b}{c-d}+\frac{a-b}{c+d}}$.

66. Упростить $\dfrac{\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}}{\frac{a+x}{a-x}-\frac{a-x}{a+x}}$

67. Упростить $\dfrac{3abc}{bc+ca-ab}-\dfrac{\frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{b}+\frac{c-1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}$.

68. Упростить $\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right) : \left(\frac{a-b}{a+b}-\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\right)$.

69. Упростить $\left(\frac{c-b}{c+b}-\frac{c^3-b^3}{c^3+b^3}\right) : \left(\frac{c+b}{c-b}+\frac{c^2+b^2}{c^2-b^2}\right)$.

70. Упростить $\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) : \left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)$.

71. Упростить $\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right) : \left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)$.

72. Упростить $\dfrac{\frac{m^2+n^2}{n}-m}{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}} \times \frac{m^2-n^2}{m^3+n^3}$.

73. Упростить $$\frac{x}{x-a}-\frac{x}{x+a}-\frac{\frac{x+a}{x-a}-\frac{x-a}{x+a}}{\frac{x+a}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}}.$$

74. Упростить $$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\left\{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right\}$$

75. Упростить $$\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{1+\cfrac{x+1}{3-x}}}.$$

76. Упростить $$\cfrac{a}{b+\cfrac{c}{d+\cfrac{e}{f}}}.$$

ГЛАВА IX.

Уравненія первой степени.

148. Всякая совокупность алгебраическихъ символовъ называется *выраженіемъ*. Когда два выраженія соединены между собою посредствомъ знака равенства, то происшедшее отъ того новое выраженіе называется вообще *уравненіемъ*. Соединенныя такимъ образомъ выраженія получаютъ названіе *частей* уравненія, причемъ выраженіе, стоящее по лѣвую сторону знака равенства, называется *первою* частью, а стоящее по правую сторону—*второю* частью уравненія.

149. Уравненіе называется *тожественнымъ* или просто *тожествомъ*, когда обѣ части его остаются равными, какія-бы числа мы не подставили вмѣсто буквъ; напримѣръ

$$(x+b)(x-b)=x^2-b^2.$$

представляетъ собою *тожественное уравненіе*, или *тожество*.

До сихъ поръ учащійся занимался исключительно почти тожествами. Такъ выводы, данные въ статьяхъ 55 и 68, представляютъ выраженія тожественно равныя, какъ равнымъ образомъ и тѣ, какія получатся, если мы рѣшимъ примѣры главъ III и IV.

150. *Уравненіе* называется *условнымъ*, если оно справедливо не для всякихъ значеній буквъ, но лишь для извѣстнаго числа значеній; напримѣръ

$$x+1=7$$

не можетъ быть справедливымъ ни для какого значенія x кромѣ $x=6$. Условныя уравненія называются просто *уравненіями*.

151. Та буква, которой должно дать одно или нѣсколько частныхъ значеній, чтобы содержащееся въ уравненіи условіе было справедливо, называется *неизвѣстною величиною*. Говорятъ, что такое частное значеніе *удовлетворяетъ* уравненію и называютъ его *корнемъ уравненія*. Рѣшить уравненіе значитъ найти одно или нѣсколько такихъ частныхъ величинъ.

152. Если уравненіе заключаетъ въ себѣ одну неизвѣстную величину, то говорятъ, что оно такой степени, какую выражаетъ показатель наивысшей степени этой неизвѣстной. Такъ, если обозначимъ неизвѣстную величину чрезъ x, то уравненіе будетъ *первой* степени, когда x входитъ только въ *первой* степени; такое уравненіе называютъ также простымъ уравненіемъ. Если въ уравненіе входитъ x^2 и нѣтъ степени x выше чѣмъ x^2, то оно называется уравненіемъ *второй степени* или *квадратнымъ уравненіемъ*. Если въ уравненіе входитъ x^3 и нѣтъ въ немъ степени x выше, чѣмъ x^3, то оно называется *уравненіемъ третьей степени* или *кубическимъ уравненіемъ*. И такъ далѣе.

Нужно замѣтить, что эти опредѣленія предполагаютъ, что обѣ части уравненія суть *цѣлыя выраженія по отношенію къ* x и не содержатъ x подъ *знакомъ корня*.

153. Покажемъ теперь нѣкоторыя дѣйствія, какія можно производить надъ уравненіемъ, не нарушая выражаемаго имъ равенства. Мы увидимъ впослѣдствіи, что эти дѣйствія окажутся для насъ полезными, когда намъ придется рѣшать уравненія.

154. *Если каждый членъ въ обѣихъ частяхъ уравненія помножить или раздѣлить на одно и то-же количество, то равенство обѣихъ частей не нарушится.* Это слѣдуетъ изъ ст. 100 и 101.

155. Главнѣйшее примѣненіе предыдущей статьи состоитъ *въ освобожденіи уравненія отъ дробей*; послѣднее совершается посредствомъ умноженія каждаго члена на произведеніе всѣхъ знаменателей дробей, или, если угодно, посредствомъ умноженія на *общее наименьшее кратное* этихъ знаменателей. Положимъ, что мы имѣемъ, напримѣръ, уравненіе

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=13.$$

Помножимъ каждый членъ его на $2\times3\times4$; тогда получимъ

$$3\times4\times x+2\times4\times x+2\times3\times x=13\times2\times3\times4;\text{ то-есть}$$

$$12x+8x+6x=312.$$

Раздѣлимъ каждый членъ на 2; тогда получимъ

$$6x+4x+3x=156.$$

Вмѣсто того, чтобы умножать каждый членъ на $2\times3\times4$, мы могли-бы умножить на 12, которое представляетъ наименьшее кратное 2, 3 и 4. Тогда мы сразу получили-бы

$$6x+4x+3x=156.$$

156. *Всякое количество можно переносить изъ одной части уравненія въ другую, измѣнивъ у этого количества знакъ.*

Такъ, пусть будетъ уравненіе

$$x-a=b-y.$$

Приложимъ къ обѣимъ частямъ по a (ст. 98); тогда

$$x-a+a=b-y+a$$

то-есть

$$x=b+a-y.$$

Теперь вычтемъ изъ обѣихъ частей по b; тогда

$$x-b=b+a-y-b=a-y.$$

Мы видимъ здѣсь, что $-a$ изчезло изъ одной части уравненія, а въ другой части появилось $+a$; и $+b$ исчезло изъ одной части уравненія и появилось въ другой въ видѣ $-b$.

157. *Если знакъ у каждаго члена уравненія будетъ измѣненъ на обратный, то равенство не нарушится.*

Это слѣдуетъ изъ предыдущей статьи, если переставить всѣ члены изъ одной части уравненія въ другую. Такъ положимъ, что

$$x-a=b-y.$$

Переставляя члены, получимъ

$$y-b=a-x,$$

то-есть

$$a-x=y-b;$$

тотъ-же результатъ мы получили-бы, если-бы измѣнили знакъ у каждаго члена въ первоначальномъ уравненіи.

158. Теперь мы можемъ дать правило для рѣшенія простого уравненія съ одною неизвѣстною величиною.

Во-первыхъ нужно освободить уравненіе отъ дробей; потомъ перенести всѣ члены, заключающіе въ себѣ неизвѣстныя величины, въ одну часть уравненія, а всѣ извѣстныя величины—въ другую; наконецъ раздѣлить обѣ части на коэффиціентъ или на сумму коэффиціентовъ неизвѣстной величины, тогда и получится искомое значеніе неизвѣстной.

Справедливость этого правила очевидно вытекаетъ изъ началъ, выраженныхъ въ предыдущихъ статьяхъ, и мы приложимъ теперь его къ нѣсколькимъ примѣрамъ. Въ этихъ примѣрахъ *неизвѣстная величина* будетъ обозначаться буквой x, а если въ нихъ будутъ встрѣ-

чаться другія буквы, то мы будемъ предполагать, что онѣ представляютъ *извѣстныя* величины.

159. Рѣшить уравненіе

$$3x-4=24-x.$$

Перенесемъ члены

$$3x+x=24+4;$$

то-есть

$$4x=28;$$

раздѣливъ, находимъ

$$x=\frac{28}{4}=7.$$

Мы можемъ *повѣрить* результатъ, подставляя 7 вмѣсто x въ первоначальное уравненіе. Первая часть тогда будетъ $3\times7-4$, то-есть $21-4$, то-есть 17; вторая часть будетъ $24-7$, то-есть 17.

160. Рѣшить уравненіе $\frac{5x}{2}-\frac{4x}{3}-13=\frac{5}{8}+\frac{x}{32}$.

Умножимъ на 96, т. е. на наименьшее кратное знаменателей; тогда

$$5\times48\times x-4\times32\times x-13\times96=5\times12+3x$$

то-есть

$$240x-128x-1248=60+3x;$$

перенесемъ члены

$$240x-128x-3x=1248+60;$$

итакъ

$$109x=1308;$$

раздѣливъ, найдемъ

$$x=\frac{1308}{109}=12.$$

Мы можемъ повѣрить результатъ, подставивъ 12 вмѣсто x въ первоначальное уравненіе; тогда найдемъ, что каждая часть уравненія будетъ равна 1.

161. Иногда бываетъ удобно уничтожать дроби *по частямъ*, послѣ чего можно дѣлать нѣкоторыя упрощенія, прежде чѣмъ перейти къ освобожденію уравненія отъ остальныхъ дробныхъ коэффиціентовъ. Напримѣръ, рѣшимъ уравненіе

$$\frac{x+7}{11}-\frac{2x-16}{3}+\frac{2x+5}{4}=5\frac{1}{3}+\frac{3x+7}{12}.$$

Здѣсь намъ удобно помножить на 12; тогда

$$\frac{12(x+7)}{11}-4(2x-16)+3(2x+5)=16\times4+3x+7,$$

то-есть

$$\frac{12(x+7)}{11}-8x+64+6x+15=64+3x+7.$$

Перенеся члены и сдѣлавъ приведеніе, найдемъ

$$\frac{12(x+7)}{11}+8=5x.$$

Умноживъ теперь на 11, получимъ

$$12x+84+88=55x;$$

по перенесеніи членовъ

$$172=43x;$$

раздѣливъ, найдемъ

$$x=\frac{172}{43}=4.$$

Этотъ результатъ мы можемъ повѣрить, какъ и раньше.

Учащійся долженъ обратить особенное вниманіе на одно обстоятельство, встрѣтившееся въ этомъ примѣрѣ. Дробь $\frac{2x-16}{3}$ все равно что $\frac{1}{3}(2x-16)$. Предъ этой дробью стоитъ знакъ —; и когда мы умножимъ ее на 12, раскрывъ скобки, то получимъ $-8x+64$. Такимъ образомъ, при освобожденіи отъ дробей, мы должны поступать со знаками членовъ, стоящихъ въ какомъ-нибудь числителѣ, такъ-же, какъ еслибы они стояли въ скобкахъ.

162. Рѣшить уравненіе $\frac{5}{2x+1}=\frac{2}{5x-8}$.

Умножимъ на $(2x+1)(5x-8)$; тогда

$$5(5x-8)=2(2x+1),$$

то-есть

$$25x-40=4x+2;$$

переставимъ члены,

$$21x=42;$$

раздѣливъ, получимъ

$$x=\frac{42}{21}=2.$$

Этотъ результатъ мы можемъ повѣрить, какъ и раньше.

163. Рѣшить уравненіе $\frac{2x-3}{3x-4}=\frac{4x-5}{6x-7}$.

Умножимъ на $(3x-4)(6x-7)$; мы получимъ

$$(2x-3)(6x-7)=(4x-5)(3x-4),$$

то-есть $$12x^2-32x+21=12x^2-31x+20.$$

Отнимемъ отъ обѣихъ частей по $12x^2$; тогда

$$21-32x=20-31x;$$

перенесемъ члены—

$$21-20=32x-31x;$$

итакъ $$x=1.$$

Этотъ результатъ можно повѣрить, какъ и раньше.

164. Рѣшить уравненіе $\frac{x}{2}-8=\frac{10x}{3}-\frac{7}{3}$.

Умножимъ на 6; тогда

$$3x-48=20x-14;$$

перенесемъ члены —

$$17x=-34;$$

раздѣливъ, найдемъ $$x=-\frac{34}{17}=-2.$$

Результатъ этотъ можно повѣрить; мы найдемъ, что каждая часть уравненія обратится въ —9.

165. Рѣшить уравненіе $ax+b=cx+d$.

Перенесемъ члены— $$ax-cx=d-b;$$

то-есть $$(a-c)x=d-b;$$

раздѣливъ, получимъ $$x=\frac{d-b}{a-c}.$$

Повѣрка. Вставимъ эту величину вмѣсто x въ первоначальное уравненіе; тогда первая часть сдѣлается $\frac{a(d-b)}{a-c}+b$, то-есть $\frac{a(d-b)}{a-c}+\frac{b(a-c)}{a-c}$, то-есть $\frac{ad-bc}{a-c}$. Вторая часть будетъ $\frac{c(d-b)}{a-c}+d$, то-есть $\frac{c(d-b)}{a-c}+\frac{d(a-c)}{a-c}$, то-есть $\frac{da-cb}{a-c}$.

166. *Уравненіе первой степени не можетъ имѣть больше одного корня.*

Дѣйствительно, всякое уравненіе первой степени можно привести къ виду $ax=b$, если неизвѣстныя величины перенесены всѣ въ первую часть, а извѣстныя—во вторую; но для справедливости этого необходимо, чтобы x равнялось $\frac{b}{a}$, и ничему другому.

Тотъ-же выводъ получаютъ иногда слѣдующимъ образомъ. Предположимъ, если возможно, что это уравненіе имѣетъ два различные корня α и β; тогда согласно предположенію

$$a\alpha=b,\ a\beta=b;$$

вычтя одно изъ другого, получимъ

$$a(\alpha-\beta)=0;$$

но это невозможно, потому что по предположенію $\alpha-\beta$ не равно нулю, и a тоже не равно нулю. Такимъ образомъ уравненіе первой степени не можетъ имѣть больше одного корня.

Примѣры уравненій первой степени.

1. $\frac{2x+1}{2}=\frac{7x+5}{8}$.

2. $\frac{x}{2}-2=\frac{x}{4}+\frac{x}{5}-1$.

3. $\frac{x+1}{2}+\frac{3x-4}{5}+\frac{1}{8}=\frac{6x+7}{8}$.

4. $\frac{5x-11}{4}-\frac{x-1}{10}=\frac{11x-1}{12}$.

5. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=\frac{1}{2}$.

6. $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}=16-\frac{x+3}{4}$.

7. $x+\frac{11-x}{3}=\frac{26-x}{2}$.

8. $19x+\frac{1}{2}(7x-2)=4x+\frac{35}{2}$.

9. $\frac{x-3}{4}+\frac{x-4}{3}=\frac{x-5}{2}+\frac{x+1}{8}$.

10. $\frac{5x-7}{2}-\frac{2x+7}{3}=3x-14$.

11. $\frac{x-3}{4}-\frac{2x-5}{6}=\frac{41}{60}+\frac{3x-8}{5}-\frac{5x+6}{15}$.

12. $\frac{5x+3}{3}-\frac{3x-7}{2}=5x-10$.

13. $\frac{1}{6}(8-x)+x-1\frac{2}{3}=\frac{x+6}{2}-\frac{x}{3}$.

14. $\frac{x+3}{2}-\frac{x-2}{3}=\frac{3x-5}{12}+\frac{1}{4}$.

15. $\frac{3x-1}{5}-\frac{13-x}{2}=\frac{7x}{3}-\frac{11(x+3)}{6}$.

16. $\frac{5x-3}{7}-\frac{9-x}{3}=\frac{5x}{2}+\frac{19}{6}(x-4)$.

17. $\frac{5x-1}{7}+\frac{9x-5}{11}=\frac{9x-7}{5}$.

18. $\frac{3x+5}{7}-\frac{2x+7}{3}+10-\frac{3x}{5}=0$.

19. $\frac{x}{4}-\frac{5x+8}{6}=\frac{2x-9}{3}$.

20. $2x-\frac{19-2x}{2}=\frac{2x-11}{3}$.

21. $\frac{7x+9}{4}-\left(x-\frac{2x-1}{9}\right)=7$.

22. $\frac{7+9x}{4}-\left(1-\frac{2-x}{9}\right)=7x$.

23. $\frac{x+1}{2}-\frac{5-x}{4}=14-\frac{x+2}{3}$.

24. $\frac{7x-8}{11}+\frac{15x+8}{13}=3x-\frac{31-x}{2}$.

25. $\frac{3x-11}{4}-\frac{28-9x}{8}=4x-14\,{}^{3}/_{4}$.

26. $\frac{2x-1}{3}-\frac{3x-2}{4}=\frac{5x-4}{6}-\frac{7x+6}{12}$.

27. $\frac{2x-9}{27}+\frac{x}{18}-\frac{x-3}{4}=8\,{}^{1}/_{3}-x$.

28. $\frac{x-1}{3}+\frac{4x-{}^{3}/_{4}}{5}-\frac{7x-6}{8}=2+\frac{x-2}{2}+\frac{3x-9}{10}$.

29. $\frac{2x-6}{5}-\frac{x-4}{9}-\frac{3x}{13}=0$.

30. $x=3x-\frac{1}{2}(4-x)+\frac{1}{3}$.

31. $\frac{3x-7}{5}+\frac{25-4x}{9}=\frac{5x-14}{3}$.

32. $\frac{2x+5}{13}+\frac{40-x}{8}=\frac{10x-427}{19}$.

33. $\frac{x}{7}-\frac{x-5}{11}+5=x-\left(\frac{2x}{77}+1\right)$.

34. $\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}=\frac{x+3}{4}+\frac{x+4}{6}+1$.

35. $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-5}{x-6}-\frac{x-6}{x-7}$.

36. $(x-5)(x-2)-(x-5)(2x-5)+(x+7)(x-2)=0$.

37. $3-x-2(x-1)(x+2)=(x-3)(5-2x)$.

38. $x-3-(3-x)(x+1)=(x-3)(1+x)+3-x$.

39. $\frac{x+10}{3}-\frac{3}{5}(3x-4)+\frac{(3x-2)(2x-3)}{6}=x^2-\frac{8}{15}$.

40. $\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)-(x+5)(x-3)+\frac{3}{4}=0$.

41. $\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)-(x-5)(x+3)+\frac{93}{4}=0$.

*

42. $\dfrac{9x+5}{14}+\dfrac{8x-7}{6x+2}=\dfrac{36x+15}{56}+\dfrac{10\frac{1}{4}}{14}$.

43. $\dfrac{6x+7}{15}-\dfrac{2x-2}{7x-6}=\dfrac{2x+1}{5}$.

44. $\dfrac{6x+1}{15}-\dfrac{2x-4}{7x-16}=\dfrac{2x-1}{5}$.

45. $\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{7}{x+3}=\dfrac{37}{x^2+5x+6}$.

46. $(x+1)^2=\{6-(1-x)\}x-2$.

47. $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{1}{x-6}-\dfrac{1}{x-8}$.

48. $\dfrac{2}{2x-5}+\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{6}{3x-1}$.

49. $\dfrac{25-\frac{1}{3}x}{x+1}+\dfrac{16x+4\frac{1}{5}}{3x+2}=\dfrac{23}{x+1}+5$.

50. $\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{a}{3}\right)-\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{a}{4}\right)+\dfrac{1}{4}\left(x-\dfrac{a}{5}\right)=0$.

51. $(a+x)(b+x)=(c+x)(d+x)$.

52. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{b-a}=\dfrac{a}{b+a}$.

53. $ax+b=\dfrac{x}{a}+\dfrac{1}{b}$.

54. $\dfrac{x-a}{b}+\dfrac{x-b}{c}+\dfrac{x-c}{a}=\dfrac{x-(a+b+c)}{abc}$.

55. $(a+x)(b+x)-a(b+c)=\dfrac{a^2c}{b}+x^2$.

56. $\dfrac{a+b}{x-c}=\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}$.

57. $\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}=\dfrac{ax+b}{px+q}$.

58. $\dfrac{3abc}{a+b}+\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\dfrac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\dfrac{bx}{a}$.

59. $\dfrac{m(x+a)}{x+b}+\dfrac{n(x+b)}{x+a}=m+n$.

60. $\left(\dfrac{x-a}{x+b}\right)^3=\dfrac{x-2a-b}{x+a+2b}$.

61. $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$.

62. $0.15x+1.575-0.875x=0.0625x$.

63. $1.2x-\dfrac{0.18x-0.05}{0.5}=0.4x+8.9$.

64. $4.8x-\dfrac{0.72x-0.05}{0.5}=1.6x+8.9$.

ГЛАВА X.

Задачи, приводящія къ простымъ уравненіямъ съ одною неизвѣстною величиною.

167. Приложимъ теперь данные выше способы къ рѣшенію нѣсколькихъ задачъ и такимъ образомъ покажемъ учащемуся образецъ пользованія Алгеброй. Во всякой задачѣ однѣ величины даются, а другія, находящіяся въ данныхъ соотношеніяхъ съ ними, должны быть найдены. Эти соотношенія въ словесномъ изложеніи задачи обыкновенно выражаются общеупотребительными фразами, и способъ рѣшенія задачъ можно вообще описать такимъ образомъ: *Нужно обозначить неизвѣстныя величины буквами и выразить алгебраическимъ языкомъ тѣ соотношенія, которыя существуютъ между неизвѣстными величинами и данными; такимъ образомъ мы получимъ уравненія, изъ которыхъ могутъ быть выведены значенія неизвѣстныхъ величинъ.*

Мы дадимъ теперь нѣсколько примѣровъ, и ограничимся въ этой главѣ лишь такими задачами, которыя могутъ быть рѣшены при помощи одной неизвѣстной.

168. Сумма двухъ чиселъ равна 89, а ихъ разность равна 31; найти эти числа.

Означимъ чрезъ x меньшее изъ чиселъ, тогда большее число будетъ $31+x$; и такъ какъ сумма ихъ равна 89, то мы будемъ имѣть

$$31+x+x=89;$$

то-есть
$$31+2x=89;$$

перенося члены,
$$2x=89-31=58;$$

и раздѣливъ, найдемъ
$$x=\frac{58}{2}=29.$$

Итакъ, меньшее число есть 29, а большее будетъ $29+31$, то-есть 60.

169. Несостоятельный торговецъ долженъ тремъ лицамъ: лицу B онъ долженъ вдвое больше чѣмъ A, а лицу C столько, сколько долженъ A и B вмѣстѣ. Сколько каждый изъ нихъ получитъ изъ 300 рублей, приходящихся на ихъ долю?

Означимъ чрезъ x то число рублей, которое получитъ A; тогда число рублей, которое получитъ B, будетъ $2x$; а $x+2x$, то-есть $3x$ будетъ то число рублей, которое получитъ C. Вся сумма должна быть 300 рублей; итакъ

$$x+2x+3x=300;$$

то-есть
$$6x=300;$$

и
$$x=\frac{300}{6}=50.$$

Слѣдовательно A долженъ получить 50 р., B 100 р. и C 150 р.

170. Раздѣлить линію въ 21 дюймъ длиною на двѣ части, такъ чтобы одна изъ нихъ составляла три четверти другой.

Означимъ чрезъ x число дюймовъ въ одной части, тогда $\frac{3x}{4}$ выразитъ число дюймовъ въ другой части; итакъ

$$x+\frac{3x}{4}=21;$$

освободимся отъ дробей; тогда

$$4x+3x=84,$$

то-есть $$7x=84;$$

слѣдовательно $$x=\frac{84}{7}=12.$$

Итакъ, одна часть будетъ имѣть 12 дюймовъ, а другая 9 дюймовъ въ длину.

171. Если A можетъ исполнить нѣкоторую работу въ 8 дней, а B въ 10 дней, то во сколько дней они кончатъ ее, работая вмѣстѣ?

Означимъ искомое число дней буквой x. Въ одинъ день A можетъ исполнить $\frac{1}{8}$ часть работы, слѣдовательно въ x дней онъ сдѣлаетъ $\frac{x}{8}$ частей работы. Въ одинъ день B можетъ исполнить $\frac{1}{10}$ часть работы, слѣдовательно въ x дней онъ сдѣлаетъ $\frac{x}{10}$ частей работы. Но такъ какъ въ x дней A и B оканчиваютъ всю работу, то мы имѣемъ

$$\frac{x}{8}+\frac{x}{10}=1;$$

освободимся отъ дробей, умноживъ уравненіе на 40; тогда

$$5x+4x=40,$$

то-есть $$9x=40;$$

слѣдовательно $$x=\frac{40}{9}=4\,{}^{4}/_{9}.$$

172. Былъ нанятъ рабочій на 60 дней съ условіемъ, что за всякій день, въ который будетъ работать, онъ будетъ получать 75 копѣекъ, а за каждый день, который онъ прогуляетъ, съ него будутъ вычитать по 25 копѣекъ. По окончаніи срока рабочій получилъ 14 рублей. Спрашивается, сколько дней онъ работалъ?

Означимъ чрезъ x число рабочихъ дней; тогда число прогульныхъ дней будетъ $60-x$; поэтому $75x$ будетъ его заработная плата, выра-

женная въ копѣйкахъ, а $25(60-x)$ будетъ означать сумму, которую нужно удержать за прогулъ, то-же въ копѣйкахъ. Итакъ

$$75x-25(60-x)=1400;$$

то-есть $$75x-1500+25x=1400;$$

слѣдовательно $$100x=1400+1500=2900;$$

а потому $$x=\frac{2900}{100}=29.$$

Итакъ, онъ работалъ 29 дней, а прогулялъ 60—29, то-есть 31 день.

173. Сколько четвериковъ нужно примѣшать ржи по 1 р. 20 к. за четверикъ къ 50 четверикамъ пшеницы по 1 р. 80 к. за четверикъ, чтобы смѣсь можно было продавать по 1 р. 60 к. за четверикъ?

Означимъ искомое число четвериковъ чрезъ x; тогда $6x$ будетъ стоимость ржи въ двугривенныхъ, а 450 будетъ стоимость пшеницы въ тѣхъ-же единицахъ.

Цѣнность смѣси будетъ $8(50+x)$ такихъ-же единицъ. Итакъ

$$8(50+x)=6x+450;$$

то-есть $$8x+400=6x+450;$$

или $$2x=50,$$

оттуда $$x=25.$$

174. Контрабандистъ провозитъ нѣкоторое количество водки, за которую надѣется получить 63 руб.; но, спрятавъ 5 ведеръ, онъ попался таможенному чиновнику, захватившему у него третью часть остальной водки, вслѣдствіе чего контрабандистъ выручаетъ за водку только 52 р. 50 к. Сколько ведеръ водки было и что стоило ведро ея?

Означимъ число ведеръ водки черезъ x; въ этой задачѣ удобно выразить цѣны въ полтинникахъ; поэтому $\frac{126}{x}$ будетъ цѣна ведра водки въ полтинникахъ. Количество захваченной водки равно $\frac{x-5}{3}$ ведеръ, а цѣна его $\frac{x-5}{3}\times\frac{126}{x}$ полтинниковъ; такимъ образомъ:

$$\frac{x-5}{3}\times\frac{126}{x}=126-105=21.$$

Умножимъ на $3x$, тогда

$$126\ (x-5)=3x\times 21=63x;$$

слѣдовательно $$126x-630=63x,$$

то-есть $$63x=630$$

и $$x=\frac{630}{63}=10.$$

Итакъ, водки было 10 ведеръ, а цѣна ведра будетъ $\frac{63}{10}$ рубл.; т.-е. 6 руб. 30 коп.

175. Учащійся можетъ уже теперь самъ упражняться въ рѣшеніи задачъ. Замѣтимъ, что во всѣхъ задачахъ главнѣйшая трудность заключается *въ переводѣ задачи съ обыкновеннаго языка на алгебраическій*, и занимающійся не долженъ приходить въ отчаяніе, если иной разъ на первыхъ порахъ онъ встрѣтитъ нѣкоторое затрудненіе, такъ какъ ничто кромѣ упражненія не можетъ ему дать ни умѣлости, ни увѣренности въ этомъ дѣлѣ.

Примѣры задачъ.

1. Сбереженія двухъ лицъ составляютъ 3870 рублей, но одно лицо имѣетъ вдвое больше другого; найти сбереженіе того и другого.

2. Раздѣлить 425 рублей между двоими такъ, чтобы одинъ получилъ столько четвертаковъ, сколько другой—рублей.

3. Сколько денегъ въ кошелькѣ, если четвертая и пятая части этихъ денегъ вмѣстѣ составляютъ 14 р. 40 к.?

4. Нѣкто, уплативши седьмую и затѣмъ пятую часть своего долга остается еще должнымъ 579 р. 60 к. Какъ великъ былъ весь его долгъ?

5. Разложить 46 на двѣ части такъ, что если одну часть раздѣлить на 7, а другую на 3, то сумма частныхъ равнялась-бы 10.

6. Общество изъ 266 лицъ состоитъ изъ мужчинъ, женщинъ и дѣтей; мужчинъ вчетверо больше, чѣмъ дѣтей, а женщинъ вдвое больше, чѣмъ дѣтей. Сколько каждыхъ изъ нихъ?

7. Нѣкто издерживаетъ третью часть своего дохода на столъ и квартиру, одну восьмую часть на одежду, одну десятую на благотворительность и сберегаетъ 318 руб. Какъ великъ его доходъ?

8. Три города уплачиваютъ извѣстнаго налога 594 рубля; такъ что, когда на долю B приходится платить 20 р., A уплачиваетъ 12 р., а C уплачиваетъ 17 р. 50 к. Сколько приходится всего уплатить каждому городу?

9. Раздѣлить 1520 рублей между A, B и C такъ, чтобы B имѣлъ на 100 р. больше, чѣмъ A, а C на 270 р. больше, чѣмъ B.

10. Нужно раздѣлить нѣкоторую сумму денегъ между тремя лицами A, B и C. A долженъ получить на 30 рублей меньше половины этой суммы, B—на 10 рублей меньше третьей части и C на 8 руб. больше четвертой части той-же суммы. Сколько получитъ каждый?

11. Сумма двухъ чиселъ равна 5760, а ихъ разность равняется одной трети большаго числа. Найти эти числа.

12. Въ двухъ боченкахъ находится по одинаковому количеству пива; изъ перваго боченка отливаютъ 34 кружки, а изъ второго 80 кружекъ; послѣ этого въ одномъ боченкѣ остается пива вдвое больше,

чѣмъ въ другомъ. Сколько кружекъ пива было въ каждомъ боченкѣ сначала?

13. Нѣкто покупаетъ картину за извѣстную цѣну, и такую же цѣну платитъ за раму къ ней. Если-бы рама стоила на 6 руб. 30 коп. дешевле, а картина была-бы дороже на 4 р. 80 к., то цѣна рамы составляла-бы лишь половину цѣны картины. Найти стоимость картины.

14. Два овцевода, владѣвшіе сообща стадомъ овецъ, рѣшили раздѣлить свое имущество по-ровну: одинъ беретъ себѣ 72 овцы, а другой 92 овцы и приплачиваетъ первому 220 р. 50 к. Спрашивается, во что цѣнилась овца?

15. Домъ съ садомъ стоитъ 5355 р. причемъ пяти-кратная стоимость дома равна двѣнадцати-кратной стоимости сада. Найти цѣну дома и сада отдѣльно.

16. Десятая часть шеста окрашена въ красный цвѣтъ, двадцатая—въ оранжевый, тридцатая—въ желтый, сороковая—въ зеленый, пятидесятая въ голубой, шестидесятая—въ синій, а остальная часть, длина которой равна 302 дюймамъ, окрашена въ фіолетовый цвѣтъ. Найти длину шеста.

17. Двѣ трети нѣкотораго числа людей получили каждый по 48 к., а одна треть по 78 к. каждый. Вся, издержанная на нихъ, сумма денегъ равна 17 р. 40 к. Сколько было людей?

18. Найти число, третья часть котораго, сложенная съ седьмою частью, составитъ 20.

19. Разность квадратовъ двухъ послѣдовательныхъ чиселъ равна 15. Найти эти числа.

20. Въ нѣкоторой династіи третья часть королей носила одно имя, четвертая часть—другое, восьмая часть—третье, одна двѣнадцатая—четвертое, и было еще пять иныхъ именъ. Сколько королей носило одинаковыя имена?

21. Артель гребцовъ, которая можетъ двигать лодку въ стоячей водѣ со скоростью 9 верстъ въ часъ, разсчитала, что потребуется вдвое больше времени, чтобы плыть противъ теченія, чѣмъ по теченію. Найти скорость теченія рѣки въ часъ.

22. Англичане A и B, играя въ нѣкоторую игру, условились, что проигравшій долженъ каждый разъ платить выигравшему однимъ шиллингомъ больше половины остающихся у проигравшаго денегъ; при началѣ игры у нихъ денегъ было по ровну, но послѣ того, какъ B проигралъ первую партію и выигралъ вторую, у него стало вдвое больше, чѣмъ у A. Сколько денегъ было у каждаго изъ нихъ при началѣ игры?

23. Нѣкто, имѣющій 75600 рублей, употребляетъ часть этихъ денегъ на постройку дома; затѣмъ третью часть оставшихся денегъ помѣщаетъ въ банкъ изъ прибыли по 4 на 100, а другія двѣ трети изъ прибыли по 5 на 100, причемъ имѣетъ ежегодный доходъ отъ этихъ прибылей въ 2469 р. 60 к. Найти, сколько стоилъ домъ.

24. Сельскій хозяинъ продалъ быковъ по 78 р. 80 к. за штуку и овецъ по 13 р. 24 к. за штуку, причемъ тѣхъ и другихъ вмѣстѣ было 35 головъ, а вся, вырученная отъ продажи, сумма составила 1203 р. 30 к Сколько было быковъ и сколько овецъ?

25. *A* и *B* нашли кошелекъ, въ которомъ находилось нѣсколько гривенниковъ. *A* взялъ себѣ два гривенника и шестую часть остатка; потомъ *B* взялъ три гривенника и шестую часть остатка; тогда оказалось, что они взяли по ровну. Сколько гривенниковъ было въ кошелькѣ и по скольку взялъ каждый изъ нихъ?

26. Заяцъ находится въ 80 своихъ скачкахъ отъ бѣгущей за нимъ охотничьей собаки; онъ успѣваетъ дѣлать три скачка въ то время, какъ собака дѣлаетъ только два, но собака при одномъ скачкѣ подвигается впередъ на столько-же, на сколько заяцъ при двухъ. Сколько скачковъ сдѣлаетъ заяцъ, прежде чѣмъ будетъ схваченъ собакой?

27. Длина одного участка земли вдвое больше его ширины; другой участокъ, который на 50 саженъ длиннѣе и на 10 саженъ шире перваго, заключаетъ въ себѣ на 6800 квадратныхъ саженъ больше, чѣмъ первый. Найти площадь каждаго участка.

28. Сосудъ можетъ быть опорожненъ посредствомъ трехъ крановъ; чрезъ одинъ первый онъ опоражнивается въ 80 минутъ, чрезъ одинъ второй въ 200 минутъ и чрезъ одинъ третій въ 5 часовъ. Во сколько времени опорожнится сосудъ, если будутъ открыты всѣ три крана?

29. Если обложить налогомъ по 3 к. съ рубля всѣ доходы меньше 1000 руб. въ годъ и по 5 коп. съ рубля всѣ доходы, превышающіе 1000 руб. въ годъ, то можно будетъ съ имуществъ, оцѣненныхъ въ 5000000 руб., получить налога 190000 руб. Сколько налога придется на всѣ доходы, ниже 1000 руб. каждый?

30. Нѣкто покупаетъ чай двухъ сортовъ—одинъ по 96 коп. за фунтъ, а другой по 1 руб. 60 коп. за фунтъ и желаетъ смѣшать оба сорта такимъ образомъ, чтобы, продавая смѣсь по 1 руб. $17\frac{1}{3}$ коп., можно было имѣть 10 процентовъ прибыли на каждомъ проданномъ фунтѣ. Найти, сколько фунтовъ низшаго сорта должно примѣшать къ каждому фунту высшаго сорта чаю?

31. Разнощикъ продалъ за 6 руб. 24 коп. нѣсколько апельсиновъ и яблоковъ, причемъ послѣднихъ было больше чѣмъ первыхъ на 180 штукъ; яблоки онъ продаетъ по 16 коп. за десятокъ, а за 15 апельсиновъ беретъ 4 копѣйками больше, чѣмъ за 35 яблоковъ. Сколько продалъ разнощикъ апельсиновъ и яблоковъ?

32. Бочка *A* содержитъ 12 ведеръ вина и 18 ведеръ воды; другая бочка *B* содержитъ 9 ведеръ вина и 3 ведра воды. По скольку ведеръ надо взять изъ каждой бочки, чтобы составить смѣсь изъ 7 ведеръ вина и 7 ведеръ воды?

33. *A* можетъ выкопать канаву въ половину того времени, въ какое ее выкопалъ-бы *B*, а *B* можетъ выкопать ту-же канаву въ $\frac{3}{4}$

того времени, въ какое выкопалъ-бы ее C; всѣ-же они вмѣстѣ могутъ выкопать ее въ 6 дней. Найти время, въ которое каждый можетъ выкопать канаву, работая отдѣльно.

34. Нѣкто, уплативъ въ казначейство по 3 коп. съ каждаго рубля, имѣетъ 2570 руб. 50 к. Сколько у него было до этого?

35. Въ какое время между однимъ и двумя часами минутная стрѣлка часовъ находится въ точности за одну минуту впереди часовой стрѣлки?

36. Нѣкто имѣетъ въ своемъ распоряженіи ровно a часовъ времени; какъ далеко можетъ онъ съѣздить въ каретѣ, дѣлающей b верстъ въ часъ, чтобы возвратиться во-время домой, идя назадъ пѣшкомъ и проходя по c верстъ въ часъ?

37. Извѣстные предметы потребленія были обложены пошлиной по 6 шиллинговъ за центнеръ; вслѣдствіе послѣдовавшаго потомъ уменьшенія пошлины потребленіе увеличилось на половину, а доходъ казны уменьшился на одну треть. Найти величину новой пошлины за центнеръ въ шиллингахъ.

38. Корабль отправился въ путь, имѣя сухарей на 60 дней, при ежедневной выдачѣ по фунту на человѣка; пробывъ въ морѣ 20 дней, корабль подвергся шторму, во время котораго 5 человѣкъ были смыты и сброшены за бортъ, и получилъ поврежденія, причинившія замедленіе на 24 дня; тогда сдѣлалось необходимымъ уменьшить ежедневную выдачу сухарей до $^5/_7$ фунта. Найти первоначальное число команды корабля.

ГЛАВА XI.

Совмѣстныя уравненія первой степени съ двумя неизвѣстными величинами.

176. Положимъ, что мы имѣемъ уравненіе, содержащее двѣ неизвѣстныя величины x и y, напримѣръ $5x-2y=4$. Для всякаго произвольнаго значенія, какое мы припишемъ одной изъ неизвѣстныхъ величинъ, мы можемъ опредѣлить соотвѣтствующее значеніе другой величины и такимъ образомъ найти сколько угодно паръ величинъ, удовлетворяющихъ данному уравненію. Такъ напримѣръ, если $y=1$, то мы найдемъ, что $x=\frac{6}{5}$; если $y=2$, то $x=\frac{8}{5}$; и такъ далѣе

Положимъ также, что есть другое уравненіе того-же рода, какъ напримѣръ $4x+3y=17$. И здѣсь мы можемъ найти сколько угодно паръ величинъ, удовлетворяющихъ этому уравненію.

Но положимъ, что мы ищемъ такія значенія x и y, которыя удовлетворяли-бы *обоимъ* уравненіямъ; тогда мы найдемъ, что существуетъ только одно такое значеніе для x и одно-же для y. Дѣйствительно, умножимъ первое уравненіе на 3; тогда

$$15x - 6y = 12;$$

умножимъ второе уравненіе на 2; тогда

$$8x + 6y = 34.$$

Сложивъ эти два уравненія, получимъ

$$15x - 6y + 8x + 6y = 12 + 34,$$

то-есть

$$23x = 46,$$

и $$x = 2.$$

Такимъ образомъ, если нужно удовлетворить обоимъ уравненіямъ, то x *должно* равняться 2; подставимъ это значеніе x въ которое нибудь изъ двухъ данныхъ уравненій, напримѣръ, во второе; тогда получимъ

$$8 + 3y = 17;$$

а потому

$$3y = 17 - 8$$

и $$y = 3.$$

177. Два уравненія или болѣе, удовлетворяющіяся *одними и тѣми-же* значеніями неизвѣстныхъ величинъ, называются *совмѣстными* или *совокупными уравненіями*. Мы начнемъ съ разсмотрѣнія совмѣстныхъ уравненій, заключающихъ двѣ неизвѣстныя величины, причемъ онѣ входятъ только въ первой степени и не перемножены одна на другую.

178. Существуетъ три способа, обыкновенно употребляющихся для рѣшенія такихъ уравненій. Цѣль каждаго изъ этихъ способовъ одна и та-же, именно—полученіе изъ *двухъ* данныхъ уравненій, содержащихъ *двѣ* неизвѣстныя величины, одного уравненія съ *одною* только неизвѣстною величиною. Однимъ изъ такихъ способовъ мы, какъ это говорится, *исключаемъ* ту неизвѣстную величину, которая не замѣчается болѣе въ полученномъ одномъ уравненіи.

179. Первый способъ.—Первый способъ—тотъ самый, который мы уже употребили въ примѣрѣ статьи 176. Онъ состоитъ въ слѣдующемъ: *Оба уравненія умножаются на такія числа, чтобы коэффиціентъ одной изъ неизвѣстныхъ величинъ сдѣлался однимъ и тѣмъ-же въ обоихъ, получающихся отъ этого, уравненіяхъ; тогда, при помощи сложенія или вычитанія, мы составляемъ изъ нихъ одно уравненіе, содержащее только одну неизвѣстную величину.*

Примѣръ

$$4x + 3y = 22; \quad 5x - 7y = 6.$$

Если мы хотимъ исключить y, то умножимъ *первое* уравненіе на 7, т. е. на коэффиціентъ при y во второмъ уравненіи, а второе уравне-

ніе—на 3, т. е. на коэффиціентъ при y въ первомъ уравненіи. Итакъ мы получимъ

$$28x+21y=154;\ 15x-21y=18.$$

Сложимъ ихъ:

$$28x+15x=154+18;$$

то-есть

$$43x=172$$

и

$$x=\frac{172}{43}=4.$$

Послѣ этого подставимъ найденное значеніе x въ которое-нибудь изъ данныхъ уравненій, напримѣръ—въ первое; тогда получимъ

$$16+3y=22;$$

поэтому

$$3y=6,$$

а

$$y=2.$$

Если мы желаемъ рѣшить эту задачу посредствомъ исключенія x, то умножимъ первое уравненіе на 5, а второе—на 4; такимъ образомъ получаемъ

$$20x+15y=110;\ 20x-28y=24.$$

Вычтемъ второе уравненіе изъ перваго; мы получимъ

$$20x+15y-(20x-28y)=110-24;$$

откуда

$$43y=86,$$

и

$$y=2.$$

180. Второй способъ. *Выразимъ одну изъ неизвѣстныхъ величинъ посредствомъ другой изъ котораго-нибудь уравненія и подставимъ это ея значеніе въ другое уравненіе.*

Такъ, беря прежній примѣръ, мы изъ перваго уравненія получаемъ

$$4x=22-3y;$$

раздѣлимъ на 4;

$$x=\frac{22-3y}{4};$$

подставивъ это значеніе x во второе уравненіе, мы получимъ

$$\frac{5(22-3y)}{4}-7y=6;$$

умножимъ на 4,

$$5(22-3y)-28y=24;$$

то-есть

$$110-15y-28y=24;$$

перенесемъ члены

$$43y=86,$$

откуда

$$y=2.$$

Подставивъ это значеніе y въ которое нибудь изъ данныхъ уравненій, мы получимъ $x=4$.

Или такъ: Изъ перваго уравненія мы имѣемъ

$$3y=22-4x;$$

раздѣлимъ на 3, $$y=\frac{22-4x}{3};$$

подставивъ это значеніе y во второе уравненіе, получимъ

$$5x-\frac{7(22-4x)}{3}=6;$$

умножимъ на 3, $$15x-7(22-4x)=18;$$

то-есть $$15x-154+28x=18;$$

то-есть $$43x=172$$

$$x=4.$$

Подставивъ теперь эту величину x въ которое нибудь изъ данныхъ уравненій, мы получимъ $y=2$.

181. Третій способъ. *Выразимъ одну и ту-же неизвѣстную величину посредствомъ другой изъ каждаго уравненія и уравняемъ между собою полученныя такимъ образомъ выраженія.*

Такъ, беря опять прежній примѣръ, находимъ изъ перваго уравненія $x=\frac{22-3y}{4}$ и изъ второго $x=\frac{6+7y}{5}$; такимъ образомъ

$$\frac{22-3y}{4}=\frac{6+7y}{5};$$

освободимся отъ дробей

$$5(22-3y)=4(6+7y);$$

то-есть $$110-15y=24+28y;$$

переставимъ члены— $$43y=86$$

и $$y=2.$$

Отсюда, какъ и раньше, выведемъ $x=4$.

Или такъ: Изъ перваго уравненія мы получаемъ $y=\frac{22-4x}{3}$, изъ второго $y=\frac{5x-6}{7}$; такимъ образомъ

$$\frac{22-4x}{3}=\frac{5x-6}{7}.$$

Отсюда, какъ и прежде, найдемъ, что $x=4$, и тогда получимъ $y=2$.

Примѣры совмѣстныхъ уравненій съ двумя неизвѣстными.

1. $x+y=15$, $x-y=7$.
2. $3x-2y=1$, $3y-4x=1$.

3. $3x-5y=13$, $2x+7y=81$.

4. $2x+3y=43$, $10x-y=7$.

5. $5x-7y=33$, $11x+12y=100$.

6. $3y-7x=4$, $2y+5x=22$.

7. $21y+20x=165$, $77y-30x=295$.

8. $5x+7y=43$, $11x+9y=69$.

9. $8x-21y=33$, $6x+35y=177$.

10. $11x-10y=14$, $5x+7y=41$.

11. $16x+17y=500$, $17x-3y=110$.

12. $\frac{x}{5}+\frac{y}{6}=18$, $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=21$.

13. $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=9$, $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=7$.

14. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$.

15. $\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=8$, $\frac{x+y}{3}+\frac{x-y}{4}=11$.

16. $\frac{11x-5y}{11}=\frac{3x+y}{16}$, $8x-5y=1$.

17. $\frac{2x}{3}-4+\frac{y}{2}+x=8-\frac{3y}{4}+\frac{1}{12}$, $\frac{y}{6}-\frac{x}{2}+2=\frac{1}{6}-2x+6$.

18. $4x+8y=2.4$, $10.2x-6y=3.48$.

19. $x=4y$, $\frac{1}{5}(2x+7y)-1=\frac{2}{3}(2x-6y+1)$.

20. $x+\frac{1}{2}(3x-y-1)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}(y-1)$, $\frac{1}{5}(4x+3y)=\frac{7y}{10}+2$.

21. $\frac{3x-5y}{2}+3=\frac{2x+y}{5}$, $8-\frac{x-2y}{4}=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$.

22. $\frac{3x}{10}-\frac{y}{15}-\frac{4}{9}=\frac{x}{12}-\frac{y}{18}$, $2x-\frac{8}{3}=\frac{x}{12}-\frac{y}{15}+\frac{11}{10}$.

23. $\frac{4x-3y-7}{5}=\frac{3x}{10}-\frac{2y}{15}-\frac{5}{6}$, $\frac{y-1}{3}+\frac{x}{2}-\frac{3y}{20}=\frac{y-x}{15}+\frac{x}{6}+\frac{11}{10}$.

24. $\dfrac{\frac{2x}{3}-\frac{5y}{12}}{\frac{7}{4}}-\dfrac{\frac{3x}{2}-\frac{y}{3}}{\frac{23}{2}}=2$, $\frac{x-y}{x+y}=\frac{1}{5}$.

25. $\frac{3x-2y}{3}+1+\frac{11y-10}{8}=\frac{4x-3y+5}{7}+\frac{45-x}{5}$,

$$45-\frac{4x-2}{3}=\frac{55x+71y+1}{18}.$$

26. $2.4x+0.32y-\frac{0.36x-0.05}{0.5}=0.8x+\frac{2.6+0.005y}{0.25}$,

$$\frac{0.04y+0.1}{0.3}=\frac{0.07x-0.1}{0.6}.$$

27. $13x+11y=4a$, $12x-6y=a$.

28. $\frac{m}{x}+\frac{n}{y}=1$, $\frac{n}{x}+\frac{m}{y}=1$.

29. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{3a}+\frac{y}{6b}=\frac{2}{3}$.

30. $ax+by=c$, $mx-ny=d$.

31. $\frac{x}{b+c}+\frac{y}{a+c}=2$, $\frac{ax-by}{(a-b)c}=1$.

32. $\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=2a$, $\frac{x-y}{4ab}=1$.

ГЛАВА XII.

Совмѣстныя уравненія первой степени болѣе, чѣмъ съ двумя неизвѣстными величинами.

182. Если мы имѣемъ три простыя уравненія съ тремя неизвѣстными величинами, то выводимъ изъ двухъ какихъ-нибудь изъ нихъ одно уравненіе съ двумя только неизвѣстными по правиламъ предыдущей главы; потомъ изъ третьяго уравненія и котораго-нибудь изъ первыхъ двухъ выводимъ другое уравненіе, содержащее тѣ-же двѣ неизвѣстныя величины; изъ двухъ полученныхъ такимъ образомъ уравненій найдемъ заключающіяся въ нихъ неизвѣстныя по предыдущему. Третья неизвѣстная найдется посредствомъ подстановки предыдущихъ двухъ величинъ въ одно изъ данныхъ уравненій.

Напримѣръ, положимъ даны уравненія

$$2x+3y+4z=16 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$
$$3x+2y-5z=8 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$
$$5x-6y+3z=6 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Для удобства ссылаться на то или другое уравненіе мы обозначили ихъ нумерами (1), (2), (3), и счетъ этотъ будемъ продолжать и дальше, въ ходѣ рѣшенія.

Умножимъ (1) на 3, а (2) на 2; получимъ

$$6x+9y+12z=48,$$
$$6x+4y-10z=16;$$

вычитая, найдемъ $5y+22z=32$ . . . . . (4).

Умножимъ (1) на 5, а (3) на 2; получимъ

$$10x+15y+20z=80,$$
$$10x-12y+6z=12;$$

вычитая, найдемъ $27y+14z=68$ . . . . . (5).

Умножимъ (4) на 27 и (5) на 5; получимъ

$$135y+594z=864,$$
$$135y+70z=340;$$

вычитая, найдемъ $524z=524,$

слѣдовательно $z=1.$

Подставимъ значеніе z въ (4); получимъ

$$5y+22=32,$$

слѣдовательно $y=2.$

Подставимъ значенія y и z въ (1); получимъ

$$2x+6+4=16;$$

слѣдовательно $x=3.$

Въ иныхъ случаяхъ удобно пользоваться слѣдующимъ правиломъ: изъ двухъ уравненій выразить значеніе двухъ неизвѣстныхъ величинъ посредствомъ третьей и подставить эти выраженія въ третье уравненіе; отсюда найдется эта третья неизвѣстная, а потомъ и двѣ остальныя.

Возьмемъ напримѣръ уравненія

$$3x+4y-16z=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$
$$5x-8y+10z=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$
$$2x+6y+7z=52. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Умножимъ (1) на 2 и сложимъ со (2); получимъ

$11x-22z=0$, а потому $x=2z.$

Умножимъ (1) на 5, а (2) на 3 и вычтемъ; получимъ

$$44y-110z=0, \text{ а потому } y=\frac{5z}{2}.$$

Подставимъ въ (3); найдемъ

$$4z+15z+7z=52; \text{ т. е. } 26z=52;$$

слѣдовательно

$$z=2;\ \text{и}\ x=2z=4,\ y=\frac{5z}{2}=5.$$

Тѣ-же способы прилагаются и въ томъ случаѣ, когда число простыхъ уравненій и неизвѣстныхъ будетъ больше трехъ.

Примѣры совмѣстныхъ уравненій первой степени болѣе чѣмъ съ двумя неизвѣстными.

1. $3x+2y-4z=15,\ 5x-3y+2z=28,\ 3y+4z-x=24.$
2. $x+y-z=1,\ 8x+3y-6z=1,\ 3z-4x-y=1.$
3. $2x-7y+4z=0,\ 3x-3y+z=0,\ 9x+5y+3z=28.$
4. $4x-3y+2z=9,\ 2x+5y-3z=4,\ 5x+6y-2z=18.$
5. $2x-4y+9z=28,\ 7x+3y-5z=3,\ 9x+10y-11z=4.$
6. $x-2y+3z=6,\ 2x+3y-4z=20,\ 3x-2y+5z=26.$
7. $4x-3y+2z=40,\ 5x+9y-7z=47,\ 9x+8y-3z=97.$
8. $3x+2y+z=23,\ 5x+2y+4z=46,\ 10x+5y+4z=75.$
9. $5x-6y+4z=15,\ 7x+4y-3z=19,\ 2x+y+6z=46.$
10. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=2,\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2}.$
11. $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{z},\ \frac{3}{z}-\frac{2}{y}=2,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{4}{3}.$
12. $\frac{3}{x}-\frac{4}{5y}+\frac{1}{z}=\frac{38}{5},\ \frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}+\frac{2}{z}=\frac{61}{6},\ \frac{4}{5x}-\frac{1}{2y}+\frac{4}{z}=\frac{161}{10}.$
13. $\frac{3y-1}{4}=\frac{6z}{5}-\frac{x}{2}+\frac{9}{5},\ \frac{5x}{4}+\frac{4z}{3}=y+\frac{5}{6},$
$\frac{3x+1}{7}-\frac{z}{14}+\frac{1}{6}=\frac{2z}{21}+\frac{y}{3}.$
14. $\frac{10x+4y-5z}{5}=\frac{4x+6y-3z}{9},$
$10x+4y-5z=4x+6y-3z-8$
$\frac{10x+4y-5z}{10}+\frac{4x+6y-3z}{3}=\frac{x+y+z}{4}.$
15. $7x-3y=1,$ $11z-7u=1,$ $4z-7y=1,$ $19x-3u+1.$
16. $3u-2y=2,$ $5x-7z=11,$ $2x+3y=39,$ $4y+3z=41.$
17. $2x-3y+2z=13,$ $4y+2z=14,$ $4u-2x=30,$ $5y+3u=32.$

18. $7u-13z=87$,
$10y-3x=11$,
$3u+14x=57$,
$2x-11z=50$.

19. $7x-2z+3u=17$,
$4y-2z+v=11$,
$5y-3x-2u=8$,
$4y-3u+2v=9$,
$3z+8u=33$.

20. $3x-4y+3z+3v-6u=11$,
$3x-5y+2z-4u=11$,
$10y-3z+3u-2v=2$,
$5z+4u+2v-2x=3$,
$6u-3v+4x-2y=6$.

21. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1$, $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

22. $ay+bx=c$, $cx+az=b$, $bz+cy=a$.

23. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$, $\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1$, $\frac{c}{z}+\frac{a}{x}=1$.

24. $x+y+z=0$, $(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0$,
$bcx+cay+abz=1$.

25. $ax+by+cz=A$, $a^2x+b^2y+c^2z=A^2$, $a^3x+b^3y+c^3z=A^3$.

26. $xyz=a(yz-zx-xy)=b(zx-xy-yz)=c(xy-yz-zx)$.

27. $x+y+z=a+b+c$
$bx+cy+az=cx+ay+bz=a^2+b^2+c^2$.

28. $x-ay+a^2z=a^3$, $x-by+b^2z=b^3$, $x-cy+c^2z=c^3$.

ГЛАВА XIII.

Задачи, приводящія къ уравненіямъ первой степени, болѣе чѣмъ съ одною неизвѣстною.

183. Дадимъ теперь нѣсколько примѣрныхъ задачъ, приводящихъ къ простымъ уравненіямъ, больше чѣмъ съ одною неизвѣстною величиною.

A и *B* играютъ въ извѣстную игру; въ первую партію *A* выигрываетъ столько рублей, сколько у него было и еще четыре рубля, такъ что у него стало вдвое больше денегъ, чѣмъ у *B*; во вторую партію *B* выигрываетъ половину того, что онъ имѣлъ сначала и еще одинъ рубль, причемъ оказалось, что у него втрое больше денегъ, чѣмъ у *A*. Сколько денегъ было у каждаго изъ нихъ?

*

Пусть x представляетъ число рублей, бывшихъ у A, а y — число рублей, которые имѣлъ B; тогда послѣ первой игры A имѣетъ $2x+4$ рубля, а у B остается $y-x-4$ рубля. Итакъ, по условію вопроса

$$2x+4=2(y-x-4)=2y-2x-8;$$

слѣдовательно $$2y-4x=12,$$

или $$y-2x=6.$$

Послѣ второй игры A имѣетъ $2x+4-\frac{y}{2}-1$ рублей, а у B будетъ $y-x-4+\frac{y}{2}+1$ рублей. Такъ что, по условію вопроса

$$y-x-4+\frac{y}{2}+1=3\left(2x+4-\frac{y}{2}-1\right)=6x+12-\frac{3y}{2}-3.$$

слѣдовательно

$$2y-2x-8+y+2=12x+24-3y-6;$$

иначе $$6y-14x=24,$$

или $$3y-7x=12.$$

Изъ перваго уравненія $3y-6x=18;$

вычитая, находимъ $x=6;$

слѣдовательно $y=18.$

184. Нѣкоторую сумму денегъ нужно раздѣлить между нѣсколькими лицами; если-бы людей было тремя больше, то каждый получилъ-бы рублемъ меньше, а если-бы ихъ было двумя меньше, то каждый получилъ-бы рублемъ больше. Сколько было людей и сколько каждый изъ нихъ получилъ?

Пусть x означаетъ число людей, а y — число рублей, полученныхъ каждымъ изъ нихъ. Тогда распредѣлявшаяся между ними сумма выразится чрезъ xy, и по условію вопроса.

$$(x+3)(y-1)=xy,$$

а также $$(x-2)(y+1)=xy.$$

Первое уравненіе даетъ

$$xy+3y-x-3=xy;$$

откуда $$3y-x=3.$$

Второе уравненіе даетъ

$$xy-2y+x-2=xy;$$

откуда $$x-2y=2.$$

Сложивъ, получимъ

$$3y-x+x-2y=5,$$

то-есть

$$y=5.$$

Отсюда

$$x=2y+2=12.$$

185. Какая дробь становится равной $\frac{3}{4}$, когда числитель ея увеличимъ на 6, и обращается въ $\frac{1}{2}$, когда уменьшимъ ея знаменатель на 2?

Означимъ чрезъ x числитель и чрезъ y знаменатель этой дроби; тогда по условію вопроса

$$\frac{x+6}{y}=\frac{3}{4} \text{ и } \frac{x}{y-2}=\frac{1}{2}.$$

Освободимъ первое уравненіе отъ дробей, умноживъ его на $4y$; тогда

$$4(x+6)=3y;$$

слѣдовательно

$$3y-4x=24.$$

Освободимъ второе уравненіе отъ дробей, умноживъ его на $2(y-2)$; мы получимъ

$$2x=y-2,$$

слѣдовательно

$$y-2x=2,$$

и

$$3y-6x=6.$$

Вычитая, найдемъ $3y-4x-(3y-6x)=24-6$;

то-есть

$$2x=18$$

и

$$x=9.$$

Отсюда

$$y=2+2x=20.$$

Итакъ, искомая дробь есть $\frac{9}{20}$.

Примѣры задачъ.

1. Нѣкоторая дробь обращается въ 1, если приложить 3 къ ея числителю, и въ $\frac{1}{2}$, если приложить 2 къ ея знаменателю. Какая это дробь?

2. A и B имѣютъ вмѣстѣ 570 рублей. Если-бы у A было втрое больше денегъ, чѣмъ у него есть на самомъ дѣлѣ, а у B—въ пять разъ больше, чѣмъ у него въ дѣйствительности есть, то у обоихъ было-бы вмѣстѣ 2350 рублей. Сколько денегъ у каждаго изъ нихъ?

3. Если числитель нѣкоторой дроби увеличить на единицу, то дробь обратится въ $\frac{1}{3}$, а если знаменатель увеличить на единицу, то дробь сдѣлается равной $\frac{1}{4}$. Какая это дробь?

4. Найти два такихъ числа, что если первое сложить съ учетвереннымъ вторымъ, то сумма будетъ 29; а если второе сложить съ ушестереннымъ первымъ, то сумма будетъ 36.

5. Если дать 36 копѣекъ A, то у него будетъ въ три раза больше, чѣмъ у B; а если взять 5 копѣекъ у B, то у него останется только половина того, сколько у A. Сколько денегъ у каждаго?

6. Два англичанина A и B бьются объ закладъ въ 10 шиллинговъ. Если проиграетъ A, онъ будетъ имѣть на двадцать пять шиллинговъ меньше, чѣмъ двойная сумма, какая тогда будетъ у B; если-же проиграетъ B, то онъ будетъ тогда имѣть пять семнадцатыхъ того, что будетъ у A. Найти, сколько шиллинговъ имѣетъ каждый изъ нихъ.

7. Найти два такихъ числа, чтобы удвоенное первое, сложенное со вторымъ, равнялось 17, а удвоенное второе, сложенное съ первымъ, составило 19.

8. Найти такія два числа, чтобы половина перваго и три четверти второго вмѣстѣ равнялись избытку троекратнаго перваго надъ вторымъ, а этотъ избытокъ равнялся-бы 11.

9. На 33 рубля можно купить 32 фунта чаю и 15 фунтовъ кофе; или 36 фунтовъ чаю и 9 фунтовъ кофе. Найти цѣну фунта того и другого.

10. Найти три такихъ числа, чтобы сумма ихъ равнялась 9; сумма перваго, удвоеннаго второго и утроеннаго третьяго была-бы 22, а сумма перваго, учетвереннаго второго и девятикратнаго третьяго была-бы 58.

11. Фунтъ чаю и три фунта сахару стоятъ 2 р. 88 к.; но если бы сахаръ вздорожалъ на 50 процентовъ, а чай на 10 процентовъ, то это стоило-бы 3 р. 36 к. Найти цѣну чаю и сахару.

12. Нѣкто покупаетъ процентныхъ бумагъ на 20400 руб.—трехъ-процентныхъ государств. бумагъ по 648 р. за каждую и желѣзнодорожныхъ акцій по 192 р.; эти акціи приносятъ доходу по 4 рубля на свою номинальную стоимость 200 рублей. Найти, сколько акцій долженъ онъ купить, чтобы имѣть съ нихъ такой же доходъ, какъ съ остальныхъ своихъ денегъ, обращенныхъ въ государственныя бумаги?

13. Одно лицо владѣетъ извѣстнымъ капиталомъ, отданнымъ въ ростъ за извѣстные проценты. Другое лицо обладаетъ капиталомъ на 8000 р. большимъ, чѣмъ первое, и получаетъ съ своего капитала однимъ процентомъ болѣе, причемъ доходъ его превышаетъ доходъ перваго лица на 640 рублей. Третье лицо владѣетъ капиталомъ на 12000 рублей больше капитала перваго и получаетъ двумя процентами больше, чѣмъ

первое, такъ что его доходъ превышаетъ доходъ перваго на 1200 р. Найти капиталъ каждаго лица и размѣръ приносимаго капиталомъ процента.

14. Нѣкоторая сумма денегъ раздѣлена поровну между извѣстнымъ числомъ лицъ; если-бы ихъ было четырьмя больше, то каждый получилъ-бы рублемъ меньше; а если-бы ихъ было пятью меньше, то каждый получилъ-бы двумя рублями больше. Найти, между сколькими лицами раздѣлена эта сумма и сколько получилъ каждый.

15. Въ днѣ нѣкотораго водоема, содержащаго въ себѣ 192 ведра воды имѣются два крана; оба они были одновременно открыты; спустя три часа одинъ изъ нихъ былъ завернутъ вновь, и чрезъ другой кранъ водоемъ опорожнился втеченіе одиннадцати часовъ послѣ этого. Если-бы кранъ былъ завернутъ спустя шесть часовъ, то потребовалось-бы только шесть-же часовъ, чтобы послѣ этого опорожнить водоемъ. Сколько ведеръ вытекаетъ въ часъ чрезъ каждый кранъ, предполагая, что истеченіе совершается равномѣрно?

16. Англичанинъ, уплативъ налогъ въ пользу бѣдныхъ и подоходный налогъ по 7 пенсовъ съ каждаго фунта стерлинговъ, имѣетъ 486 фунтовъ капитала; въ пользу бѣдныхъ онъ уплатилъ на $22^1/_2$ фунта ст. больше противъ суммы подоходнаго налога. Найти, какъ великъ былъ его первоначальный капиталъ въ фунтахъ и сколько пенсовъ съ фунта платится въ пользу бѣдныхъ, зная, что отношеніе между фунтомъ и пенсомъ равно 240.

17. Нѣкоторое число людей подраздѣляется на три разряда; большинство перваго и второго разряда вмѣстѣ противъ третьяго на 10 меньше, чѣмъ большинство второго и третьяго разряда вмѣстѣ противъ перваго; но если-бы въ первомъ разрядѣ было на 30 человѣкъ больше, а во второмъ и третьемъ вмѣстѣ на 29 человѣкъ меньше, то тогда въ первомъ разрядѣ было-бы однимъ человѣкомъ болѣе, чѣмъ въ двухъ остальныхъ. Найти число людей въ каждомъ разрядѣ, если все число людей на 34 больше, чѣмъ восьмикратное большинство третьяго надъ вторымъ.

18. Фермеръ издержалъ-бы всѣ свои деньги, если-бы купилъ 4 быковъ и 32 ягненка; но вмѣсто этого онъ покупаетъ то-же число быковъ и половинное число ягнятъ, такъ что когда онъ уплатилъ за ихъ перевозъ по желѣзной дорогѣ среднимъ числомъ по 2 р. 88 к. съ головы, то у него оказался еще остатокъ денегъ въ 86 р. 40 к. Каждый быкъ стоилъ въ двадцать разъ дороже стоимости его перевозки, а всѣ ягнята вмѣстѣ стоили въ 60 разъ дороже стоимости перевозки каждаго изъ нихъ. Сколько денегъ было у фермера до покупки?

19. *A* и *B* играютъ на бильярдѣ и *A* ставитъ три четвертака противъ двухъ въ каждую партію; послѣ извѣстнаго числа партій оказалось, что *A* выигралъ три четвертака; но если-бы *A* ставилъ пять четвертаковъ противъ двухъ, и проигралъ-бы одной партіей больше

чѣмъ теперь, то онъ проигралъ-бы тридцать четвертаковъ. Сколько, партій выигралъ каждый изъ игроковъ?

20. Пять лицъ A, B, C, D, E играютъ въ карты; послѣ того какъ A выигралъ половину денегъ B, B—одну треть денегъ C, C—одну четверть денегъ D, D—одну шестую денегъ E, то у каждаго изъ нихъ стало по 14 р. 40 к. Найти, сколько денегъ имѣлъ каждый изъ нихъ, приступая къ игрѣ?

21. Если-бы не случилось никакого приключенія, то понадобилось-бы для переѣзда изъ A до B по желѣзной дорогѣ вдвое меньше времени, чѣмъ въ конной каретѣ; но если поѣздъ употребитъ три часа на разныя случайныя остановки, то карета, въ это время, проѣдетъ сверхъ этого разстоянія еще 15 верстъ; если-бы разстояніе равнялось только двумъ третямъ дѣйствительнаго, а на остановки употреблено было-бы поѣздомъ столько-же времени, то въ каретѣ можно было-бы доѣхать отъ A до B какъ разъ въ то-же время, какъ и по желѣзной дорогѣ. Узнать разстояніе.

22. A и B взялись исполнить извѣстную работу, которую они могутъ окончить, работая вмѣстѣ, въ 30 дней, за что получатъ 115 р. 20 к. Когда работа была уже сдѣлана на половину, A не работалъ восемь дней, а B—четыре дня, вслѣдствіе чего окончаніе работы замедлилось на пять съ половиной дней противъ предполагавшагося раньше. Сколько придется получить тому и другому изъ нихъ?

23. A и B бѣгутъ на разстояніи 1760 аршинъ. Сперва A даетъ B отбѣжать на 44 аршина и догоняетъ его чрезъ 51 секунду; въ другой разъ A даетъ B бѣжать впродолженіе 1 минуты 15 секундъ, и тотъ пробѣгаетъ въ это время 88 аршинъ. Найти, во сколько времени A и B могутъ пробѣжать каждый разстояніе въ 1760 аршинъ.

24. A и B стали подниматься одновременно отъ подошвы горы къ ея вершинѣ; A достигъ-бы вершины за полчаса раньше B, но, сбившись съ дороги, онъ прошелъ цѣлую версту въ сторону и возвратился назадъ, идя вдвое скорѣе, чѣмъ раньше; вслѣдствіе этого онъ достигаетъ вершины за шесть минутъ до B.—C отправляется въ путь черезъ двадцать минутъ послѣ выхода A и B и, идя со скоростью двухъ съ одной седьмой верстъ въ часъ, достигаетъ вершины чрезъ десять минутъ послѣ B. Найти скорость ходьбы A и B и разстояніе отъ подошвы горы до ея вершины.

25. Поѣздъ желѣзной дороги чрезъ часъ послѣ выхода встрѣчаетъ препятствіе въ движеніи, причиняющее ему остановку въ одинъ часъ, послѣ чего онъ отправился дальше со скоростью, равною $^3/_5$ первоначальной, и достигаетъ станціи тремя часами позднѣе, чѣмъ слѣдовало; если-бы препятствіе встрѣтилось 50 верстами дальше отъ станціи выхода, то поѣздъ пришелъ-бы на 1 ч. 20 м. раньше. Найти длину пути и начальную скорость поѣзда.

26. A, B и C садятся играть, имѣя каждый по нѣскольку рублей.

A проигрываетъ B и C столько рублей, сколько каждый изъ нихъ имѣетъ. Потомъ B проигрываетъ A и C столько, сколько каждый изъ нихъ теперь имѣетъ. Наконецъ C проигрываетъ A и B столько рублей, сколько каждый изъ нихъ теперь имѣетъ. Послѣ этого у каждаго изъ нихъ оказалось по 16 рублей. Сколько денегъ было у каждаго въ началѣ?

27. Два лица A и B могли окончить извѣстную работу въ m дней; они работаютъ вмѣстѣ n дней, послѣ чего A былъ отозванъ къ другому дѣлу, а B докончилъ работу чрезъ p дней. Въ какое время могъ-бы сдѣлать эту работу каждый изъ нихъ отдѣльно?

28. Поѣздъ, шедшій изъ Лондона въ Кэмбриджъ, испытываетъ въ пути нѣкоторое приключеніе, вслѣдствіе котораго его скорость уменьшилась на $\frac{1}{n}$ часть первоначальной, а потому онъ опаздываетъ на a часовъ. Если-бы приключеніе произошло на b миль ближе къ Кэмбриджу, то поѣздъ опоздалъ-бы на c часовъ. Найти скорость, съ которой поѣздъ шелъ первоначально.

29. Переднее колесо повозки дѣлаетъ шестью оборотами больше чѣмъ заднее на протяженіи 120 аршинъ; если окружность передняго колеса увеличить на одну четверть его длины, а окружность задняго—на одну пятую его настоящей длины, то вмѣсто шести лишнихъ оборотовъ получится только четыре. Найти окружность каждаго колеса?

30. Нѣкоторое число выражается двумя цифрами и равняется трехкратной суммѣ его цифръ; если-же приложить къ этому числу 45, то цифры его помѣняются мѣстами. Найти это число.

31. Нѣкоторое число выражается двумя цифрами и равняется семикратной суммѣ его цифръ; если-же вычесть изъ этого числа 27, то цифры его помѣняются мѣстами. Найти это число.

32. Нѣкто предполагаетъ проѣхать изъ A въ B или прямо въ почтовой каретѣ, или сперва изъ A доѣхать до C по желѣзной дорогѣ, а оттуда по другой желѣзной дорогѣ до B. Поѣздъ двигается въ три раза скорѣе кареты, но, выѣхавъ съ нимъ одновременно, можно пріѣхать въ B въ каретѣ, если не произойдетъ никакой остановки, 20-ю минутами раньше поѣзда. Но если поѣздъ опоздаетъ прибытіемъ въ C, то путешественнику придется тамъ ждать новаго поѣзда столько-же времени, сколько нужно, чтобъ доѣхать отъ C до B, и его переѣздъ займетъ вдвое больше времени, чѣмъ въ почтовой каретѣ. Но если-бы карета промедлила въ пути одинъ часъ, а поѣздъ пришелъ-бы въ C своевременно, то путешественникъ успѣлъ-бы по желѣзной дорогѣ доѣхать до B и сдѣлать еще полпути обратно отъ B къ C въ то время, которое онъ проѣхалъ-бы въ каретѣ изъ A до B. Длина всего кругового пути $ABCA$ равна $76^2/_3$ верстъ. Требуется найти скорость кареты.

33. A беретъ пробѣжать три раза кругомъ по аренѣ въ то время,

въ которое B дѣлаетъ только два круга; но A успѣваетъ пробѣжать только 150 аршинъ своего третьяго круга, когда B достигъ уже цѣли. Тогда A предлагаетъ сдѣлать четыре круга въ то время, когда B дѣлаетъ три, и теперь такъ соразмѣрилъ свой бѣгъ, что пробѣгаетъ ровно четыре аршина въ то время, въ какое прежде пробѣгалъ только три аршина. Точно также и B ускорилъ свой бѣгъ и пробѣгаетъ теперь 9 аршинъ въ то время, въ которое раньше пробѣгалъ только 8 аршинъ, но, начиная со второго круга, устаетъ и возвращается къ прежней скорости бѣга, а при третьемъ кругѣ дѣлаетъ только 9 аршинъ въ то время, въ какое при первомъ кругѣ дѣлалъ 10; благодаря этому A выигрываетъ 180 аршинъ и достигаетъ цѣли. Опредѣлить длину арены.

34. Пѣшеходъ вышелъ за p часовъ до выѣзда почтовой кареты, подвигаясь впередъ равномѣрно, какъ и карета; послѣдняя чрезъ нѣсколько часовъ обгоняетъ пѣшехода. Съ этого момента карета увеличиваетъ свою скорость до $^6/_5$ первоначальной, между тѣмъ какъ пѣшеходъ увеличиваетъ свою до $^5/_4$ первоначальной скорости, и съ этими увеличенными скоростями они продолжали двигаться впродолженіи q часовъ, начиная съ того момента, какъ карета догнала пѣшехода; послѣ этого они оказались другъ отъ друга на разстояніи 92 верстъ; но если-бы они втеченіе того-же времени двигались со своею первоначальною скоростью, то были-бы лишь на разстояніи 80 верстъ. Показать, что начальная скорость кареты была вдвое больше скорости пѣшехода, а также, положивъ $p+q=16$, показать, что начальная скорость кареты была 10 верстъ въ часъ, а скорость пѣшехода 5 верстъ въ часъ.

ГЛАВА XIV.

Разборъ нѣкоторыхъ задачъ, приводящихъ къ уравненіямъ первой степени.

186. Займемся теперь рѣшеніемъ нѣкоторыхъ задачъ, приводящихъ къ уравненіямъ первой степени, и изслѣдуемъ разныя особенности, которыя могутъ представиться при ихъ рѣшеніи. Начнемъ со слѣдующей задачи: Какое число нужно приложить къ числу a, чтобы сумма равнялась b? Обозначимъ это число буквой x; тогда

$$a+x=b,$$

а слѣдовательно

$$x=b-a.$$

Эта формула даетъ значеніе x соотвѣтственно значеніямъ величинъ a и b. Такъ, напримѣръ, если $a=12$ и $b=25$, то мы будемъ имѣть

$x=25-12=13$. Но положимъ, что $a=30$, а $b=24$, тогда $x=24-30=-6$, и мы естественно должны спросить себя, какъ понимать этотъ отрицательный результатъ? Если мы возвратимся къ задачѣ, то увидимъ, что ее теперь надо читать такъ: какое число нужно приложить къ 30, чтобы сумма равнялась 24? Теперь, очевидно, что если слова *приложить* и *сумма* понимать въ ихъ ариѳметическомъ смыслѣ, то предложенная задача невозможна. Но въ то-же время мы видимъ, что слѣдующая задача можетъ быть рѣшена: Какое число нужно вычесть изъ 30, чтобы *разность* равнялась 24? Число 6 представитъ тогда отвѣтъ на вопросъ. Вторая задача отличается отъ первой только тѣмъ, что слова *приложить къ* замѣнены словами *вычесть изъ*, а слово *сумма* словомъ *разность*.

187. Такимъ образомъ, изъ этого примѣра мы видимъ, что *отрицательное* рѣшеніе указываетъ на то, что задача въ строгомъ ариѳметическомъ смыслѣ невозможна, но что изъ нея, посредствомъ надлежащихъ измѣненій въ ея выраженіи, можетъ быть составлена другая задача, для которой *абсолютная* величина отрицательнаго рѣшенія будетъ правильнымъ отвѣтомъ.

188. Это указываетъ на удобство употребленія въ Алгебрѣ слова *сложить* въ болѣе обширномъ смыслѣ, чѣмъ въ Ариѳметикѣ. Пусть x означаетъ количество, которое нужно *алгебраически сложить* съ a, тогда алгебраическая сумма будетъ $a+x$ все равно, будетъ-ли x положительнымъ или отрицательнымъ. Такимъ образомъ $a+x=b$ алгебраически всегда возможно, будетъ ли a больше или меньше b.

Перейдемъ теперь къ другой задачѣ.

189. Возрастъ A равняется a годамъ, а возрастъ B равенъ b годамъ. Черезъ сколько лѣтъ A будетъ вдвое старше B? Положимъ, что это будетъ черезъ x лѣтъ отъ настоящаго времени; тогда по смыслу вопроса

$$a+x=2(b+x);$$

откуда

$$x=a-2b.$$

Такъ напримѣръ, если $a=40$, $b=15$, то $x=10$. Но положимъ, что $a=35$ и $b=20$, тогда $x=-5$; и здѣсь, какъ въ предыдущей задачѣ, намъ приходится вникнуть въ смыслъ отрицательнаго рѣшенія. Но если дать a и b послѣднія изъ предыдущихъ значеній, то уравненіе, которое намъ придется рѣшать, будетъ

$$35+x=40+2x,$$

и очевидно, что если придавать символамъ x и $+$ узкій ариѳметическій смыслъ, то это уравненіе невозможно, потому что 40 больше 35 и $2x$ больше x, и равенство между обѣими частями невозможно. Но измѣнимъ задачу такимъ образомъ: Возрастъ A равняется 35 годамъ, а воз-

растъ B 20 годамъ; когда A *былъ* вдвое старше B? Пусть это было за x лѣтъ до настоящаго времени; тогда по смыслу вопроса

$$35-x=2(20-x)=40-2x,$$

откуда

$$x=5.$$

Здѣсь опять мы видимъ, что *отрицательное* рѣшеніе въ строго-ариѳметическомъ смыслѣ невозможно, но что, измѣнивъ надлежащимъ образомъ выраженіе задачи, мы составляемъ изъ нея другую, въ которой *абсолютная* величина прежняго отрицательнаго рѣшенія является правильнымъ отвѣтомъ.

Легко видѣть, что уравненіе, соотвѣтствующее новому выраженію задачи, получается изъ первоначальнаго простымъ измѣненіемъ x въ $-x$.

190. Положимъ, что задача эта первоначально была выражена такъ: Возрастъ A равняется a годамъ, а возрастъ B равенъ b годамъ; найти такую эпоху, когда возрастъ A вдвое больше возраста B. Въ этихъ словахъ нѣтъ намека на то, что искомая эпоха была раньше или будетъ позже настоящаго времени. Если предположимъ, что она будетъ *позднѣе*, то получимъ, какъ въ ст. 189, для искомаго числа лѣтъ $x=a-2b$; если-же положимъ, что искомая эпоха была *раньше* настоящей, то получимъ $x=2b-a$. Если $2b$ меньше a, то будетъ вѣрно первое предположеніе и приведетъ къ ариѳметической величинѣ x, а второе предположеніе окажется невѣрнымъ и приведетъ къ отрицательному значенію для x. Если $2b$ больше a, то окажется вѣрнымъ второе предположеніе и также приведетъ къ ариѳметической величинѣ x, а первое предположеніе будетъ невѣрно и дастъ отрицательную величину для x. Послѣ этого можно сказать, что отрицательное рѣшеніе указываетъ на то, что мы должны сдѣлать наудачу любое изъ предположеній, допускаемыхъ задачей. Но необходимо замѣтить, что когда мы открываемъ, что сдѣланное предположеніе невѣрно, то намъ уже нѣтъ надобности возвращаться снова къ началу и повторять *все изслѣдованіе*, потому что мы можемъ воспользоваться *рѣшеніемъ*, полученнымъ при ложномъ предположеніи. Для этого намъ нужно будетъ взять только абсолютную величину *отрицательнаго* рѣшенія и понимать въ задачѣ *будущее* время, если событіе послѣдуетъ послѣ настоящаго момента, и *прошедшее* время, если оно случилось раньше настоящаго момента.

191. Обратимъ теперь вниманіе на другой случай. Положимъ, что задача выражена такъ-же, какъ въ концѣ ст. 189: Возрастъ A равняется a годамъ, а возрастъ B равенъ b годамъ; когда A былъ вдвое старше B? Пусть x означаетъ искомое число; тогда

$$a-x=2(b-x),$$

откуда

$$x=2b-a.$$

Теперь *повѣримъ* это рѣшеніе. Поставимъ найденное значеніе x въ уравненіе, тогда $a-x$ обратится въ $a-(2b-a)$, т. е. $2a-2b$; а $2(b-x)$ перейдетъ въ $2(b-2b+a)$, то-есть въ $2a-2b$. Если b меньше a, то оба результата будутъ положительными и не представятъ никакого ариѳметическаго неудобства. Но если b больше a, то хотя обѣ части алгебраически равны, но такъ какъ обѣ онѣ *отрицательны*, мы не можемъ все таки сказать, что повѣрили рѣшеніе въ ариѳметическомъ смыслѣ. И когда мы возвращаемся къ задачѣ, то убѣждаемся, что невозможно, чтобы a было меньше b; потому что, если въ данное время возрастъ A меньше возраста B, то A никогда не былъ вдвое старше B и никогда не будетъ. Но и безъ предыдущей провѣрки рѣшенія мы могли-бы замѣтить, что если b больше a, то и x также больше a, чего нельзя допустить. Такимъ образомъ становится понятнымъ, что задача можетъ быть въ сущности нелѣпой, а рѣшеніе ея можетъ не представлять непосредственно никакого неудобства, хотя когда мы изслѣдуемъ или повѣримъ это рѣшеніе, то мы откроемъ признаки нелѣпости.

192. Уравненіе $a+x=2(b+x)$ можно разсматривать какъ символическое представленіе слѣдующаго словеснаго выраженія: Положимъ, что a и b представляютъ нѣкоторыя двѣ величины; какую величину должно придать къ каждой изъ нихъ, чтобы первая сумма сдѣлалась вдвое больше второй. Здѣсь слова *величина*, *сумма* и *придать* могутъ быть понимаемы въ алгебраическомъ смыслѣ, такъ что x, a и b могутъ быть какъ положительными, такъ и отрицательными. Такая алгебраическая постановка вопроса заключаетъ въ себѣ между другими возможными ея истолкованіями и вопросъ о лѣтахъ A и B. Такимъ образомъ очевидно, что когда мы переведемъ какую нибудь задачу въ уравненіе, то это уравненіе *можетъ служить* символическимъ выраженіемъ болѣе широкой задачи, чѣмъ та, изъ которой оно было выведено.

Изслѣдуемъ теперь другую задачу.

193. A и B ѣдутъ по одному направленію, проѣзжая соотвѣтственно a и b верстъ въ часъ. Въ извѣстное время A достигаетъ нѣкоторой точки P, а чрезъ n часовъ послѣ этого B достигаетъ нѣкоторой точки Q. Найти, когда встрѣтятся A и B?

P Q R

Означимъ разстояніе PQ буквой c и положимъ, что путешественники ѣдутъ по направленію отъ P къ Q и встрѣчаются въ R черезъ x часовъ послѣ того, какъ A былъ въ точкѣ P. Тогда, такъ какъ A ѣдетъ со скоростью a верстъ въ часъ, то разстояніе PR будетъ заключать въ себѣ ax верстъ. B употребитъ поэтому $x-n$ часовъ, чтобы проѣхать разстояніе QR, такъ что QR равняется $b(x-n)$ верстамъ. Но PR равняется суммѣ PQ и QR, а потому

$$ax=c+b(x-n)=c+bx-bn;$$

слѣдовательно

$$x = \frac{c - bn}{a - b}.$$

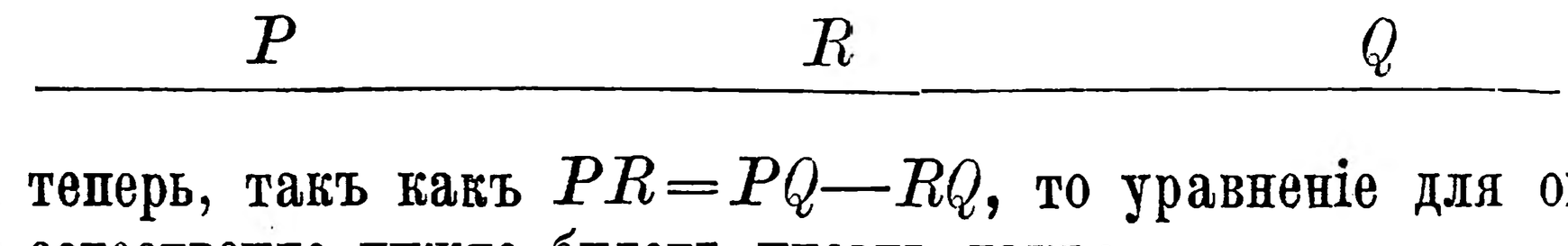
Изслѣдуемъ теперь это рѣшеніе при различныхъ предположеніяхъ, какія можно сдѣлать относительно значеній данныхъ величинъ.

I. Положимъ, что a больше b, и c больше bn; тогда величина x положительная, и встрѣча *произойдетъ*, какъ мы предполагали, *послѣ* того, какъ A проѣдетъ чрезъ точку P. Дѣйствительно, когда A находится въ P, то пространство, которое надо проѣхать B, чтобы достигнуть Q, равняется bn верстамъ, а такъ какъ bn меньше c, то отсюда слѣдуетъ, что когда A находится въ P, то онъ оказывается еще *позади* B, такъ какъ a больше b. Слѣдовательно, A можетъ догнать B.

Разстояніе $PR = ax = \frac{a(c - bn)}{a - b}$. Поэтому

$$QR = \frac{a(c - bn)}{a - b} - c = \frac{a(c - bn) - c(a - b)}{a - b} = \frac{cb - abn}{a - b} = \frac{b(c - an)}{a - b}.$$

Но если c *больше* an, то выраженіе это будетъ представлять положительную величину, такъ что R придется, какъ мы предположили, *впереди* за точкой Q. Мы видимъ, что это и дѣйствительно такъ, потому что, когда c больше an, то для A потребуется больше, чѣмъ n часовъ, чтобы прибыть изъ P въ Q, такъ что онъ не можетъ встрѣтить B, иначе какъ проѣхавъ чрезъ точку Q. Но если c *меньше* an, то выраженіе для QR становится *отрицательнымъ*, и это заставляетъ насъ предположить, что въ нашемъ взглядѣ на задачу нужно сдѣлать нѣкоторое измѣненіе. Дѣйствительно, теперь для A потребуется *меньше* n часовъ, чтобы отъ P доѣхать до Q, такъ что онъ встрѣтитъ B раньше, чѣмъ прибудетъ въ Q. Такимъ образомъ на чертежѣ это надо будетъ представить такъ:



И теперь, такъ какъ $PR = PQ - RQ$, то уравненіе для опредѣленія x естественно нужно будетъ писать такъ:

$$ax = c - b(n - x) = c - bn + bx.$$

Но это, какъ мы видимъ, въ сущности совершенно то-же уравненіе, какъ и прежнее.

Если наконецъ c *равно* an, то величина RQ обратится въ нуль, и точка R совпадетъ тогда съ Q; въ этомъ случаѣ

$$x = \frac{c - bn}{a - b} = \frac{an - bn}{a - b} = n.$$

Слѣдовательно A и B встрѣтятся въ точкѣ Q черезъ n часовъ послѣ того, какъ A былъ въ P.

II. Теперь положимъ, что a больше b, и c меньше bn. Значеніе x будетъ тогда *отрицательнымъ*, и мы можемъ на основаніи того, что было замѣчено объ отрицательныхъ количествахъ раньше, догадаться, что A и B вмѣсто того, чтобы встрѣтиться чрезъ $\frac{c-bn}{a-b}$ часовъ послѣ того, какъ A проѣдетъ черезъ P, встрѣтятся на самомъ дѣлѣ за $\frac{bn-c}{a-b}$ часовъ *раньше*, чѣмъ A прибудетъ въ P. И дѣйствительно, такъ какъ c меньше bn, то изъ этого слѣдуетъ, что B былъ позади A, когда A былъ въ P, такъ что A долженъ обогнать B раньше прибытія въ P. Слѣдовательно правильное рѣшеніе задачи будетъ такое:

R P Q

Положимъ, что A и B встрѣчаются за x часовъ *раньше* прибытія A въ P; пусть R будетъ точка ихъ встрѣчи. Тогда $RP=ax$ и $RQ=b(x+n)$. А также $RP=RQ-PQ$; такимъ образомъ

$$ax=b(x+n)-c;$$

слѣдовательно

$$x=\frac{bn-c}{a-b}.$$

III. Теперь предположимъ, что a меньше b, и c больше bn. Въ этомъ случаѣ первоначальное выраженіе для x принимаетъ также *отрицательное* значеніе, и мы найдемъ слѣдовательно, что A и B встрѣтятся *раньше*, чѣмъ A былъ въ P. Въ самомъ дѣлѣ, B теперь ѣдетъ скорѣе, чѣмъ A и находится *впереди* A, когда A находится въ P; такъ что B долженъ обогнать A, прежде чѣмъ A былъ въ P. Въ результатѣ оказывается, какъ и во второмъ случаѣ, что A и B встрѣчаются за $\frac{c-bn}{b-a}$ часовъ раньше, чѣмъ A былъ въ P.

IV. Наконецъ предположимъ, что a меньше b, и c меньше bn. Здѣсь первоначально полученное выраженіе для x будетъ количествомъ *положительнымъ*, а потому его можно писать такъ $\frac{bn-c}{b-a}$. Теперь B ѣдетъ быстрѣе, чѣмъ A и находится позади A, когда A находится въ P; такимъ образомъ B долженъ чрезъ нѣкоторое время обогнать A. Если мы предположимъ, что A и B встрѣтятся *послѣ того* какъ A былъ въ Q, то чертежъ надо расположить такъ:

P Q R

Здѣсь мы должны-бы были естественнымъ образомъ писать уравненіе такъ:

$$ax = c + b(x - n) = c + bx - bn.$$

Если мы положимъ, что A и B встрѣчаются *раньше*, чѣмъ A будетъ въ Q, то чертежъ представится въ такомъ видѣ:

$$P \qquad\qquad R \qquad Q$$

Здѣсь естественнымъ образомъ надо было-бы писать уравненіе такъ

$$ax = c - b(n - x) = c - bn + bx.$$

Въ обоихъ случаяхъ мы имѣемъ въ сущности одно и то-же уравненіе, и одинаково получаемъ $x = \frac{bn - c}{b - a}$.

194. Предыдущая задача можетъ быть различнымъ образомъ видоизмѣняема; напримѣръ, вмѣсто предположенія, что A и B ѣдутъ по одному направленію, мы можемъ предположить, что A ѣдетъ, какъ прежде, а B—въ противоположномъ направленіи. Въ этомъ случаѣ, если мы предположимъ, какъ и раньше, что A и B встрѣтятся чрезъ x часовъ послѣ того, какъ A будетъ въ P, то найдемъ, что $x = \frac{c + bn}{a + b}$. Такимъ образомъ моментъ встрѣчи необходимо наступитъ послѣ того, какъ A оставитъ за собою P, и ѣдущіе встрѣтятся въ нѣкоторой точкѣ вправо отъ P. Читатель легко замѣтитъ, что значеніе x въ этомъ случаѣ совпадаетъ съ результатомъ измѣненія b на $-b$ въ первоначальномъ значеніи x, полученномъ въ ст. 193.

195. Но вмѣсто того, чтобы предполагать, что прибытіе B въ точку Q произойдетъ черезъ n часовъ *послѣ* прибытія A въ P, мы можемъ предположить, что оно произойдетъ за n часовъ *прежде* того, и предположить, какъ и раньше, что A и B ѣдутъ по *одному* и тому-же направленію. Въ этомъ случаѣ, если x имѣетъ то-же значеніе, какъ и прежде, мы найдемъ, что $x = \frac{c + bn}{a - b}$. Это выраженіе будетъ представлять *положительное* количество, если a больше b, и ѣдущіе тогда встрѣтятся послѣ прибытія A въ P. Если-же a меньше b, то значеніе x будетъ *отрицательное*; это показываетъ, что ѣдущіе теперь встрѣтятся за $\frac{c + bn}{b - a}$ часовъ *раньше* прибытія A въ P, и изслѣдованіе покажетъ, что это такъ и есть. Учащійся легко замѣтитъ, что значеніе x въ настоящемъ случаѣ совпадаетъ съ выводомъ, какой мы получимъ, если напишемъ $-n$ вмѣсто n въ первоначальномъ значеніи x, полученномъ въ ст. 193.

196. Положимъ еще, что A и B ѣдутъ въ противоположномъ направленіи и что прибытіе A въ P происходитъ за n часовъ до прибытія B въ Q; и положимъ, что P и Q въ первыхъ чертежахъ помѣнялись мѣстами, такъ что теперь A достигаетъ Q раньше, чѣмъ P, а B напротивъ достигаетъ сперва P, а потомъ уже Q. Если x имѣетъ то-же самое значеніе, какъ и прежде, то мы и теперь найдемъ, что $x=\frac{bn-c}{a+b}$. Тогда, если bn больше c, то значеніе x будетъ *положительное*, и ѣдущіе встрѣтятся, какъ мы предполагали, послѣ прибытія A въ P. Если-же bn меньше c, то значеніе x будетъ *отрицательное*, и мы найдемъ, что ѣдущіе встрѣтятся за $\frac{c-bn}{a+b}$ часовъ *раньше* прибытія A въ P. Учащійся легко замѣтитъ, что значеніе x въ настоящемъ случаѣ будетъ то-же самое, какое получится, если мы напишемъ $-c$ вмѣсто c въ значеніи x-са въ ст. 194; оно совпадетъ также и съ значеніемъ x-са въ ст. 193, если въ послѣднемъ поставимъ $-b$ вмѣсто b и $-c$ вмѣсто c.

197. Изъ разсмотрѣнія задачъ, разобранныхъ въ настоящей главѣ, а равнымъ образомъ и другихъ подобныхъ задачъ учащійся пріобрѣтетъ надлежащее довѣріе къ отрицательнымъ величинамъ и умѣнье обращаться съ ними. Ниже мы приведемъ нѣкоторыя общія начала, объясненныя на примѣрахъ въ предыдущихъ статьяхъ, вѣрность которыхъ выяснится для учащагося, по мѣрѣ того, какъ онъ будетъ подвигаться въ изученіи предмета.

1) Отрицательное рѣшеніе можетъ происходить отъ того, что выраженіе задачи заключаетъ въ себѣ условіе, которому невозможно удовлетворить; въ этомъ случаѣ мы можемъ приписать неизвѣстной величинѣ *прямо противоположное качество* въ сравненіи съ тѣмъ, какое было ей приписано, и тогда получимъ возможность составить задачу подобную той, которая заключаетъ въ себѣ невозможное требованіе.

2) Отрицательное рѣшеніе можетъ произойти отъ того, что, при переводѣ задачи съ обыкновеннаго языка на алгебраическіе символы, сдѣлано было невѣрное предположеніе о *качествѣ* извѣстнаго рода величины; въ этомъ случаѣ мы можемъ исправить наше предположеніе, приписавъ этой величинѣ противоположное качество и такимъ образомъ получить положительное рѣшеніе.

3) Когда мы желаемъ измѣнить предположенія, сдѣланныя нами относительно *качества* извѣстныхъ или неизвѣстныхъ величинъ въ задачѣ, и приписатьимъ качества противоположныя, то нѣтъ надобности составлять *новое* уравненіе; достаточно измѣнить въ *прежнемъ* уравненіи знаки символовъ, представляющихъ каждую изъ величинъ, у которыхъ нужно перемѣнить качество.

198. Мы не утверждаемъ, что предыдущія общія начала были *доказаны*; они вытекаютъ сами собою изъ разбора частныхъ случаевъ, и учащемуся предоставляется провѣрить ихъ тѣмъ-же способомъ. Такъ, когда при рѣшеніи какой-нибудь задачи результатъ получится отрицательный, то учащійся долженъ постараться *истолковать* этотъ результатъ, причемъ вышеуказанныя общія начала могутъ послужить для него руководствомъ. Когда задача приводитъ къ отрицательному результату, и онъ пожелаетъ составить аналогичную задачу, которая привела-бы къ соотвѣтствующему положительному результату, то долженъ поступать слѣдующимъ образомъ: измѣнить x на $-x$ въ томъ уравненіи, которое онъ получилъ, и тогда, если возможно, измѣнить словесное выраженіе задачи, такъ, чтобы оно соотвѣтствовало новому уравненію. Мы говоримъ,—*если возможно*, потому что въ нѣкоторыхъ случаяхъ никакого подобнаго измѣненія повидимому достигнуть невозможно, и тогда уже надо считать такую задачу совершенно невозможною.

199. Этимъ мы закончимъ разсмотрѣніе отрицательныхъ количествъ и изслѣдуемъ еще двѣ другія особенности, могущія представиться при рѣшеніи уравненій.

Въ ст. 193 мы пришли къ такому выводу: $x=\frac{c-bn}{a-b}$. Положимъ, что $a=b$; тогда знаменатель этого значенія x сдѣлается нулемъ; обозначивъ числителя одною буквою N, мы получимъ тогда $x=\frac{N}{0}$; спрашивается, какъ надо понимать такой результатъ? Такъ какъ A и B теперь ѣдутъ съ одинаковою скоростью, то они должны постоянно оставаться на одномъ и томъ-же разстояніи другъ отъ друга, а потому они *никогда* не встрѣтятся. Но вмѣсто того, чтобы предполагать, что a въ точности равно b, положимъ, что a только очень близко къ b; тогда $\frac{N}{a-b}$ можетъ быть очень большою величиною, потому что если разность $a-b$ будетъ очень мала по сравненію съ N, то она будетъ содержаться очень большое число разъ въ N; и чѣмъ меньше $a-b$, тѣмъ больше будетъ $\frac{N}{a-b}$.

Для краткости вмѣсто этого употребляютъ выраженіе «$\frac{N}{0}$ равняется безконечности» и пишутъ это выраженіе такъ: $\frac{N}{0}=\infty$. Но читатель долженъ помнить, что это выраженіе есть *лишь сокращеніе* и что ему не нужно приписывать никакого абсолютнаго смысла.

200. Необходимо изслѣдовать всякую задачу, рѣшеніе которой представляется въ видѣ $\frac{N}{0}$, и попытаться объяснить это рѣшеніе. Учащійся

можетъ ожидать, что въ подобномъ случаѣ задача окажется невозможной, но что надлежащимъ образомъ видоизмѣняя вопросъ, можно составить новую задачу, отвѣтомъ на которую будетъ *очень большое число*, и что число это будетъ тѣмъ больше, чѣмъ ближе будетъ подходить новая задача къ прежней.

201. Предположимъ еще, что когда въ ст. 193 мы имѣемъ $a=b$, будетъ также и $c=bn$; тогда значеніе x приметъ видъ $\frac{0}{0}$. Изслѣдуя задачу, мы увидимъ, что вслѣдствіе сдѣланнаго предположенія A и B одновременно находятся въ P и ѣдутъ съ одинаковой скоростью, такъ что *постоянно* остаются вмѣстѣ. Поэтому вопросъ о томъ, когда A и B были одновременно вмѣстѣ, въ этомъ случаѣ оказывается *неопредѣленнымъ*, потому что не допускаетъ одного опредѣленнаго отвѣта или вообще конечнаго числа отвѣтовъ.

202. Учащійся долженъ изслѣдовать также каждую задачу, приводящую къ рѣшенію вида $\frac{0}{0}$, и попытаться истолковать рѣшеніе. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ онъ найдетъ, какъ въ разсмотрѣнномъ выше примѣрѣ, что задача не можетъ быть ограничена конечнымъ числомъ рѣшеній, но допускаетъ ихъ сколько угодно. Мы не утверждаемъ здѣсь, какъ и въ ст. 200, что истолкованіе особенностей $\frac{N}{0}$ и $\frac{0}{0}$ будетъ *всегда* таково-же, какъ и въ разсмотрѣнныхъ нами простыхъ примѣрахъ; поэтому учащійся долженъ разсматривать особо каждый отдѣльный видъ могущихъ встрѣтиться примѣровъ.

Разные примѣры къ главѣ XIV.

1. Упростить выраженіе

$$3a-\left[b+\left\{2a-(b-c)\right\}\right]+{}^1/_2+\frac{2c^2-{}^1/_2}{2c+1}.$$

2. Сократить и привести въ простѣйшій видъ выраженіе

$$\frac{6x^4+10x^3+2x^2-20x-28}{3x^3+14x^2+22x+21}.$$

3. Найти значеніе $\frac{x-a}{b}-\frac{x-b}{a}$, когда $x=\frac{a^2}{a-b}$.

4. Упростить $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$.

5. Показать, что $\frac{d^m(a-b)(b-c)+b^m(a-d)(c-d)}{c^m(a-b)(a-d)+a^m(b-c)(c-d)}=\frac{b-d}{a-c}$,

когда $m=1$, или 2.

6. Привести къ простѣйшему виду выраженіе

$$\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}.$$

7. Если $xy+yz+zx=1$, то показать, что

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

8. Рѣшить уравненіе

$$(x-2a)^3+(x-2b)^3=2(x-a-b)^3.$$

9. Рѣшить совмѣстныя уравненія:

$$x+y+z=a+b+c,$$
$$bx+cy+az=cx+ay+bz=ab+bc+ca.$$

10. Найти общее наименьшее кратное выраженій

$x^3+6x^2+11x+6$, $x^3+7x^2+14x+8$,
$x^3+8x^2+19x+12$ и $x^3+9x^2+26x+24$.

ГЛАВА XV.

Особенности, представляющіяся при рѣшеніи уравненій первой степени.

203. Въ предыдущей главѣ мы указали на формы $\frac{N}{0}$ и $\frac{0}{0}$, могущія встрѣтиться при рѣшеніи уравненій первой степени. Теперь мы изслѣдуемъ смыслъ такихъ формъ, когда онѣ представляются намъ при рѣшеніи *совмѣстныхъ уравненій* первой степени. Припомнимъ сначала уже полученные нами результаты.

204. Всякое уравненіе первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ можетъ быть приведено къ виду $ax=b$. Отсюда мы получаемъ $x=\frac{b}{a}$.

Если $a=0$, то значеніе x принимаетъ видъ $\frac{b}{0}$; въ этомъ случаѣ не существуетъ никакого конечнаго значенія для x, которое могло-бы удовлетворить уравненію, потому что, какова-бы ни была конечная величина, данная x-су, такъ какъ $ax=0$, то мы всегда имѣемъ $0=b$, что не возможно. Если $a=0$ и $b=0$, то значеніе x принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$;

въ этомъ случаѣ всякое конечное значеніе x можетъ считаться удовлетворяющимъ уравненію, такъ какъ, каково-бы ни было конечное значеніе, данное x су, мы всегда имѣемъ $0=0$. Если $b=0$, а a неравно 0, тогда, разумѣется, $x=0$; этотъ случай не требуетъ никакого замѣчанія.

205. Положимъ теперь, что мы имѣемъ два уравненія съ двумя неизвѣстными величинами; пусть они будутъ

$$ax+by=c \text{ и } a'x+b'y=c'.$$

Сдѣлаемъ сперва замѣчаніе относительно принятаго обозначенія. Въ первомъ уравненіи мы употребляемъ *нѣкоторыя буквы* для означенія извѣстныхъ величинъ, а потому для обозначенія соотвѣтствующихъ величинъ во второмъ уравненіи мы употребляемъ *соотвѣтственно тѣ-же буквы со значками;* здѣсь a и a' не имѣютъ никакой взаимной зависимости по величинѣ, хотя имѣютъ то общее, что каждое изъ нихъ составляетъ коэффиціентъ при x, одно въ первомъ, а другое во второмъ уравненіи. Опытъ покажетъ учащемуся выгоды такого обозначенія.

Вмѣсто значковъ или ударенiй иногда употребляютъ числа, подписывая ихъ внизу буквъ; такъ a_1 и a_2 могутъ употребляться соотвѣтственно вмѣсто a и a'.

Рѣшая данныя уравненія, мы получаемъ

$$x=\frac{b'c-bc'}{b'a-ba'},\quad y=\frac{a'c-ac'}{a'b-ab'}.$$

I. Положимъ, что $b'a-ba'=0$; тогда значенія x и y принимаютъ видъ $\frac{A}{0}$ и $\frac{B}{0}$; поэтому мы должны возвратиться къ даннымъ уравненіямъ, чтобы найти смыслъ въ такого рода результатахъ. Изъ условія $b'a-ba'=0$ мы получаемъ $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=k$ (положимъ); тогда $a'=ka$ и $b'=kb$. Подставивъ эти значенія a' и b', мы найдемъ, что второе изъ уравненій можно написать такъ:

$$kax+kby=c',$$

откуда

$$ax+by=\frac{c'}{k}.$$

Но если $\frac{c'}{k}$ отличается отъ c, то второе уравненіе *несовмѣстно* съ первымъ изъ данныхъ уравненій, потому что $ax+by$ не можетъ равняться двумъ различнымъ величинамъ. Такимъ образомъ мы можемъ заключить, что когда рѣшенія представляются подъ видомъ $\frac{A}{0}$ и $\frac{B}{0}$, то это указываетъ на то, что данныя уравненія несовмѣстны, а слѣдовательно и *не могутъ быть рѣшены.*

II. Теперь положимъ, что $b'a - ba' = 0$, такъ что $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$, а также и $\frac{c'}{c} = \frac{a'}{a}$, а слѣдовательно и $= \frac{b'}{b}$. Въ этомъ случаѣ числители въ значеніяхъ x и y будутъ равняться нулю такъ же, какъ и знаменатели, такъ что выраженія для x и y примутъ видъ $\frac{0}{0}$. Но какъ мы уже показали раньше, второе изъ данныхъ уравненій можетъ быть написано въ видѣ

$$ax + by = \frac{c'}{k}.$$

Но теперь $\frac{c'}{k} = c$, такъ что второе данное уравненіе является простымъ повтореніемъ перваго; и такимъ образомъ мы въ сущности имѣемъ одно уравненіе, заключающее двѣ неизвѣстныя величины. Но тогда мы не можемъ *опредѣлить* x и y, потому что здѣсь можно найти сколько угодно значеній, которыя удовлетворяли-бы *одному* уравненію съ двумя неизвѣстными. Въ этомъ случаѣ мы говоримъ, что данныя уравненія *не независимы*, и что значенія x и y *неопредѣленны*.

206. До сихъ поръ мы предполагали, что ни одна изъ величинъ a, b, c, a', b', c' не равняется нулю; такимъ образомъ, если значеніе одной изъ неизвѣстныхъ принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$ или $\frac{A}{0}$, то и значеніе другой принимаетъ *тотъ-же* видъ. Но если нѣкоторыя изъ предыдущихъ величинъ будутъ нулями, тогда не необходимо, чтобы оба неизвѣстныя представлялись *въ одномъ и томъ-же* видѣ. Напримѣръ, положимъ, что a и a' будутъ нули; тогда значеніе x приметъ видъ $\frac{A}{0}$, а значеніе y представится подъ видомъ $\frac{0}{0}$. Но въ этомъ случаѣ данныя уравненія приводятся къ

$$by = c \text{ и } b'y = c';$$

они даютъ

$$y = \frac{c}{b} \text{ и } y = \frac{c'}{b'}.$$

Такимъ образомъ мы будемъ имѣть два случая. Во-первыхъ, если $\frac{c}{b}$ *не равно* $\frac{c'}{b'}$, то уравненія не совмѣстны. Во-вторыхъ, если $\frac{c}{b}$ равно $\frac{c'}{b'}$, то два уравненія обращаются на самомъ дѣлѣ въ одно. Во второмъ случаѣ, такъ какъ соотношеніе $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$ заставляетъ равнымъ образомъ

уничтожаться и числитель, то x и y оба принимаютъ видъ $\frac{0}{0}$; въ этомъ случаѣ x остается неопредѣленнымъ, но y—наоборотъ опредѣленнымъ, потому что онъ равняется $\frac{c}{b}$.

207. Прежде чѣмъ разсматривать особенности, могущія встрѣтиться при рѣшеніи трехъ совмѣстныхъ уравненій заключающихъ три неизвѣстныя величины, мы покажемъ еще другой способъ рѣшенія такихъ уравненій.

Пусть данныя уравненія будутъ

$$ax+by+cz=d,\ a'x+b'y+c'z=d',\ a''x+b''y+c''z=d''.$$

Пусть l и m означаютъ двѣ величины, значенія которыхъ пока остаются неопредѣленными или неизвѣстными. Умножимъ второе изъ данныхъ уравненій на l, а третье на m; сложивъ ихъ затѣмъ всѣ, получимъ:

$$ax+by+cz+l(a'x+b'y+c'z)+m(a''x+b''y+c''z)=d+l'd+m''d,$$

то-есть

$$x(a+la'+ma'')+y(b+lb'+mb'')+z(c+lc'+mc'')=d+l'd+m''d.$$

Дадимъ теперь такія значенія l и m, при которыхъ бы коэффиціенты y и z въ послѣднемъ уравненіи обратились въ нули, то-есть пусть

$$b+lb'+mb''=0,\quad c+lc'+mc''=0.$$

Такимъ образомъ уравненіе приведется къ

$$x(a+la'+ma'')=d+ld'+md'',$$

а слѣдовательно

$$x=\frac{d+ld'+md''}{a+la'+ma''}.$$

Намъ нужно теперь найти значенія l и m и подставить ихъ въ это выраженіе для x-са, тогда значеніе его сдѣлается извѣстнымъ. Мы имѣемъ

$$b+lb'+mb''=0,\quad c+lc'+mc''=0;$$

изъ этихъ уравненій мы получимъ

$$l=\frac{b''c-bc''}{b'c''-b''c'},\quad m=\frac{bc'-b'c}{b'c''-b''c'};$$

подставивъ эти значенія l и m въ выраженіе для x и сдѣлавъ упрощеніе, мы получимъ

$$x=\frac{d(b'c''-b''c')+d'(b''c-bc'')+d''(bc'-b'c)}{a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)}.$$

Подобнымъ-же путемъ мы можемъ получить значенія y и z.

208. Предыдущій способъ рѣшенія называется способомъ *неопредѣленныхъ множителей*, потому что здѣсь мы употребляемъ множи-

тели, которыхъ не опредѣляемъ впередъ, но которымъ даемъ нужное для насъ значеніе во время самаго изслѣдованія.

209. Теперь мы перейдемъ къ замѣчаніямъ относительно значеній x, y и z, выведенныхъ изъ уравненій

$$ax+by+cz=d,\ a'x+b'y+c'z=d',\ a''x+b''y+c''z=d''.$$

Значеніе x-са дано было въ ст. 207. Если учащійся изслѣдуетъ значеніе y-ка, то онъ найдетъ, что знаменатель его будетъ *тотъ-же самый, какъ и знаменатель въ выраженіи для* x, или можетъ быть сдѣланъ тѣмъ-же самымъ посредствомъ измѣненія знаковъ у каждаго члена въ числителѣ и знаменателѣ. То-же нужно сказать и относительно знаменателя для выраженія z.

210. Мы можемъ впрочемъ получить значеніе y и z изъ выраженія, найденнаго для значенія x. Дѣйствительно, начальныя уравненія могутъ быть написаны такимъ образомъ:

$$by+ax+cz=d,\ b'y+a'x+c'z=d',\ b''y+a''x+c''z=d'';$$

мы можемъ сказать тогда, что уравненія, написанныя въ этомъ видѣ, отличаются отъ уравненій, написанныхъ въ первоначальномъ видѣ, только слѣдующими частностями: въ нихъ помѣнялись мѣстами x и y, a и b, a' и b', a'' и b''. Поэтому мы можемъ вывести значеніе y изъ значенія для x по слѣдующему правилу—вмѣсто a, a' и a'' будемъ писать соотвѣтственно b, b' и b'' и наоборотъ. Такимъ образомъ изъ

$$x=\frac{d(b'c''-b''c')+d'(b''c-bc'')+d''(bc'-b'c)}{a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)},$$

мы можемъ вывести

$$y=\frac{d(a'c''-a''c')+d'(a''c-ac'')+d''(ac'-a'c)}{b(a'c''-a''c')+b'(a''c-ac'')+b''(ac'-a'c)}.$$

Сравнивая эти выраженія, мы найдемъ, что знаменатель выраженія для y тотъ-же, что и въ выраженіи для x, но знакъ каждаго члена измѣненъ на противоположный.

Подобнымъ-же образомъ, замѣняя a, a', a'' соотвѣтственно на c, c', c'' и наоборотъ, мы можемъ изъ выраженія для x вывести выраженіе для z или вывести то-же выраженіе для z изъ выраженія для y путемъ замѣны b, b', b'' соотвѣтственно на c, c' и c'' и наоборотъ.

211. Существуетъ и другая система замѣны, съ помощью которой можно вывести значенія y и z изъ выраженія для x. Данныя уравненія были

$$ax+by+cz=d,\ a'x+b'y+c'z=d',\ a''x+b''y+c''z=d'';$$

ихъ можно написать еще такимъ образомъ

$$by+cz+ax=d,\ b'y+c'z+a'x=d',\ b''y+c''z+a''x=d''.$$

Мы можемъ поэтому сказать, что второй видъ отличается отъ перваго только слѣдующими особенностями: x измѣненъ на y, y измѣненъ на z, z измѣнемъ на x; a измѣнено на b, b на c, c на a; a' измѣнено на b', b'—на c', c' на a'; a'' измѣнено на b'', b'' на c'', c'' на a''. Поэтому мы можемъ вывести значеніе y изъ x по слѣдующему правилу: измѣнимъ a на b, b на c, c на a, и сдѣлаемъ такую же замѣну въ буквахъ съ однимъ и съ двумя знаками. Значеніе z можно вывести изъ выраженія для y, пользуясь опять *тѣмъ-же самымъ правиломъ*.

212. Эти способы выводить значеніе y и z изъ выраженія для x посредствомъ перемѣны буквъ могутъ пожалуй показаться сначала учащемуся трудными, но за то они заслуживаютъ большого вниманія, и въ особенности способъ, данный въ ст. 211.

Перейдемъ теперь къ изслѣдованію особенностей, могущихъ представиться въ неизвѣстныхъ величинахъ, выведенныхъ изъ уравненій

$$ax+by+cz=d,\ a'x+b'y+c'z=d',\ a''x+b''y+c''z=d''.$$

213. Наиболѣе важнымъ представляется тотъ случай, когда d, d' и d'' всѣ равны нулю. Тогда данныя уравненія будутъ

$$ax+by+cz=0,\ a'x+b'y+c'z=0,\ a''x+b''y+c''z=0.$$

Очевидно, что $x=0$, $y=0$, $z=0$ удовлетворяютъ этимъ уравненіямъ, а изъ значеній, найденныхъ въ ст. 210, слѣдуетъ, что это *единственныя* значенія, могущія удовлетворять уравненіямъ, *если только* данный здѣсь знаменатель не уничтожается, то-есть, если не будетъ

$$a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)=0.$$

Если такое соотношеніе между коэффиціентами существуетъ, то найденныя для x, y и z значенія принимаютъ видъ $\frac{0}{0}$, и мы тогда должны будемъ возвратиться къ даннымъ уравненіямъ для дальнѣйшаго изслѣдованія.

Мы замѣчаемъ, что когда такое соотношеніе существуетъ, уравненія перестаютъ быть независимыми, и одно изъ нихъ можетъ быть выведено какъ слѣдствіе изъ двухъ другихъ. Въ самомъ дѣлѣ, умножимъ первое изъ данныхъ уравненій на $b''c'-b'c''$, второе на $bc''-b''c$, и третье на $b'c-bc'$ и сложимъ потомъ результаты. Тогда вслѣдствіе даннаго соотношенія мы придемъ къ тожеству $0=0$. Итакъ дѣйствительно, если первое уравненіе помножимъ на $b''c'-b'c''$, второе на $bc''-b''c$ и сложимъ ихъ, то полученный результатъ будетъ равнозначущъ съ третьимъ уравненіемъ, потому что оно можетъ быть получено умноженіемъ найденнаго уравненія на $bc'-b'c$.

Положимъ-же, что такое соотношеніе существуетъ; мы можемъ ограничиться первыми двумя изъ данныхъ уравненій, потому что значенія x, y и z, удовлетворяющія имъ, будутъ необходимо удовлетворять и третьему уравненію. Раздѣлимъ это уравненіе на x; мы получимъ

$$\frac{by}{x}+\frac{cz}{x}+a=0,\quad \frac{b'y}{x}+\frac{c'z}{x}+a'=0,$$

откуда найдемъ $$\frac{y}{x}=\frac{ca'-c'a}{bc'-b'c},\quad \frac{z}{x}=\frac{ab'-a'b}{bc'-b'c}.$$

Слѣдовательно, мы можемъ приписать x *какое угодно значеніе* и вывести соотвѣтствующія ему значенія y и z. Полученный результатъ мы можемъ писать въ болѣе симметричномъ видѣ; пусть p означаетъ какое нибудь произвольное количество, тогда данныя уравненія будутъ удовлетворяться, если

$$x=p(bc'-b'c),\ y=p(ca'-c'a),\ z=p(ab'-a'b).$$

Мы могли-бы точно такимъ-же образомъ воспользоваться вторымъ и третьимъ изъ данныхъ уравненій и опустить первое; тогда мы пришли-бы къ рѣшеніямъ такого вида:

$$x=q(b'c''-b''c'),\ y=q(c'a''-c''a'),\ z=q(a'b''-a''b'),$$

гдѣ q какое-нибудь произвольное количество. Однако эти значенія въ сущности равнозначущи съ первыми, потому что вслѣдствіе предполагаемаго соотношенія между коэффиціентами мы найдемъ

$$\frac{p(bc'-b'c)}{q(b'c''-b''c')}=\frac{p(ca'-c'a)}{q(c'a''-c''a')}=\frac{p(ab'-a'b)}{q(a'b''-a''b')}.$$

214. Теперь разсмотримъ тѣ особенности, которыя могутъ представиться, когда d, d' и d'' не будутъ всѣ нулями.

Сперва мы покажемъ, что если значеніе какой-нибудь изъ неизвѣстныхъ величинъ принимаетъ видъ $\frac{N}{0}$, то данныя уравненія становятся несовмѣстными. Положимъ напримѣръ, что такой видъ принимаетъ значеніе x, то-есть положимъ, что

$$a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)=0.$$

Понятно, что если-бы данныя уравненія были совмѣстны, то всякое уравненіе, правильнымъ образомъ выведенное изъ нихъ, должно быть справедливо. Помножимъ теперь первое изъ данныхъ уравненій на $b''c'-b'c''$, второе на $bc''-b''c$, третье на $b'c-bc'$ и сложимъ ихъ. Мы найдемъ, что коэффиціенты при y и z въ полученномъ уравненіи уничтожатся, а коэффиціентъ при x равенъ нулю по предположенію. Такимъ образомъ первая часть полученнаго уравненія уничтожается, но вторая часть не уничтожается; отсюда слѣдуетъ, что полученное такимъ образомъ уравненіе невозможно, а слѣдовательно уравненія, изъ которыхъ оно выведено, не могутъ быть совмѣстными.

215. Однако мы не могли-бы съ увѣренностью сказать, что, если значеніе одной изъ неизвѣстныхъ величинъ принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$, то урав-

ненія совмѣстны, но не независимы. Дѣйствительно, возможно, что значеніе одной изъ неизвѣстныхъ можетъ принять такой видъ, между тѣмъ какъ значеніе другой представится подъ видомъ $\frac{N}{0}$, но какъ мы показали въ предыдущей статьѣ, появленіе $\frac{N}{0}$ есть указаніе на то, что данныя уравненія *несовмѣстны*. Напримѣръ, положимъ, что уравненія будутъ

$$ax+by+cz=d,\ a'x+by+cz=d',\ a''+by+cz=d''.$$

Здѣсь мы найдемъ, что значенія y и z примутъ видъ $\frac{N}{0}$ и что x приметъ видъ $\frac{0}{0}$.

Сверхъ того, если значенія *всѣхъ* неизвѣстныхъ величинъ примутъ видъ $\frac{0}{0}$, то мы не можемъ съ увѣренностью утверждать, что данныя уравненія совмѣстны, но не самостоятельны. Напримѣръ, положимъ, что уравненія будутъ

$$ax+by+cz=d,\ ax+by+cz=d',\ ax+by+cz=d'';$$

здѣсь мы найдемъ, что значенія неизвѣстныхъ величинъ примутъ видъ $\frac{0}{0}$, но и самыя уравненія очевидно несовмѣстны, если только d, d', d'' не равны между собою.

216. Мы можемъ показать, что если числители въ значеніяхъ x, y и z всѣ обращаются въ нуль, то и знаменатели также уничтожаются, если принять, что d, d' и d'' не всѣ равны нулю.

Дѣйствительно, предположивъ, что эти числители уничтожаются, мы будемъ имѣть

$$d(b'c''-b''c')+d'(b''c-bc'')+d''(bc'-b'c)=0,$$
$$d(c'a''-c''a')+d'(c''a-ca'')+d''(ca'-c'a)=0,$$
$$d(a'b''-a''b')+d'(a''b-ab'')+d''(ab'-a'b)=0.$$

Означимъ эти соотношенія для краткости такимъ образомъ:

$$Ad+Bd'+Cd''=0,\ A'd+B'd'+C'd''=0,\ A''d+B''d'+C''d''=0.$$

На основаніи ст. 213, такъ какъ d, d', d'' не всѣ равны нулю, должно существовать также слѣдующее соотношеніе

$$A(B'C''-B''C')+A'(B''C-BC'')+A''(BC'-B'C)=0.$$

Мы найдемъ, что

$$B'C''-B''C'=a\{a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)\};$$

$B''C-BC''$ и $BC'-B'C$ могутъ быть выражены подобнымъ-же образомъ, такъ что соотношеніе окончательно выразится

$$\{a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)\}^2=0.$$

Это доказываетъ искомый результатъ.

217. Если мы примемъ способъ неопредѣленныхъ множителей, данный въ ст. 207, то можетъ случиться, что два уравненія для нахожденія l и m окажутся не совмѣстными, и намъ нужно изслѣдовать этотъ случай. Положимъ, что въ этомъ случаѣ $b''c'-b'c''=0$, такъ что два уравненія ст. 205 не совмѣстны. Тогда значеніе x можетъ быть получено изъ второго и третьяго изъ данныхъ уравненій, а первое должно быть оставлено безъ употребленія. Дѣйствительно, помножимъ второе изъ данныхъ уравненій на c'', а третье на c' и вычтемъ; тогда коэффиціенты при y и z исчезнутъ, и мы получимъ уравненіе для опредѣленія x. Напримѣръ, положимъ, что уравненія будутъ

$$4x+2y+3z=19,\ x+y+4z=9,\ x+2y+8z=15.$$

Здѣсь значеніе x можетъ быть найдено изъ второго и третьяго уравненій; мы получимъ $x=3$; подставимъ это значеніе x въ три данныя уравненія. Изъ перваго мы будемъ имѣть $2y+3z=7$, а изъ второго и третьяго $y+4z=6$, слѣдовательно $y=2$ и $z=1$.

Съ другой стороны значенія l и m могутъ принять видъ $\frac{0}{0}$, такъ что два уравненія для нахожденія ихъ окажутся не самостоятельными. Изслѣдуемъ этотъ случай. Здѣсь мы имѣемъ $b''c'-b'c''=0$, $bc''-b''c=0$ и $b'c-bc'=0$; эти предположенія равнозначущи съ двумя соотношеніями $\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$ и $\frac{b''}{b}=\frac{c''}{c}$. Положимъ тогда, что $b'=pb$, а слѣдовательно $c'=pc$, а также что $b''=qb$, слѣдовательно $c''=qc$. Такимъ образомъ данныя уравненія будутъ

$$ax+by+cz=d,\ a'x+pby+pcz=d',\ a''x+qby+qcz=d'',$$

и ихъ можно будетъ написать такъ:

$$ax+by+cz=d,\ \frac{a'}{p}x+by+cz=\frac{d'}{p},\ \frac{a''}{q}+by+cz=\frac{d''}{q}.$$

Здѣсь x можетъ быть найдено изъ какихъ нибудь двухъ уравненій; если мы *не получаемъ* одного и того-же значенія изъ каждой пары, то данныя уравненія, разумѣется, *несовмѣстны;* если-же мы *получаемъ* то-же значеніе для x, тогда данныя уравненія не будутъ независимыми; и дѣйствительно, въ послѣднемъ случаѣ мы должны имѣть только *одно* уравненіе для нахожденія $by+cz$, такъ что значенія y и z будутъ *неопредѣленными.* Напримѣръ, положимъ, что данныя уравненія будутъ:

$$x+2y+3z=10,\ 3x+4y+6z=23,\ x+6y+9z=24.$$

Взявъ какія нибудь два изъ этихъ уравненій, мы можемъ найти

$x=3$; подставивъ затѣмъ это значеніе x въ какое нибудь изъ трехъ уравненій, мы получимъ $2y+3z=7$; такимъ образомъ y и z останутся *неопредѣленными*. Если кромѣ того правая часть одного изъ данныхъ уравненій будетъ измѣнена, то мы не получимъ одного и того-же значенія x изъ каждой пары уравненій, и такимъ образомъ данныя уравненія будутъ несовмѣстны.

218. Въ предыдущихъ статьяхъ мы предполагали, что данныя уравненія рѣшены, и изъ особыхъ видовъ рѣшеній выводили заключенія о свойствѣ данныхъ уравненій. Возьмемъ теперь одинъ примѣръ изслѣдованія соотношенія между уравненіями, предварительно не рѣшая уравненій. Положимъ, что уравненія будутъ, какъ и раньше

$$ax+by+cz=d,\ a'x+b'y+c'z=d',\ a''x+b''y+c''z=d'';$$

и найдемъ, какія соотношенія должны существовать между извѣстными величинами, чтобы третье уравненіе можно было вывести изъ другихъ двухъ посредствомъ умноженія ихъ на прилично выбранныя количества и сложенія результатовъ. Положимъ, что умноживъ первое уравненіе на λ, а второе на μ и сложивъ ихъ, мы получаемъ результатъ, совпадающій или тожественный съ третьимъ уравненіемъ. Такъ, положимъ, что уравненіе

$$(\lambda a+\mu a')x+(\lambda b+\mu b')y+(\lambda c+\mu c')z=\lambda d+\mu d'$$

равнозначительно съ

$$a''x+b''y+c''z=d'';$$

то-есть положимъ, что

$$\frac{\lambda a+\mu a}{\lambda d+\mu d'}=\frac{a''}{d''},\ \frac{\lambda b+\mu b'}{\lambda d+\mu d'}=\frac{b''}{d''},\ \frac{\lambda c+\mu c'}{\lambda d+\mu d'}=\frac{c''}{d''}.$$

Изъ этихъ уравненій мы выводимъ

$$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{a''d'-a'd''}{ad''-a''d},\ \frac{\lambda}{\mu}=\frac{b''d'-b'd''}{bd''-b''d},\ \frac{\lambda}{\mu}=\frac{c''d'-c'd''}{cd''-c''d}.$$

Слѣдовательно, чтобы третье уравненіе могло быть выведено изъ другихъ двухъ по предложенному способу, мы должны имѣть слѣдующіе соотношенія между извѣстными величинами

$$\frac{a''d'-a'd''}{ad''-a''d}=\frac{b''d'-b'd''}{bd''-b''d}=\frac{c''d'-c'd''}{cd''-c''d}.$$

Легко показать, что если такія соотношенія существуютъ, то значенія x, y и z принимаютъ видъ $\frac{0}{0}$. Дѣйствительно посредствомъ перемноженія мы получаемъ результаты, показывающіе, что числители въ значеніяхъ x, y и z уничтожаются; и тогда по ст. 216 знаменатель тоже уничтожится.

Разные примѣры къ главѣ XV.

1. Привести дробь $\dfrac{x^4+3x^3-7x^2-21x-36}{x^4+2x^3-10x^2-11x-12}$ въ простѣйшій видъ.

2. Показать, что

$$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+abc)-(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)=a^4+b^4+c^4.$$

3. Если $t=\dfrac{2}{2-w}$, $w=\dfrac{2}{2-z}$, $z=\dfrac{2}{2-y}$, $y=\dfrac{2}{2-x}$, то найти отношеніе между t и x.

4. Если $2s=a+b+c$, то показать, что

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}=\frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

5. Показать, что общій наибольшій дѣлитель двухъ количествъ есть наименьшее кратное ихъ общихъ дѣлителей.

6. Рѣшить уравненіе

$$(x-9)(x-7)(x-5)(x-1)=(x-2)(x-4)(x-6)(x-10).$$

7. Рѣшить совокупныя уравненія

$$x+y+z=0,\quad ax+by+cz=0,$$
$$bcx+cay+abz+(a-b)(b-c)(c-a)=0.$$

8. Если $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$, то показать, что

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{2n+1}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}.$$

9. Нѣкто завѣщалъ 121632 рубля своимъ пяти сыновьямъ и тремъ братьямъ, такъ чтобы, по уплатѣ правительственнаго налога съ наслѣдства, доля каждаго сына была вдвое больше чѣмъ доля каждаго изъ братьевъ. Зная, что налогъ на долю дѣтей равнялся одному проценту, а на долю братьевъ—тремъ процентамъ, найти, сколько долженъ получить каждый изъ наслѣдниковъ.

10. Рѣшить уравненіе

$$\frac{1}{a+6a}+\frac{2}{x-3a}+\frac{3}{x+2a}=\frac{6}{x+a}.$$

ГЛАВА XVI.

Возвышеніе въ степень.

219. Если какое нибудь количество послѣдовательно, нѣсколько разъ помножается само на себя, то говорятъ, что оно *возводится* въ степень, и показатель этой степени опредѣляется тѣмъ, сколько разъ количество это берется множителемъ. (Въ англійскихъ сочиненіяхъ возвышеніе въ степень называется *инволюціей*, а извлеченіе корня—*эволюціей*).

Такъ, какъ уже сказано раньше (ст. 16), $a \times a$ или a^2 называется второю степенью a; $a \times a \times a$ или a^3 называется третьей степенью a; и такъ далѣе.

220. Если предъ возвышаемымъ количествомъ стоитъ знакъ минусъ, то знакъ *четныхъ* степеней будетъ положительный, а знакъ *нечетныхъ* степеней—отрицательный.

Дѣйствительно, $-a \times -a = a^2$, $-a \times -a \times -a = a^2 \times -a = -a^3$,

$$-a \times -a \times -a \times -a = -a^3 \times -a = a^4,$$

и такъ далѣе.

221. Какое нибудь *простое* количество, или одночленъ возводится въ степень умноженіемъ показателя у каждаго множителя въ этомъ количествѣ на показателя той степени, въ которую возводится, причемъ знакъ его опредѣляется на основаніи сказаннаго въ предыдущей статьѣ.

Такъ a^m, возвышенное въ n-ю степень, будетъ a^{mn}; дѣйствительно, если мы составимъ произведеніе изъ n множителей, каждый изъ которыхъ есть a^m, то результатъ по правилу умноженія будетъ a^{mn}. Точно также $(ab)^n = ab \times ab \times ab \ldots$ всего n множителей, т. е. $a \times a \times a \ldots$ всего n множителей $\times b \times b \times b \ldots$ всего n множителей, то-есть $a^n \times b^n$. Подобно этому a^2b^3c, возвышенное въ пятую степень, будетъ $a^{10}b^{15}c^5$. Такъ-же $-a^m$, возвышенное въ n-ую степень будетъ $\pm a^{mn}$, гдѣ надо взять знакъ $+$ или $-$, смотря по тому, будетъ-ли n четное или нечетное число. Но такъ какъ $-a^m = -1 \times a^m$, то n-ю степень отъ $-a^m$ можно писать еще такъ: $(-1)^n \times a^{mn}$ или $(-1)^n a^{mn}$.

222. Если возводимое въ степень количество будетъ дробнымъ, то должно возводить въ данную степень отдѣльно числителя и знаменателя. (Ст. 142).

223. Если возводимое въ степень количество будетъ *сложное*, или многочленное, то возвышеніе можетъ быть или только обозначено, или же выполнено на самомъ дѣлѣ. Пусть требуется возводить въ послѣдовательныя степени количество $a+b$; тогда

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ \quad +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ \quad +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ a+b \\ \hline a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3 \\ \quad +a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\ \hline a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \end{array}.$$

Такимъ образомъ, квадратъ или вторая степень отъ $a+b$ будетъ $a^2+2ab+b^2$, третья степень его $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, четвертая степень его будетъ $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$, и такъ далѣе.

Подобно этому мы найдемъ, что вторая, третья и четвертая степени количества $a-b$ соотвѣтственно выразятся: $a^2-2ab+b^2$, $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ и $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$; то-есть всѣ нечетныя степени b будутъ имѣть предъ собою знакъ отрицательный.

Впослѣдствіи мы дадимъ теорему, называемую *бикоміальной*, или *Ньютоновой теоремой*, которая дастъ возможность получать какую угодно степень двучленнаго выраженія, не требуя для этого умноженія на самомъ дѣлѣ.

224. Очевидно, что n-я степень a^m тожественна съ m-ю степенью a^n, потому что каждая изъ нихъ будетъ a^{mn}, и такимъ образомъ мы можемъ достигать одинаковаго результата, пользуясь разными способами возвышенія въ степень. Напримѣръ, мы можемъ найти шестую степень $a+b$ послѣдовательнымъ умноженіемъ на $a+b$, или можемъ найти кубъ отъ $a+b$ и возвести въ квадратъ найденный результатъ, такъ какъ квадратъ отъ $(a+b)^3$ будетъ $(a+b)^6$, или мы можемъ найти сперва квадратъ отъ $a+b$, а потомъ найти кубъ этого результата, такъ какъ кубъ отъ $(a+b)^2$ тоже будетъ $(a+b)^6$.

225. Перемноженіемъ на самомъ дѣлѣ можно показать, что

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac.$$

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

Въ этихъ и подобныхъ примѣрахъ легко замѣтить слѣдующее полезное правило: *квадратъ какого нибудь многочлена состоитъ изъ квадратовъ всѣхъ его членовъ и изъ удвоенныхъ произведеній каждой пары членовъ.*

Полученнымъ выводамъ можно дать также и другой видъ:

$$(a+b+c)^2=a^2+2a(b+c)+b^2+2bc+c^2,$$

$$(a+b+c+d)^2=a^2+2a(b+c+d)+b^2+2b(c+d)+c^2+2cd+d^2.$$

Въ этихъ и подобныхъ примѣрахъ заключается слѣдующее полезное правило: *квадратъ какого нибудь многочлена состоитъ изъ квадратовъ каждаго его члена и изъ удвоеннаго произведенія каждаго члена на сумму всѣхъ слѣдующихъ за нимъ членовъ.*

Правила эти могутъ быть строго доказаны путемъ математическаго *наведенія* или индукціи, который будетъ объясненъ впослѣдствіи.

226. Добавимъ слѣдующіе два примѣра, въ которыхъ мы воспользуемся обоими правилами, данными въ предыдущей статьѣ:

$$(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ac,$$

$$(1-2x+3x^2)^2=1+4x^2+9x^4-4x-12x^3+6x^2$$
$$=1-4x+10x^2-12x^3+9x^4,$$

$$(1+x+x^2+x^3)^2=1+x^2+x^4+x^6+2x+2x^2+2x^3+2x^3+2x^4+2x^5$$
$$=1+2x+3x^2+4x^3+3x^4+2x^5+x^6.$$

227. Выводы, данные въ ст. 55 для куба $a+b$, куба $a-b$ и куба $a+b+c$, слѣдуетъ особенно замѣтить. Можно убѣдиться такъ-же въ справедливости слѣдующаго выраженія:

$$(a+b+c+d)^3=a^3+b^3+c^3+d^3$$
$$+3a^2(b+c+d)+3b^2(a+c+d)+3c^2(a+b+d)+3d^2(a+b+c)$$
$$+6bcd+6acd+6abd+6abc.$$

Примѣры возвышенія въ степень.

1. Найти $(1+2x+3x^2)^2$.
2. Найти $(1-x+x^2-x^3)^2$.
3. Найти $(a+b-c)^3$.
4. Найти $(1+2x+x^2)^3$.
5. Найти $(1+3x+3x^2+x^3)^2+(1-3x+3x^2-x^3)^2$.
6. Показать, что $\dfrac{(27a^4-18a^2b^2-b^4)^2}{64a^2b^4}+\dfrac{(9a^2-b^2)^3(b^2-a^2)}{64a^2b^4}=b^2$.
7. Показать, что $(ax^2+2bxy+cy^2)(aX^2+2bXY+cY^2)$
$$=\{axX+cyY+b(xY+yX)\}^2+(ac-b^2)(xY-yX)^2.$$
8. Показать, что $(x^2+pxy+qy^2)(X^2+pXY+qY^2)=$
$(xX+pyX+qyY)^2+p(xX+pyX+qyY)(xY-yX)+q(xY-yX)^2$,
а также
$=(xX+pxY+qyY)^2+p(xX+pxY+qyY)(yX-xY)+q(xY-yX)^2$.
9. Упростить выраженіе
$$\frac{(1-10x^2+5x^4)(5-30x^2+5x^4)+(5x-10x^3+x^5)(20x-20x^3)}{(5x-10x^3+x^5)^2+(1-10x^2+5x^4)^2}.$$
10. Показать, что $(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)$
$$=(ap-bq+cr+ds)^2+(aq+bp-cs-dr)^2$$
$$+(ar-bs-cp+dq)^2+(as+br+cq+dp)^2.$$

ГЛАВА XVII.

Извлеченіе корней.

228. Извлеченіемъ корней называется способъ опредѣлять такое количество, которое, будучи возведено въ извѣстную степень, равнялось-бы данному количеству.

229. Такъ какъ n-я степень отъ a^m есть a^{mn}, то корень n-й степени изъ a^{mn} долженъ быть a^m; то-есть, чтобы извлечь какой нибудь корень изъ простого количества, мы должны раздѣлить показатель этого количества на показатель искомаго корня.

230. Если извлекаемый корень будетъ нечетной степени, то знакъ корня будетъ такой-же, какъ и знакъ даннаго количества; это слѣдуетъ изъ ст. 220. Такимъ образомъ

$$\sqrt[3]{(-a)^3}=-a.$$

331. Если извлекаемый корень будетъ четной степени, а данное количество будетъ положительное, то корень можетъ быть или положительнымъ, или отрицательнымъ; потому что какъ положительное, такъ и отрицательное количество, возвышенныя въ четную степень, даютъ количество положительное, какъ это слѣдуетъ изъ ст. 220. Такъ

$$\sqrt{(a^2)}=\pm a.$$

232. Если извлекаемый корень будетъ четной степени, а данное количество будетъ отрицательнымъ, то такого корня извлечь нельзя, потому что никакое количество, по возвышеніи его въ четную степень, не дастъ отрицательнаго результата. Такіе корни называются *невозможными*.

233. Корень изъ дроби находится извлеченіемъ корня отдѣльно изъ ея числителя и знаменателя. Такъ

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a^3}{b^3}\right)}=\frac{a}{b} \text{ и } \sqrt[3]{\left(-\frac{a^3}{b^3}\right)}=-\frac{a}{b}.$$

234. Разсмотримъ теперь способъ извлеченія квадратнаго корня изъ сложнаго количества.

Такъ какъ квадратный корень изъ $a^2+2ab+b^2$ есть $a+b$, то мы можемъ придти къ общему правилу извлеченія квадратнаго корня изъ какого нибудь алгебраическаго выраженія, замѣтивъ, какимъ образомъ можно вывести $a+b$ изъ $a^2+2ab+b^2$.

$$\begin{array}{l|l} a^2+2ab+b^2 & (\ a+b \\ \hline a^2 & \\ \hline 2a+b) \ 2ab+b^2 & \\ \quad 2ab+b^2 & \\ \hline \end{array}$$

Расположимъ члены по степенямъ одной буквы a; тогда первый членъ будетъ a^2, а квадратный корень его будетъ a, и это представитъ собою первый членъ искомаго корня. Вычтемъ его квадратъ, т. е. a^2 изъ даннаго выраженія и снесемъ остальные члены $2ab+b^2$. Раздѣлимъ $2ab$ на $2a$, частное b будетъ другимъ членомъ искомаго корня. Умножимъ сумму удвоеннаго перваго и второго члена, т е. $2a+b$ на второй членъ, то-есть на b и вычтемъ произведеніе, то есть $2ab+b^2$ изъ остатка. Этимъ и закончится въ настоящемъ случаѣ все дѣйствіе. Если-бы было больше членовъ, то мы должны-бы были поступить съ $a+b$ такъ-же, какъ поступали съ a; но квадратъ его, т. е. $a^2+2ab+b^2$ былъ уже вычтенъ изъ даннаго выраженія, такъ что нужно-бы было лишь дѣлить остатокъ на удвоенное $a+b$ для полученія новаго члена корня, и тогда, чтобы получить новое вычитаемое, мы должны бы были умножить этотъ членъ на удвоенные члены первый и второй, сложенные съ этимъ членомъ. Дѣйствіе это должно продолжать до тѣхъ поръ, пока не будетъ найденъ искомый корень.

235. Напримѣръ, пусть требуется извлечь квадратный корень изъ выраженія $4x^4+12x^3+5x^2+6x+1$.

$$
\begin{array}{l}
4x^4-12x^3+5x^2+6x+1 \,(\, 2x^2-3x-1 \\
4x^4 \\
\hline
4x^2-3x \,)\, -12x^3+5x^2+6x+1 \\
\quad -12x^3+9x^2 \\
\hline
4x^2-6x-1 \,) \quad -4x^2+6x+1 \\
\quad -4x^2+6x+1 \\
\hline
\end{array}
$$

Здѣсь квадратный корень изъ $4x^4$ есть $2x^2$, который будетъ первымъ членомъ искомаго корня. Вычтемъ квадратъ его, т. е. $4x^4$ изъ всего выраженія; остатокъ будетъ $-12x^3+5x^2+6x+1$. Раздѣлимъ $-12x^3$ на удвоенное $2x^2$, т. е. на $4x^2$; частное будетъ $-3x$, которое и будетъ слѣдующимъ членомъ искомаго корня; умножимъ затѣмъ $4x^2-3x$ на $3x$ и вычтемъ; остатокъ будетъ $-4x^2+6x+1$. Раздѣлимъ его на удвоенную, уже найденную, часть корня, то-есть на $4x^2-6x$; это дастъ -1; произведеніе $4x^2-6x-1$ на -1 есть $-4x^2+6x+1$ и когда мы вычтемъ его, то уже не останется никакого остатка; такимъ образомъ искомый корень будетъ $2x^2-3x-1$.

Возьмемъ еще примѣръ. Найдемъ квадратный корень изъ выраженія $x^6-6ax^5+15a^2x^4-20a^3x^3+15a^4x^2-6a^5x+a^6$. Дѣйствіе расположится слѣдующимъ образомъ:

$$
\begin{array}{l}
x^6-6ax^5+15a^2x^4-20a^3x^3+15a^4x^2-6a^5x+a^6 \,(\, x^3-3ax^2+3a^2x-a^3 \\
x^6 \\
\hline
2x^3-3ax^2 \,)\, -6ax^5+15a^2x^4-20a^3x^3+15a^4x^2-6a^5x+a^6
\end{array}
$$

*

$$
\begin{array}{l|l}
 & -6ax^5+9a^2x^4 \\
\hline
2x^3-6ax^2+3a^2x & 6a^2x^4-20a^3x^3+15a^4x^2-6a^5x+a^6 \\
 & 6a^2x^4-18a^3x^3+9a^4x^2 \\
\hline
2x^3-6ax^2+6a^2x-a^3 & -2a^3x^3+6a^4x^2-6a^5x+a^6 \\
 & -2a^3x^3+6a^4x^2-6a^5x+a^6 \\
\hline
\end{array}
$$

236. Уже было замѣчено (ст. 231), что всякій корень четной степени допускаетъ два знака. Такъ, въ первомъ примѣрѣ ст. 235 было найдено, что выраженіе $2x^2-3x-1$ есть квадратный корень даннаго тамъ выраженія, но точно также и $-2x^2+3x+1$ будетъ его квадратнымъ корнемъ, какъ это легко провѣрить. Въ самомъ дѣлѣ, дѣйствіе начиналось съ извлеченія квадратнаго корня изъ $4x^4$, за корень котораго можно принять какъ $+2x^2$, такъ и $-2x^2$; если-бы мы приняли послѣднее значеніе и продолжали-бы дѣйствіе какъ прежде, то получили-бы въ результатѣ $-2x^2+3x+1$. Подобно этому и въ другомъ примѣрѣ ст. 235 мы видимъ, что $-x^3+3ax-3a^2x+a^3$ будетъ также квадратнымъ корнемъ, какъ и найденное выраженіе.

237. Корень *четвертой* степени какого нибудь выраженія можетъ быть найденъ извлеченіемъ изъ квадратнаго корня новаго квадратнаго корня. Подобно этому корень *восьмой* степени можетъ быть найденъ послѣдовательнымъ троекратнымъ извлеченіемъ квадратнаго корня; корень *шестнадцатой* степени—четырехкратнымъ извлеченіемъ квадратнаго корня, и такъ далѣе.

Напримѣръ, пусть требуется извлечь корень четвертой степени изъ выраженія

$$81x^4-432x^3+864x^2-768x+256.$$

Поступая, какъ въ ст. 235, мы найдемъ, что квадратный корень этого выраженія будетъ $9x^2-24x+16$, а квадратный корень этого послѣдняго $3x-4$, который будетъ такимъ образомъ корнемъ четвертой степени изъ предложеннаго выраженія.

238. Предыдущее изслѣдованіе относительно извлеченія квадратнаго корня изъ алгебраическаго выраженія послужитъ намъ для доказательства правила извлеченія квадратнаго корня изъ чиселъ, даваемаго въ Ариѳметикѣ.

Квадратный корень изъ 100 есть 10, изъ 10000 есть 100, изъ 1000000 онъ будетъ 1000, и такъ далѣе; отсюда слѣдуетъ, что квадратный корень изъ числа меньшаго чѣмъ 100 долженъ состоять лишь изъ одной цифры; квадратный корень числа, заключающагося между 100 и 10000, будетъ состоять изъ двухъ цифръ; квадратный корень числа, заключающагося между 10000 и 1000000, будетъ состоять изъ трехъ цифръ, и такъ далѣе. Поэтому, если поставимъ точку надъ цифрой единицъ числа и такія-же точки надъ каждой второй послѣ нея

цифрой, то число точекъ покажетъ число цифръ въ квадратномъ корнѣ. Такъ, квадратный корень числа 4356 состоитъ изъ двухъ цифръ, а квадратный корень числа 611524 состоитъ изъ трехъ цифръ, и такъ далѣе.

239. Положимъ, что требуется извлечь квадратный корень изъ 4356. Поставимъ точки согласно съ правиломъ; такимъ образомъ мы видимъ, что корень состоитъ изъ двухъ цифръ. Пусть $a+b$ обозначаетъ этотъ корень, гдѣ a представляетъ цифру десятковъ, а b цифру единицъ. Тогда a должно быть наибольшимъ кратнымъ для 10, квадратъ котораго не превышалъ-бы 4300; мы найдемъ, что такое число есть 60. Вычтемъ a^2, то-есть квадратъ 60 изъ даннаго числа; остатокъ будетъ 756. Раздѣлимъ этотъ остатокъ на $2a$, то-есть на 120; частное будетъ 6, которое и представитъ собой значеніе b. Тогда $(2a+b)b$, то-есть 126×6 или 756 будетъ то, что нужно вычесть; и какъ теперь уже нѣтъ новаго остатка, то мы заключаемъ, что $60+6$ или 66 есть искомый квадратный корень.

```
. .
4 3 5 6 ( 6 0 + 6
3 6 0 0
-------
1 2 0 + 6 ) 7 5 6
      7 5 6
      -----
```

Раньше было замѣчено, что a есть наибольшее кратное 10, квадратъ котораго не превышаетъ 4300. Дѣйствительно, a не можетъ быть *не наибольшимъ* кратнымъ отъ десяти. Предположимъ, если возможно, что оно будетъ нѣкоторымъ кратнымъ, меньшимъ чѣмъ это, и назовемъ его буквой x; тогда такъ какъ x стоитъ на мѣстѣ десятковъ, а b на мѣстѣ единицъ, то $x+b$ будетъ меньше чѣмъ a; поэтому квадратъ $x+b$ будетъ меньше чѣмъ a^2, а слѣдовательно $x+b$ будетъ меньше истиннаго корня.

Если корень состоитъ изъ трехъ цифръ, то пусть a представляетъ сотни, а b десятки; тогда, получивши a и b по предыдущему, мы можемъ разсматривать сотни и десятки вмѣстѣ, какъ новое значеніе a и найти новое значеніе b для единицъ.

Для краткости нули можно не писать, такъ что дѣйствіе можно производить по слѣдующему правилу:

Поставимъ точки надъ цифрой единицъ и надъ каждой цифрой дальше, чрезъ одну и такимъ образомъ раздѣлимъ все число на нѣсколько граней. Найдемъ наибольшее число, квадратъ котораго содержался-бы въ первой грани; это будетъ первая цифра корня; вычтемъ квадратъ ея изъ первой грани и къ остатку снесемъ слѣдующую грань. Раздѣлимъ это количество, не обращая вниманія на послѣднюю его цифру, на удвоенную найденную уже часть корня и результатъ дѣленія присоединимъ къ корню и къ дѣлителю; затѣмъ помножимъ дѣлитель въ настоящемъ его видѣ на полу-

```
. .
4 3 5 6 ( 6 6
2 6
-------
1 2 6 ) 7 5 6
      7 5 6
      -----
```

ченную сейчасъ цифру корня и произведеніе вычтемъ изъ остатка Если есть еще грани, то ихъ нужно снести и продолжать дѣйствіе въ этомъ-же порядкѣ.

240. Извлечь квадратный корень изъ 611524 и изъ 10246401.

```
        6 1̇ 1 5̇ 2 4̇ (782          1 0̇ 2 4̇ 6 4̇ 0 1̇ (3201
        4 9                        9
      ---------                  ---------
  148) 1 2 1 5                 62) 1 2 4
       1 1 8 4                     1 2 4
      ---------                  ---------
  1562) 3 1 2 4                6401) 6 4 0 1
        3 1 2 4                      6 4 0 1
        -------                      -------
```

Во второмъ примѣрѣ учащійся долженъ обратить вниманіе на появленіе въ корнѣ нуля.

241. Правило для извлеченія квадратнаго корня изъ десятичной дроби вытекаетъ изъ предыдущаго. Кромѣ того, мы должны замѣтить, что если какая нибудь десятичная дробь будетъ возвышена въ квадратъ, то въ результатѣ должно быть *четное* число десятичныхъ цифръ, и что поэтому не можетъ быть получено точнаго квадратнаго корня изъ такой десятичной дроби, которая въ простѣйшемъ своемъ видѣ заключаетъ *нечетное* число десятичныхъ цифръ.

Квадратный корень изъ 21.76 равняется одной десятой квадратнаго корня изъ 100×21.76, т. е. изъ 2176. Точно такъ-же квадратный корень изъ 0.0361 равняется одной сотой квадратнаго корня изъ 10000×0.0361, т.-е. изъ 361. Такимъ образомъ мы можемъ вывести слѣдующее правило для извлеченія квадратнаго корня изъ десятичныхъ дробей: Начиная съ единицъ, поставимъ точку надъ каждой *второй* цифрой, продолжая это какъ въ правую, такъ и въ лѣвую сторону, и будемъ извлекать корень, какъ изъ цѣлаго числа, а потомъ въ результатѣ отдѣлимъ столько цифръ на десятичныя, сколько граней или двухциферныхъ періодовъ приходится на десятичную часть даннаго числа.

242. Читатель, вѣроятно, скоро убѣдится, что многія цѣлыя числа, строго говоря, не имѣютъ квадратнаго корня. Возьмемъ напримѣръ 7. Очевидно, квадратный корень его не можетъ быть цѣлымъ числомъ, потому что квадратъ 2 меньше 7, а квадратъ 3 больше 7. Но квадратный корень 7 не можетъ быть такъ-же и дробнымъ. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ какую нибудь дробь, которая была-бы дробью въ собственномъ смыслѣ, а не цѣлымъ числомъ, представленнымъ въ видѣ дроби, и умножимъ эту дробь саму на себя; произведеніе это можетъ быть только дробью-же; справедливость этого легко провѣрить на всякихъ примѣрахъ, и это положеніе можно доказать, основываясь

на началахъ главы LII. Такимъ образомъ для 7 не существуетъ квадратнаго корня ни цѣлаго, ни дробнаго. Подобно этому никакое цѣлое число не можетъ имѣть квадратнаго корня, если это число не будетъ встрѣчаться въ ряду чиселъ 1, 4, 9, 16, ..., представляющихъ квадраты натуральныхъ чиселъ: 1, 2, 3, 4, ... и называющихся *квадратными* числами.

243. Если при извлеченіи квадратнаго корня изъ какого нибудь цѣлаго числа, послѣ того какъ найдена будетъ цифра единицъ корня, получится остатокъ, то это будетъ служить признакомъ, что данное число не имѣетъ точнаго квадратнаго корня. Мы можемъ, если угодно, перейти къ приближенію съ любою точностью, поставивъ въ концѣ даннаго числа заиятую и приписавъ къ нему какое угодно четное число нулей, и продолжать дѣйствіе извлеченія. Такимъ образомъ мы получимъ десятичную часть, которую нужно прибавить къ найденной раньше цѣлой части.

Нужно замѣтить, что въ этомъ случаѣ, сколько-бы мы не продолжали дѣйствіе, мы не достигнемъ того, чтобы цифры корня стали *повторяться* и обнаружили-бы *періодичность*. Дѣйствительно, періодическая дробь можетъ быть выражена точною обыкновенною дробью по правиламъ, которыя даются въ руководствахъ Ариѳметики и будутъ доказаны здѣсь въ главѣ XXXI; слѣдовательно, если-бы квадратный корень представился въ видѣ періодической десятичной дроби, то его можно было-бы выразить простою дробью, которая и была-бы точнымъ квадратнымъ корнемъ, а это противорѣчило-бы предположенію.

Подобнымъ образомъ, если какая нибудь десятичная дробь не имѣетъ точнаго квадратнаго корня, то мы можемъ приписать къ ней нули, и найти корень съ желаемою степенью точности.

244. Вотъ примѣръ извлеченія квадратнаго корня изъ 12, до семи десятичныхъ цифръ.

```
      12.0000...(3.4641016
       9
     ----
  64)300
      256
     -----
 686)4400
      4116
     ------
6924)28400
      27696
     -------
69281)70400
      69281
     -------
6928201)11190000
```

$$\begin{array}{r} 6928201 \\ \hline 69282026)426179900 \\ 415692156 \\ \hline 10487744 \end{array}$$

Такимъ образомъ мы видимъ, въ какомъ смыслѣ можно говорить о приближенномъ квадратномъ корнѣ изъ 12: квадратъ 3.4641016 меньше 12, а квадратъ 3.4641017 больше 12; первый квадратъ отличается отъ 12 на дробь, числитель которой равенъ 10487744, а знаменатель 10^{14}.

245. Пользуясь началами главы LII, можно доказать, что никакая дробь не можетъ имѣть квадратнаго корня, если по приведеніи къ простѣйшему виду числитель и знаменатель ея не будутъ оба квадратными числами. Но мы можемъ съ какой угодно точностью приближаться къ квадратному корню изъ дроби.

Положимъ напримѣръ, что требуется найти квадратный корень изъ $\frac{3}{7}$. Мы могли-бы поступать такимъ образомъ: $\sqrt{\frac{3}{7}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ и затѣмъ приближенно найти корень изъ 3 и корень изъ 7, послѣ чего раздѣлить первый результатъ на второй; но на дѣлѣ предпочитаютъ употреблять слѣдующіе способы:

Обратимъ $\frac{3}{7}$ въ десятичную дробь съ желаемою степенью приближенія и найдемъ приближенный квадратный корень изъ этой десятичной дроби.

Или поступимъ такъ: $\sqrt{\frac{3}{7}}=\sqrt{\frac{3\times 7}{7\times 7}}=\frac{\sqrt{(3\times 7)}}{\sqrt{(7\times 7)}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$; найдемъ приближенный корень изъ 21 и раздѣлимъ результатъ на 7.

246. *Когда найдено уже* n+1 *цифръ квадратнаго корня по обыкновенному способу, то слѣдующія* n *цифръ можно найти простымъ дѣленіемъ, причемъ предполагается, что* 2n+1 *есть все число цифръ.*

Пусть N представляетъ число, квадратный корень котораго требуется найти, пусть a будетъ уже найденная часть корня, а x часть, которую остается найти; тогда

$$\sqrt{N}=a+x,$$

такъ что

$$N=a^2+2ax+x^2,$$

а потому

$$N-a^2=2ax+x^2,$$

и

$$\frac{N-a^2}{2a}=x+\frac{x^2}{2a}.$$

Итакъ $N-a^2$, раздѣленное на $2a$, дастъ остальную часть искомаго квадратнаго корня, т. е. x, *сложенную* съ $\frac{x^2}{2a}$; и намъ нужно показать, что $\frac{x^2}{2a}$ есть дробь *въ собственномъ смыслѣ*, такъ что пренебрегая остаткомъ отъ дѣленія, мы получаемъ требуемую часть. Дѣйствительно, по предположенію x содержитъ въ себѣ n цифръ, такъ что x^2 не можетъ содержать больше $2n$ цифръ; но a содержитъ $2n+1$ цифръ, а потому $\frac{x^2}{2a}$ есть дробь въ собственномъ смыслѣ.

Предыдущее доказательство предполагаетъ, что N есть цѣлое число, имѣющее точный квадратный корень; но мы легко можемъ распространить полученное правило и на другіе случаи. Напримѣръ, положимъ, что мы ищемъ квадратный корень изъ 12 до четвертой десятичной цифры включительно. Въ такомъ случаѣ мы должны найти на самомъ дѣлѣ квадратный корень изъ 1200000000 и раздѣлить результатъ на 10000. Но способъ ст. 244 показываетъ, что $1200000000-1119=(34641)^2$. Здѣсь N можетъ представлять $1200000000-1119$, тогда a представитъ собою 34600, а x будетъ 41. Итакъ доказательство убѣждаетъ насъ, что мы можемъ получить 41 дѣленіемъ 2840000 на 69200, т. е. дѣленіемъ 28400 на 692, но по правиламъ Ариѳметики это такъ и есть на самомъ дѣлѣ.

Подобнымъ-же образомъ, если-бы мы искали квадратный корень изъ 12 до шестой десятичной включительно, то послѣднія три цифры можно было-бы получить дѣленіемъ 704000 на 6928.

247. Займемся теперь способомъ извлеченія кубическаго корня изъ сложныхъ количествъ.

Кубическій корень изъ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ есть $a+b$, и для полученія его мы можемъ поступать такъ: Расположимъ члены по нисходящимъ степенямъ одной буквы a, тогда первый членъ будетъ a^3, кубическій корень котораго есть a; это и будетъ первымъ членомъ искомаго корня. Вычтемъ кубъ его, то-есть a^3 изъ всего выраженія и снесемъ остатокъ $3a^2b+3ab^2+b^3$. Раздѣлимъ первый членъ остатка на $3a^2$; частное будетъ b—это будетъ слѣдующій членъ искомаго корня; вычтемъ потомъ $3a^2b+3ab^2+b^3$ изъ остатка; послѣ этого весь кубъ $a+b$ будетъ исчерпанъ. Этимъ и закончится дѣйствіе въ настоящемъ случаѣ. Если-бы членовъ было больше, то мы должны были-бы поступать съ $a+b$ такъ-же, какъ раньше поступали съ a; но такъ какъ кубъ его, т. е. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ уже вычтенъ былъ раньше изъ предложеннаго

$$
\begin{array}{l|l}
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & (a+b \\
a^3 & \\
\hline
3a^2) \quad 3a^2b+3ab^2+b^3 & \\
\quad\;\; 3a^2b+3ab^2+b^3 &
\end{array}
$$

выраженія, то мы должны-бы были раздѣлить остатокъ на $3(a+b)^2$, чтобъ найти новый членъ корня; и такъ далѣе.

248. При извлеченіи кубичнаго корня изъ болѣе сложныхъ алгебраическихъ выраженій и изъ чиселъ удобно будетъ располагать дѣйствіе, показанное въ предыдущей статьѣ, въ три столбца слѣдующимъ образомъ:

$3a+b$	$3a^2$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ $(a+b$
	$(3a+b)b$	a^3
	$3a^2+3ab+b^2$	$3a^2b+3ab^2+b^3$
		$3a^2b+3ab^2+b^3$

Находимъ сперва первый членъ корня, т. е. a; подпишемъ a^3 подъ даннымъ выраженіемъ въ третьемъ столбцѣ и вычтемъ его. Напишемъ $3a$ въ первомъ столбцѣ и $3a^2$ во второмъ столбцѣ; раздѣлимъ $3a^2b$ на $3a^2$ и получимъ тогда частное b; приложимъ b къ написанному въ первомъ столбцѣ, умножимъ стоящее теперь въ первомъ столбцѣ выраженіе на b, и напишемъ произведеніе во второмъ столбцѣ подъ $3a^2$; приложимъ его къ прежнему — получимъ $3a^2+3ab+b^2$; помноживъ это послѣднее на b, найдемъ $3a^2b+3ab^2+b^3$, которое поставимъ въ третьемъ столбцѣ и вычтемъ. Такимъ образомъ и закончимъ дѣйствіе вычитанія $(a+b)^3$ изъ первоначальнаго выраженія. Если-бы были еще члены, то нужно было-бы продолжать то-же дѣйствіе.

249. При продолженіи дѣйствія намъ нужно такъ прикладывать количества къ первому столбцу, чтобы получать *утроенную уже найденную часть корня*. Это удобно сдѣлать такимъ образомъ: Въ первомъ столбцѣ у насъ было уже $3a+b$; подпишемъ $2b$ подъ b и сложимъ; мы получимъ $3a+3b$, что и будетъ утроенное $a+b$, т. е. утроенная найденная часть корня. Кромѣ того мы должны такъ прикладывать новыя количества во второму столбцу, чтобы получать *утроенный квадратъ* найденной части корня. Это удобно сдѣлать такимъ образомъ: Во второмъ столбцѣ у насъ было уже $(3a+b)b$, а подъ нимъ $3a^2+3ab+b^2$; поставимъ b^2 подъ послѣднимъ членомъ и *сложимъ всѣ выраженія, заключающіяся въ трехъ строкахъ*; такимъ образомъ мы получимъ $3a^2+6ab+3b^2$, что представляетъ утроенное $(a+b)^2$, т. е. утроенный квадратъ найденной уже части корня.

$3a+b$	
$2b$	
$3a+3b$	

$(3a+b)b$	
$3a^2+3ab+b^2$	
b^2	
$3a^2+6ab+3b^2$	

250. Примѣръ: Извлечь кубичный корень изъ
$8x^6-36cx^5+66c^2x^4-63c^3x^3+33c^4x^2-9c^5x+c^6$.

$6x^2-3cx$	$12x^4$
$-6cx$	$-3cx(6x^2-3cx)$
$6x^2-9cx+c^2$	$12x^4-18cx^3+9c^2x^2$
	$+9c^2x^2$

$$12x^4 - 36cx^3 + 27c^2x^2$$
$$+ c^2(6x^2 - 9cx + c^2)$$

$$12x^4 - 36cx^3 + 33c^2x^2 - 9c^3x + c^4$$

$8x^6 - 36cx^5 + 66c^2x^4 - 63c^3x^3 + 33c^4x^2 - 9c^5x + c^6$ $(2x^2 - 3cx + c^2$

$8x^6$

$$-36cx^5 + 66c^2x^4 - 63c^3x^3 + 33c^4x^2 - 9c^5x + c^6$$
$$-36cx^5 + 54c^2x^4 - 27c^3x^3$$

$$12c^2x^4 - 36c^3x^3 + 33c^4x^2 - 9c^5x + c^6$$
$$12c^2x^4 - 36c^3x^3 + 33c^4x^2 - 9c^5x + c^6$$

Кубичный корень изъ $8x^6$ есть $2x^2$, что и будетъ первымъ членомъ корня. Подпишемъ $8x^6$ подъ даннымъ выраженіемъ и вычтемъ его. Поставимъ утроенное $2x^2$ въ первомъ столбцѣ и утроенный квадратъ $2x^2$ во второмъ столбцѣ, т. е. въ первомъ столбцѣ поставимъ $6x^2$, а во второмъ $12x^4$. Раздѣлимъ $-36cx^5$ на $12x^4$; такимъ образомъ въ частномъ получимъ $-3cx$, которое будетъ вторымъ членомъ корня. Поставимъ этотъ членъ въ первый столбецъ и умножимъ теперешнее выраженіе перваго столбца, т. е. $6x^2 - 3cx$ на $-3cx$; произведеніе это подпишемъ подъ количествомъ, стоящимъ во второмъ столбцѣ и сложимъ его съ нимъ; тогда мы получимъ $12x^4 - 18cx^3 + 9c^2x^2$; умножимъ это на $-3cx$; поставимъ произведеніе въ третій столбецъ и вычтемъ его изъ остатка. Такимъ образомъ мы найдемъ остатокъ въ третьемъ столбцѣ, а найденная уже часть корня будетъ $2x^3 - 3cx$.

Теперь мы должны приспособить первый и второй столбецъ, какъ это было объяснено въ ст. 249. Поставимъ удвоенное $-3cx$, т. е. $-6cx$ подъ количествомъ, стоящимъ въ первомъ столбцѣ, и сложимъ обѣ строки; такимъ образомъ мы получимъ $6x^2 - 9cx$, представляющее утроенную часть найденнаго корня. Поставимъ квадратъ $-3cx$, т. е. $9c^2x^2$ подъ количествомъ, стоящимъ во второмъ столбцѣ, и сложимъ послѣднія три строки этого столбца; такимъ образомъ мы получимъ $12x^4 - 36cx^3 + 27c^2x^2$, представляющее утроенный квадратъ найденной части корня.

Теперь раздѣлимъ остатокъ въ третьемъ столбцѣ на найденное сейчасъ выраженіе и получимъ послѣдній членъ искомаго корня c^2; затѣмъ, поступая по предыдущему, закончимъ все дѣйствіе.

251. Предыдущее изслѣдованіе объ извлеченіи кубическаго корня изъ алгебраическихъ выраженій поможетъ намъ вывести правило для извлеченія кубическаго корня изъ какого-нибудь числа.

Кубичный корень изъ 1000 есть 10, а изъ 1000000 есть 100, и такъ далѣе; отсюда слѣдуетъ, что кубическій корень числа меньшаго чѣмъ 1000 долженъ состоять изъ одной только цифры; кубическій корень числа, заключающагося между 1000 и 1000000, долженъ состоять изъ

двухъ цифръ, и т. д. Поэтому, если въ какомъ-нибудь числѣ мы поставимъ по точкѣ надъ каждой *третьей* цифрой его, начиная съ единицъ, то число точекъ покажетъ число цифръ въ кубичномъ корнѣ.

252. Положимъ, что требуется извлечь кубичный корень изъ 405224.

210+4	14700	405224 (70+4
	856	343000
	15556	62224
	62224	

Поставимъ точки, какъ требуетъ правило; тогда увидимъ, что корень состоитъ изъ двухъ цифръ. Пусть $a+b$ означаетъ этотъ корень, гдѣ a есть цифра десятковъ, а b цифра единицъ корня. Тогда a должно быть наибольшимъ кратнымъ отъ 10, кубъ котораго меньше 405000; то-есть a должно равняться 70. Подпишемъ кубъ 70, т. е. 343000 въ третьемъ столбцѣ подъ даннымъ числомъ и вычтемъ его. Поставимъ утроенное 70, т. е. 210 въ первый столбецъ и утроенный квадратъ 70, т. е. 14700 во второй столбецъ. Раздѣлимъ остатокъ третьяго столбца на число, стоящее во второмъ столбцѣ, т. е. раздѣлимъ 62224 на 14700; мы получимъ тогда 4, и это будетъ значеніе b. Приложимъ 4 къ первому столбцу, и умножимъ полученную такимъ образомъ сумму на 4, т. е. умножимъ 214 на 4; получимъ тогда 856; поставимъ это во второй столбецъ и сложимъ съ числомъ, которое тамъ есть. Такимъ образомъ мы получимъ 15556; умножимъ это на 4, напишемъ произведеніе въ третьемъ столбцѣ и вычтемъ. Остатокъ будетъ нуль; слѣдовательно 74 будетъ искомый корень. Для краткости нули можно опускать; тогда дѣйствіе расположится слѣдующимъ образомъ:

214	147	405224 (74
	856	343
	15556	62224
		62224

253. Примѣръ. Извлечь кубичный корень изъ 12812904.

63 }	12	12812904 (234
6 }	189)	8
694	1389 }	4812
	9)	4167
	1587	645904
	2776	645904
	161476	

Послѣ полученія первыхъ двухъ цифръ корня, т. е. 23, мы приспособляемъ первый и второй столбцы, какъ это было объяснено въ ст. 249. Подписываемъ удвоенное 3, т. е. 6 подъ первымъ столбцемъ и складываемъ обѣ строки, что дастъ 69; подписываемъ также квадратъ 3 подъ вторымъ столбцемъ и складываемъ послѣднія три строки, что дастъ намъ 1587. Послѣ этого продолжаемъ дѣйствіе, какъ и раньше. Кубическій корень будетъ 234.

254. Примѣръ. Извлечь кубичный корень изъ числа 144182818617453.

152	75	144182818617453 (52437
4	304	125
1564	7804	19182
8	4	15608
157.23	8112	3574818
6	6256	3269824
157297	817456	304994617
	16	247259907
	823728	57734710453
	47169	57734710453
	82419969	
	9	
	82467147	
	1101079	
	8247815779	

Итакъ, кубическій корень этого числа будетъ 52437.

255. Если въ корнѣ есть нѣсколько десятичныхъ цифръ, то въ кубѣ ихъ будетъ втрое больше, а слѣдовательно число цифръ въ десятичной дроби, представляющей точный кубъ и приведенной къ простѣйшему своему виду, необходимо должно быть кратнымъ *трехъ*, а число десятичныхъ цифръ корня будетъ треть этого числа. Слѣдовательно, если данное кубическое число будетъ десятичной дробью, то мы должны поставить точку надъ цифрой его единицъ и надъ каждой третьей отъ нея цифрой вправо и влѣво; тогда число точекъ въ десятичной части даннаго числа укажетъ число десятичныхъ цифръ къ кубическомъ корнѣ.

Если число не имѣетъ точнаго кубичнаго корня, какъ и при извлеченіи квадратнаго корня, то мы можемъ найти его приближенно съ желаемою точностью. См. ст. 243.

256. Найти кубическій корень изъ 1481.544.

31 }	3	1481.544(11.4
2 }	31 }	1
334	331 }	481
	1 }	331
	363	150544
	1336	150544
	37636	

Кубическій корень будетъ 11.4.

257. *Когда найдено обыкновеннымъ способомъ* n+2 *цифры кубическаго корня, то остальныя* n *цифръ можно получить простымъ дѣленіемъ, причемъ предполагается, что во всемъ числѣ* 2n+2 *цифры.*

Пусть N представляетъ число, кубичный корень котораго требуется найти, и пусть a будетъ уже найденная часть корня, а x та часть, которую остается еще найти; тогда

$$\sqrt[3]{N} = a + x,$$

такъ что $$N = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3;$$

поэтому $$N - a^3 = 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$

и $$\frac{N-a^3}{3a^2} = x + \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2}.$$

Такимъ образомъ $N - a^3$, раздѣленное на $3a^2$, дастъ остальную часть искомаго корня или x, сложенную съ $\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2}$; и мы должны показать теперь, что это послѣднее выраженіе есть дробь *въ собственномъ смыслѣ*, такъ что, пренебрегая остаткомъ, происходящимъ отъ дѣленія, мы получимъ искомую часть. Дѣйствительно, по предположенію x меньше чѣмъ 10^n, а a не меньше чѣмъ 10^{2n+1}; такимъ образомъ $\frac{x^2}{a}$ меньше чѣмъ $\frac{10^{2n}}{10^{2n+1}}$ т. е. меньше $\frac{1}{10}$. Затѣмъ $\frac{x^3}{3a^2}$ меньше, чѣмъ $\frac{10^{3n}}{3 \times 10^{4n+2}}$, то-есть меньше $\frac{1}{3 \times 10^{n+2}}$. Слѣдовательно $\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2}$ меньше $\frac{1}{10} + \frac{1}{3 \times 10^{n+2}}$, то-есть меньше единицы.

Замѣчанія, сдѣланныя къ этому въ ст. 246, приложимы такъ-же и здѣсь.

Примѣры извлеченія корней.

Извлечь квадратные корни изъ выраженій, заключающихся въ слѣдующихъ примѣрахъ, отъ 1 до 15 включительно:

1. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$. 2. x^4-4x^3+8x+4.

3. $4x^4+12x^3+5x^2-6x+1$. 4. $4x^4-4x^3+5x^2-2x+1$.

5. $4x^4-12ax^3+25a^2x^2-24a^3x+16a^4$.

6. $25x^4-30ax^3+49a^2x^2-24a^3x+16a^4$.

7. $x^6-6ax^5+15a^2x^4-20a^3x^3+15a^4x^2-6a^5x+a^6$

8. $(a-b)^4-2(a^2+b^2)(a-b)^2+2(a^4+b^4)$.

9. $4\{(a^2-b^2)cd+ab(c^2-d^2)\}^2+\{(a^2-b^2)(c^2-d^2)-4abcd\}^2$.

10. $a^4+b^4+c^4+d^4-2a^2(b^2+d^2)-2b^2(c^2-d^2)+2c^2(a^2-d^2)$.

11. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right)$. 12. $x^4-x^3-\frac{x^2}{4}+4x-2+\frac{4}{x^2}$.

13. $\frac{a^4}{4}+\frac{a^3}{x}+\frac{a^2}{x^2}-ax-2+\frac{x^2}{a^2}$.

14. $a^4+2(2b-c)a^3+(4b^2-4bc+3c^2)a^2+2c^2(2b-c)a+c^4$.

15. $(a-2b)^2x^4-2a(a-2b)x^3+(a^2+4ab-6a-8b^2+12b)x^2$
$-(4ab-6a)x+4b^2-12b+9$.

16. Найти квадратный корень изъ суммы квадратовъ 0.2, 0.4, 0.6 и 0.86.

Извлечь кубическій корень изъ выраженій и чиселъ въ слѣдующихъ примѣрахъ отъ 17 до 23 включительно.

17. $x^6-9x^5+33x^4-63x^3+66x^2-36x+8$.

18. $8x^6+48cx^5+60c^2x^4-80c^3x^3-90c^4x^2+108c^5x-27c^6$.

19. $8x^6-36cx^5+102c^2x^4-171c^3x^3+204c^4x^2-144c^5x+64c^6$.

20. 167.284151. 21. 731189187729.

22. 10970.645048. 23. 13717421083676268902606 31.

24. Извлечь корень *четвертой* степени изъ

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+12.$$

25. Показать, что если число состоитъ изъ n цифръ, то его квадратный корень состоитъ изъ $\frac{1}{4}\{2n+1-(-1)^n\}$ цифръ.

26. Показать, что слѣдующее выраженіе есть точный квадратъ:
$(x^2-yz)^3+(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3-3(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$.

ГЛАВА XVIII.

Теорія показателей.

258. Мы опредѣлили a^m, гдѣ m есть цѣлое и положительное число, какъ произведеніе m множителей, каждый изъ которыхъ равенъ a, и показали, что $a^m \times a^n = a^{m+n}$ и что $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ или $\frac{1}{a^{n-m}}$, смотря по тому, будетъ-ли m больше или меньше n. До сихъ поръ показатель всегда предполагался *положительнымъ и цѣлымъ* числомъ; тѣмъ не менѣе нашли удобнымъ употреблять и такіе показатели, которые не бываютъ ни цѣлыми, ни положительными; и мы должны теперь объяснить смыслъ такихъ показателей.

259. Такъ какъ дробные и отрицательные показатели еще нами не опредѣлены, то мы свободны дать имъ какія угодно опредѣленія; найдено удобнымъ дать имъ такія опредѣленія, чтобы важное соотношеніе $a^m \times a^n = a^{m+n}$ *всегда оставалось справедливымъ, каковы бы ни были* m и n.

Напримѣръ, пусть требуется объяснить смыслъ $a^{\frac{1}{2}}$.

По предположенію мы должны имѣть $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^1 = a$; такимъ образомъ $a^{\frac{1}{2}}$ должно быть такимъ числомъ, что если его помножить на само себя, то результатъ будетъ равняться a; но по опредѣленію, такимъ числомъ долженъ быть квадратный корень изъ a, слѣдовательно $a^{\frac{1}{2}}$ должно быть равнозначительно съ квадратнымъ корнемъ изъ a, то-есть $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

Еще примѣръ. Объяснить смыслъ $a^{\frac{1}{3}}$.

По предположенію мы должны имѣть $a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a^1 = a$.

Слѣдовательно, какъ и раньше $a^{\frac{1}{3}}$ должно быть равнозначительно съ кубическимъ корнемъ изъ a, то-есть $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$.

Еще примѣръ. Объяснить смыслъ $a^{\frac{3}{4}}$.

По предположенію $a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{3}{4}} = a^3$; слѣдовательно $a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$.

Этихъ примѣровъ было-бы достаточно для учащагося, чтобы понять, что должно разумѣть подъ дробными показателями; но въ двухъ слѣдующихъ статьяхъ мы дадимъ общее опредѣленіе этихъ символовъ.

260. *Требуется объяснить значеніе* $a^{\frac{1}{n}}$, *гдѣ* n *нѣкоторое цѣлое положительное число.*

По предположенію,

$$a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots \text{ до } n \text{ множителей} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots \text{ } n \text{ членовъ}} = a^1 = a,$$

слѣдовательно $a^{\frac{1}{n}}$ должно быть равнозначительно съ корнемъ n-й степени изъ a, то-есть

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

261. *Требуется объяснить значеніе* $a^{\frac{m}{n}}$, *гдѣ* m и n *нѣкоторыя цѣлыя и положительныя числа.*

По предположенію,

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m}{n}} \times \ldots \text{ до } n \text{ множителей} = a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\ldots \text{ до } n \text{ членовъ}} = a_{\text{ш}}$$

слѣдовательно $a^{\frac{m}{n}}$ должно значить то-же самое, что корень n-й степени изъ a^m, то-есть $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Отсюда слѣдуетъ, что $a^{\frac{m}{n}}$ означаетъ n-ый корень изъ m-ой степени a, то-есть въ дробномъ показателѣ числитель означаетъ показателя степени, а знаменатель—показателя корня.

262. Такимъ образомъ мы опредѣлили значеніе всякаго положительнаго показателя—цѣлаго или дробнаго; намъ остается теперь опредѣлить значеніе отрицательныхъ показателей.

Напримѣръ, пусть требуется опредѣлить значеніе a^{-2}.

По предложенію, $a^3 \times a^{-2} = a^{3-2} = a^1 = a$,

поэтому $$a^{-2} = \frac{a}{a^3} = \frac{1}{a^2}.$$

Дадимъ теперь общее опредѣленіе такимъ символамъ.

263. *Требуется опредѣлить значеніе* a^{-n}, *гдѣ* n *нѣкоторое положительное число цѣлое или дробное.*

По предположенію, каково-бы ни было m, мы должны имѣть

$$a^m \times a^{-n} = a^{m-n}.$$

Теперь мы можемъ предположить, что m величина положительная и бо́льшая чѣмъ n, и тогда на основаніи предыдущаго мы имѣемъ

$$a^{m-n} \times a^n = a^m, \text{ и слѣдовательно } a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}.$$

Слѣдовательно $$a^m \times a^{-n} = \frac{a^m}{a^n}.$$

а потому $$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Чтобы выразить это словесно, мы должны дать понятіе объ *обратныхъ величинахъ*. Одна величина называется *обратною* съ другой, когда произведеніе ихъ другъ на друга равно единицѣ; такъ, напримѣръ x будетъ *обратною величиною* съ $\frac{1}{x}$.

Слѣдовательно a^{-n} есть величина обратная съ a^n; и этотъ результатъ мы можемъ символически представить однимъ изъ слѣдующихъ способовъ:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a^n = \frac{1}{a^{-n}},\ a^n \times a^{-n} = 1.$$

264. Изъ того значенія, которое дано отрицательному показателю, будетъ слѣдовать, что $a^m : a^n = a^{m-n}$ будетъ справедливо и въ томъ случаѣ, когда m меньше n, какъ это было справедливо для случая, когда m больше n. Дѣйствительно, положимъ, что m меньше n; мы будемъ имѣть

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}.$$

Положимъ, что $m = n$; тогда $a^m : a^n$ очевидно $= 1$, и $a^{m-n} = a^0$. Послѣдній символъ до сихъ поръ еще не былъ опредѣленъ, такъ что мы свободны дать ему тотъ смыслъ, который въ немъ естественно заключается; поэтому мы можемъ сказать, что $a^0 = 1$.

265. Такимъ образомъ, напримѣръ, согласно съ принятыми опредѣленіями

$$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2},\quad a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3},\quad a^{\frac{4}{2}} = \sqrt{a^4} = a^2$$

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3},\ a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}},\ a^{-\frac{4}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{4}{2}}} = \frac{1}{a^2}.$$

Изъ этого видно, что нѣтъ *абсолютной необходимости* вводить въ Алгебру дробные и отрицательные показатели, такъ какъ они доставляютъ намъ только новый способъ обозначать количества, для представленія которыхъ мы имѣли уже средства. Но это обозначеніе, какъ мы уже сказали, *удобно*, и учащійся научится это понимать и цѣнить, по мѣрѣ того, какъ будетъ подвигаться дальше.

Обозначеніе, которое мы объяснили, мы можемъ употребить теперь при доказательствѣ нѣкоторыхъ предложеній, относящихся къ корнямъ и степенямъ.

266. Показать, что $a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$.

Пусть $a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} = x$; слѣдовательно

$$x^n = \left(a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n, \text{ что по ст. } 41 = a \times b.$$

Итакъ $x^n = ab$, слѣдовательно $x = (ab)^{\frac{1}{n}}$, что и требовалось доказать.

Подобнымъ-же образомъ мы можемъ доказать, что

$$a^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

267. Какъ примѣръ приложенія предыдущаго предложенія мы имѣемъ $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{(ab)}$. Но, какъ мы сказали въ ст. 236, квадратный корень допускаетъ *двойной* знакъ; слѣдовательно, строго говоря, полученный выводъ долженъ быть выраженъ такимъ образомъ: произведеніе одного изъ квадратныхъ корней изъ a на одинъ изъ квадратныхъ корней изъ b равно одному изъ квадратныхъ корней изъ ab. Подобное же замѣчаніе прилагается и къ другимъ предложеніямъ настоящей главы. Въ высшихъ частяхъ математики отмѣченный здѣсь вопросъ разбирается съ бо́льшими подробностями. Смотрите *Теорію уравненій*, глава XI.

268. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что

$$a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} \times c^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} \times c^{\frac{1}{n}} = (abc)^{\frac{1}{n}}.$$

И продолжая идти такъ-же далѣе, мы можемъ доказать, что

$$a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} \times c^{\frac{1}{n}} \times \ldots \times k^{\frac{1}{n}} = (abc \ldots k)^{\frac{1}{n}}.$$

Предположимъ теперь, что мы имѣемъ m такихъ количествъ a, b, c, . . . k и что каждое изъ нихъ равно a; тогда получимъ

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Но $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$, по ст. 260, 261, равно $a^{\frac{m}{n}}$; такимъ образомъ

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}.$$

Отсюда, сравнивая это со статьею 261, мы видимъ, что n-й корень изъ m-ой степени a равняется m-й степени отъ корня n-й степени изъ a.

269. Показать, что $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}}$.

*

Пусть $x=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$; поэтому $x^n=a^{\frac{1}{m}}$; а слѣдовательно $x^{mn}=a$, поэтому $x=a^{\frac{1}{mn}}$. Итакъ $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{mn}}$, что и требовалось доказать.

270. Доказать, что $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mp}{np}}$.

Пусть $a^{\frac{m}{n}}=x$; тогда $a^m=x^n$; слѣдовательно $x^{np}=a^{mp}$; слѣдовательно $x=a^{\frac{mp}{np}}$. Итакъ $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mp}{np}}$, что и нужно было доказать.

271. Изъ того, что мы сказали въ ст. 265, учащійся можетъ заключить, что доказанныя сейчасъ предложенія могли-бы быть доказаны и *безъ посредства дробныхъ показателей*. Возьмемъ напримѣръ предложеніе ст. 266; здѣсь намъ нужно доказать, что

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{(ab)}.$$

Будемъ поступать какъ прежде; пусть $x=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$, слѣдовательно

$$x^n=(\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\times(\sqrt[n]{b})^n, \text{ что по ст. 41}=a\times b.$$

Такимъ образомъ $x^n=ab$, слѣдовательно $x=\sqrt[n]{ab}$, что и нужно было доказать.

272. Мы вывели опредѣленія ст. 260...265, какъ слѣдствія допущенія, что соотношенія $a^m\times a^n=a^{m+n}$ и $(a^m)^n=a^{mn}$ справедливы вообще, каковы-бы ни были m и n; теперь мы докажемъ наоборотъ, что если допустить сдѣланныя опредѣленія, то соотношенія $a^m\times a^n=a^{m+n}$ и $(a^m)^n=a^{mn}$ будутъ справедливы вообще, каковы бы ни были m и n

273. Показать, что $a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$.

По ст. 270, $a^{\frac{p}{q}}\times a^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{ps}{qs}}\times a^{\frac{qr}{qs}}$

$$=\left(a^{ps}\right)^{\frac{1}{qs}}\times\left(a^{qr}\right)^{\frac{1}{qs}}, \text{ по опредѣленію,}$$

$$=\left(a^{ps}\times a^{qr}\right)^{\frac{1}{qs}}, \text{ по ст. 266,}$$

$$=\left(a^{ps+qr}\right)^{\frac{1}{qs}}=a^{\frac{ps+qr}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

274. Тѣмъ-же путемъ можно доказать, что

$$a^{\frac{p}{q}}:a^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}.$$

275. Такимъ образомъ доказано, что соотношеніе $a^m\times a^n=a^{m+n}$ справедливо, когда m и n будутъ положительныя дроби такъ-же, какъ и въ случаѣ, когда m и n цѣлыя положительныя количества. Остается

доказать, что оно справедливо также, когда одна изъ величинъ m или n будетъ отрицательной и когда обѣ онѣ отрицательныя.

1) Положимъ, что *одна* изъ этихъ величинъ отрицательна, напр. n; положимъ, что $n=-\nu$.

Тогда $a^m \times a^n = a^m \times a^{-\nu} = a^m \times \frac{1}{a^\nu} = \frac{a^m}{a^\nu} = a^{m-\nu}$ (по ст. 274)

$= a^{m+n}$.

2) Положимъ, что *обѣ* онѣ будутъ отрицательными, и пусть

$m=-\mu$ и $n=-\nu$.

Тогда

$$a^m \times a^n = a^{-\mu} \times a^{-\nu} = \frac{1}{a^\mu} \times \frac{1}{a^\nu} = \frac{1}{a^\mu \times a^\nu} = \frac{1}{a^{\mu+\nu}} \text{ (по ст. 273)}$$

$$= a^{-\mu-\nu} = a^{m+n}.$$

276. Подобнымъ образомъ $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n} \times a^p = a^{m+n+p}$; и такъ далѣе.

Такимъ образомъ, если положимъ, что имѣется r количествъ m, n, p, ... и что каждое изъ нихъ равно m, то мы получимъ

$$(a^m)^r = a^{mr},$$

каково-бы ни было m.

277. Показать, что $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{pr}{qs}}$.

Пусть $x = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}}$; слѣдовательно $x^s = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^r = a^{\frac{pr}{q}}$, по ст. 276; поэтому $x^{qs} = a^{pr}$; слѣдовательно $x = a^{\frac{pr}{qs}}$, что и требовалось доказать.

278. Доказать, что $(a^m)^n = a^{mn}$ справедливо вообще.

По предыдущей статьѣ, это справедливо, когда m и n положительныя величины, и намъ остается доказать, что это справедливо, когда одна изъ величинъ или обѣ онѣ будутъ отрицательными.

1) Положимъ, что n—отрицательная величина и равна $-\nu$.

Тогда $(a^m)^n = (a^m)^{-\nu} = \frac{1}{(a^m)^\nu} = \frac{1}{a^{m\nu}} = a^{-m\nu} = a^{mn}$.

2) Положимъ, что m—отрицательная величина и равна $-\mu$.

Тогда $(a^m)^n = (a^{-\mu})^n = \left(\frac{1}{a^\mu}\right)^n = \frac{1}{a^{\mu n}} = a^{-\mu n} = a^{mn}$.

3) Положимъ, что m и n оба отрицательныя величины, и пусть

$m=-\mu$, $n=-\nu$.

Тогда $(a^m)^n = (a^{-\mu})^{-\nu} = \frac{1}{(a^{-\mu})^\nu} = \frac{1}{a^{-\mu\nu}} = a^{\mu\nu} = a^{mn}$.

Примѣры.

1. Упростить $(x^{\frac{2}{3}} \times x^{\frac{4}{7}})^{\frac{14}{13}}$.

2. Найти произведеніе $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{-\frac{1}{3}}$, $a^{-\frac{1}{4}}$ и $a^{-\frac{1}{5}}$.

3. Найти произведеніе количествъ $\left(\frac{ay}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{by}{y^2}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\left(\frac{y^2}{a^2b^2}\right)^{\frac{1}{4}}$.

4. Упростить произведеніе количествъ:

$$a^{\frac{1}{3}},\ a^{-\frac{3}{4}},\ \sqrt[3]{a^4},\ a^{\frac{1}{12}},\ \sqrt[8]{a^{\frac{25}{3}}},\ (a^{-\frac{7}{4}})^{\frac{7}{6}}.$$

5. Упростить $\dfrac{\left\{\left(a^m\right)^{\frac{1}{r}}\left(a^q\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^{nr}}{\left\{\sqrt[q]{b^n}(\sqrt[n]{b})^r\right\}^{mq}} : \left\{\left(\frac{a}{b}\right)^q\right\}^r$.

6. Умножить $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}b$ на $ab^{-\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{2}}$.

7. Умножить $x^{\frac{3}{2}}-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{3}{2}}$ на $x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$.

8. Умножить $a^{\frac{7}{2}}-a^3+a^{\frac{5}{2}}-a^2+a^{\frac{3}{2}}-a+a^{\frac{1}{2}}-1$ на $a^{\frac{1}{2}}+1$.

9. Умножить $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+1-a^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}$ на $a^{\frac{1}{3}}+1+a^{-\frac{1}{3}}$.

10. Умножить $-3a^{-5}+2a^{-4}b^{-1}$ на $-2a^{-3}-3a^{-4}b$.

11. Раздѣлить $x^{\frac{3}{2}}-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{3}{2}}$ на $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$.

12. Раздѣлить $x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{4}{3}}$ на $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}$.

13. Раздѣлить $a^{\frac{3n}{2}}-a^{-\frac{3n}{2}}$ на $a^{\frac{n}{2}}-a^{-\frac{n}{2}}$.

14. Раздѣлить $2x^5y^{-3}-5x^4y^{-2}+7x^3y^{-1}-5x^2+2xy$ на $x^3y^{-3}-x^2y^{-2}+xy^{-1}$.

15. Раздѣлить $a^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{3}{2}}b+ab^{\frac{3}{2}}-2a^{\frac{1}{2}}b^2+b^{\frac{5}{2}}$ на $a^{\frac{3}{2}}-ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b-b^{\frac{3}{2}}$.

16. Упростить $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-ax^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x-x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}-a^2x^{\frac{1}{2}}+3a^{\frac{3}{2}}x-3ax^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x^2-x^{\frac{5}{2}}}$.

17. Извлечь квадратный корень изъ $\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{x^2}{4y}+\dfrac{2y^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{(xy)^{\frac{1}{4}}}$.

18. Извлечь квадратный корень

$$4a-12a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}+9b^{\frac{2}{3}}+16a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}-24b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{4}}+16c^{\frac{1}{2}}.$$

19. Извлечь квадратный корень изъ

$$256x^{\frac{4}{3}}-512x+640x^{\frac{2}{3}}-512x^{\frac{1}{3}}+304-128x^{-\frac{1}{3}}+40x^{-\frac{2}{3}}$$
$$-8x^{-1}+x^{-\frac{4}{3}}.$$

20. Если $a^b=b^a$, то показать, что $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a}{b}-1}$; и если $a=2b$, то показать, что $b=2$.

ГЛАВА XIX.

Ирраціональныя величины.

279. Когда искомый корень изъ какого нибудь алгебраическаго количества не можетъ быть полученъ точнымъ образомъ, то такой корень называютъ *глухимъ* или *ирраціональнымъ* количествомъ. Такъ $\sqrt[3]{a^2}$ или $a^{\frac{2}{3}}$ представляетъ ирраціональное количество. Но $\sqrt[3]{a^6}$ или $a^{\frac{6}{3}}$, представляющееся повидимому въ ирраціональномъ видѣ, можетъ быть выражено посредствомъ a^2, а потому и не будетъ ирраціональнымъ.

Правила для производства дѣйствій надъ ирраціональными величинами вытекаютъ изъ предложеній, указанныхъ въ предыдущей главѣ, какъ мы это сейчасъ увидимъ.

280. *Всякое раціональное количество можетъ быть выражено въ видѣ даннаго ирраціональнаго посредствомъ возвышенія его въ степень, выражаемую корнемъ и помѣщенія подъ знакомъ корня.*

Такъ $a=\sqrt{a^2}=\sqrt[3]{a^3}$, и проч., $a+x=(a+x)^{\frac{n}{n}}$. Точно также можетъ быть измѣненъ видъ всякаго ирраціональнаго выраженія; такъ

$$(a+x)^{\frac{1}{2}}=(a+x)^{\frac{2}{4}}=(a+x)^{\frac{3}{6}}.$$

Здѣсь количества возвышены въ извѣстныя степени и изъ нихъ извлечены корни тѣхъ-же степеней, такъ что значеніе этихъ количествъ не измѣнилось.

281. *Коэффиціентъ ирраціональнаго количества можетъ быть подведенъ подъ знакъ корня, если его сперва выразить въ томъ-же ирраціональномъ видѣ, а потомъ помножить согласно съ ст. 271.*

Напримѣръ,

$$a\sqrt{x}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{x}=\sqrt{(a^2x)};\ ay^{\frac{3}{2}}=(a^2y^3)^{\frac{1}{2}};$$

$$x\sqrt{(2a-x)}=\sqrt{(2ax^2-x^3)};\ a\times(a-x)^{\frac{3}{2}}=\left\{a^2(a-x)^3\right\}^{\frac{1}{2}};$$

$$4\sqrt{2}=\sqrt{(16\times2)}=32.$$

282. *Наоборотъ, всякое количество можетъ быть сдѣлано коэффиціентомъ при ирраціональномъ количествѣ, если каждый членъ, стоящій подъ знакомъ корня, будетъ раздѣленъ на количество, возведенное въ ту степень, какую выражаетъ показатель корня.*

Такъ $\sqrt{(a^2-ax)}=a^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{(a-x)};\ \sqrt{(a^3-a^2x)}=a\sqrt{(a-x)};$

$$\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{2}{n}}\times\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{n}};\ \sqrt{60}=\sqrt{(4\times15)}=2\sqrt{15}.$$

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{b}\left(1-\frac{b^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{b^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{(x^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}{xb}.$$

283. *Когда ирраціональная часть нѣсколькихъ выраженій одна и та-же, то ихъ сумма или разность находится умноженіемъ этой ирраціональной части на сумму или разность ея коэффиціентовъ.*

Такъ
$$a\sqrt{x}\pm b\sqrt{x}=(a\pm b)\sqrt{x},$$

$$\sqrt{300}\pm5\sqrt{3}=10\sqrt{3}\pm5\sqrt{3}=15\sqrt{3}\text{ или }5\sqrt{3},$$

$$\sqrt{(3a^2b)}+\sqrt{(3x^2b)}=a\sqrt{(3b)}+x\sqrt{(3b)}=(a+x)\sqrt{(3b)}.$$

284. *Если два ирраціональныя количества имѣютъ одинаковые показатели, то ихъ произведеніе находится, беря произведеніе количествъ, стоящихъ подъ знакомъ корня, и удерживая общій показатель.*

Такъ $a^{\frac{1}{n}}\times b^{\frac{1}{n}}=(ab)^{\frac{1}{n}}$ (по ст. 266), $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$

$$(a+b)^{\frac{1}{2}}\times(a-b)^{\frac{1}{2}}=(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}.$$

285. *Если при ирраціональныхъ количествахъ есть коэффиціенты, то произведеніе этихъ коэффиціентовъ ставится предъ ихъ произведеніемъ.*

Такъ $a\sqrt{x}\times b\sqrt{y}=ab\sqrt{(xy)};\ 3\sqrt{8}\times5\sqrt{2}=15\sqrt{16}=60.$

286. *Если показатели двухъ ирраціональныхъ количествъ имѣютъ одинаковаго знаменателя, то можно возвести эти коли-*

чества въ степени, выражаемыя соотвѣтственно ихъ числителями, и произведеніе ихъ можетъ быть найдено какъ раньше.

Такъ $$2^{\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = (24)^{\frac{1}{2}}.$$

$$(a+x)^{\frac{1}{2}} \times (a-x)^{\frac{3}{2}} = \{(a+x)(a-x)^3\}^{\frac{1}{2}}.$$

287. *Если показатели не имѣютъ одинаковаго знаменателя, то ихъ можно преобразовать въ другіе, равные имъ по величинѣ, съ одинаковыми знаменателями, и ихъ произведеніе найдется какъ въ ст. 286.*

Такъ $(a^2-x^2)^{\frac{1}{4}} \times (a-x)^{\frac{1}{2}} = (a^2-x^2)^{\frac{1}{4}}(a-x)^{\frac{2}{4}} = \{(a^2-x^2)(a-x)^2\}^{\frac{1}{4}}.$

$$2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{6}} \times 3^{\frac{2}{6}} = 8^{\frac{1}{6}} \times 9^{\frac{1}{6}} = (72)^{\frac{1}{6}}.$$

288. *Если двѣ ирраціональныя величины содержатъ подъ знакомъ корня одно и то-же ирраціональное количество, то ихъ произведеніе найдется, если возьмемъ показателемъ этого количества сумму имъ показателей.*

Такъ $$a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} \text{ (ст. 273)};$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}}.$$

289. *Если показатели двухъ ирраціональныхъ количествъ имѣютъ общаго знаменателя, то частное отъ дѣленія одного изъ этихъ количествъ на другое находится возвышеніемъ ихъ соотвѣтственно въ степени, выражаемыя числителями показателей, и извлеченіемъ изъ этого частнаго—корня, степень котораго указывается общимъ знаменателемъ.*

Такъ $$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \text{ (ст. 266) } \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{p}{n}}} = \left(\frac{a^m}{b^p}\right)^{\frac{1}{n}};$$

$$4^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{4}{2^3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{m}} : \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{ps^2}{qr^2}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

290. *Если показатели не имѣютъ одинаковаго знаменателя, то ихъ нужно замѣнить другими, равными имъ по величинѣ, но съ одинаковыми знаменателями и поступать по предыдущему.*

Такъ $(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} : (a^3-x^3)^{\frac{1}{3}} = (a^2-x^2)^{\frac{3}{6}} : (a^3-x^3)^{\frac{2}{6}} = \left\{\frac{(a^2-x^2)^3}{(a^3-x^3)^2}\right\}^{\frac{1}{6}}.$

291. *Если ирраціональныя числа имѣютъ подъ знакомъ корня*

одно и то-же количество, то ихъ частное получится, если взять показателемъ его разность ихъ показателей.

Такъ $$a^{\frac{1}{m}} : a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}},$$ (ст. 274);

$$\sqrt[3]{2} : \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}}.$$

292. Иногда бываетъ выгодно приводить дробь, въ знаменателѣ которой есть одночленное ирраціональное количество, къ другому виду умноженіемъ числителя и знаменателя на множитель, могущій сдѣлать этого знаменателя *раціональнымъ*. Такъ напримѣръ

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Если мы хотимъ вычислить приближенное значеніе $\frac{2}{\sqrt{3}}$, то это будетъ намъ легче сдѣлать, если воспользоваться равнымъ этому выраженіемъ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Подобнымъ-же образомъ

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}.$$

293. Легко также сдѣлать знаменатель дроби раціональнымъ, когда онъ состоитъ изъ двухъ ирраціональныхъ величинъ второй степени.

Дѣйствительно $$\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}\mp\sqrt{c}}{(\sqrt{b}\pm\sqrt{c})(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{b-c},$$

Также $$\frac{a}{b\pm\sqrt{c}} = \frac{a(b\mp\sqrt{c}}{(b\pm\sqrt{c})(b\mp\sqrt{c})} = \frac{a(b\mp\sqrt{c})}{b^2-c}.$$

Подобнымъ образомъ $$\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{14+6\sqrt{5}}{9-5}$$

$$= \frac{7+3\sqrt{5}}{2}.$$

294. При помощи повторенія подобнаго пріема мы можемъ привести въ раціональный видъ знаменатель дроби, когда онъ состоитъ изъ трехъ ирраціональныхъ членовъ второй степени. Дѣйствительно, положимъ, что знаменатель будетъ $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$; умножимъ во-первыхъ числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$; тогда знаменатель будетъ $a+b-c+2\sqrt{(ab)}$; послѣ этого помножимъ числитель и знаменатель на $a+b-c-2\sqrt{(ab)}$, и тогда получимъ *раціональный* знаменатель, именно $(a+b-c)^2-4ab$, то-есть $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca$.

295. *Для всякаго двучленнаго выраженія можно найти множитель, обращающій это выраженіе въ раціональный видъ.*

1) Положимъ, что двучленъ будетъ такой: $a^{\frac{1}{p}}+b^{\frac{1}{q}}$. Положимъ $x=a^{\frac{1}{p}}$, $y=b^{\frac{1}{q}}$, и пусть n будетъ наименьшее кратное p и q; тогда x^n и y^n будутъ оба раціональными. Но

$$(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\ldots\pm y^{n-1})=x^n\pm y^n,$$

гдѣ нужно брать верхній или нижній знакъ, смотря по тому, будетъ-ли n нечетное или четное. Итакъ

$$x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\ldots\pm y^{n-1}$$

будетъ тѣмъ множителемъ, который обратитъ $x+y$ въ раціональный видъ.

2) Положимъ, что двучленъ будетъ такой: $a^{\frac{1}{p}}-b^{\frac{1}{q}}$. Возьмемъ по предыдущему x, y и n. Но

$$(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+y^{n-1})=x^n-y^n.$$

Итакъ $$x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+y^{n-1}$$

будетъ множителемъ, обращающимъ $x-y$ въ раціональный видъ.

Возьмемъ напримѣръ $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}$; здѣсь $n=6$. И множитель раціональности будетъ

$$x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5$$

то-есть $$a^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{4}{2}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{3}{3}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{5}{3}},$$

то-есть $$a^{\frac{5}{2}}-a^2b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}-ab+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{5}{3}}.$$

Раціональное произведеніе будетъ x^6-y^6, т.-е. $a^{\frac{6}{2}}-b^{\frac{6}{3}}=a^3-b^2$.

296. *Квадратный корень изъ раціональнаго количества не можетъ имѣть одну часть раціональной, а другую ирраціональной.*

Положимъ, если это возможно, что $\sqrt{n}=a+\sqrt{m}$; тогда, возведя въ квадратъ эти равныя величины, мы получимъ $n=a^2+2a\sqrt{m}+m$; итакъ $2a\sqrt{m}=n-a^2-m$, и

$$\sqrt{m}=\frac{n-a^2-m}{2a},$$

т.-е. $\sqrt{m}$ равняется раціональному количеству, что противорѣчитъ предположенію. См. ст. 242.

297. *Если два ирраціональныя выраженія второй степени нельзя привести къ другимъ, которыя имѣли-бы ту-же самую ирраціональную часть, то ихъ произведеніе будетъ ирраціональнымъ.*

Пусть $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ будутъ два ирраціональныя количества, и пусть, если возможно, $\sqrt{(xy)}=rx$, гдѣ r цѣлое или дробное число. Тогда

$xy=r^2x^2$ и $y=r^2x$, слѣдовательно $\sqrt{y}=r\sqrt{x}$, то-есть $\sqrt{y}$ и $\sqrt{x}$ по умноженіи могутъ быть приведены къ такому виду лишь тогда, когда они имѣютъ одинаковыя ирраціональныя части, что противно предположенію.

298. *Ирраціональное выраженіе второй степени не можетъ быть разложено на два другія, которыя не имѣли-бы той-же самой ирраціональной части.*

Пусть, если возможно, $\sqrt{x}=\sqrt{m}+\sqrt{n}$; тогда по возведеніи въ квадратъ мы будемъ имѣть $x=m+n+2\sqrt{(mn)}$ и $\sqrt{(mn)}=\frac{1}{2}(x-m-n)$; т.-е. $\sqrt{mn}$ равняется раціональной величинѣ, что нелѣпо. См. ст. 242.

299. *Во всякомъ уравненіи $x+\sqrt{y}=a+\sqrt{b}$, заключающемъ раціональныя и ирраціональныя величины второй степени, раціональная часть одной части равенства равна раціональной части другой, и ирраціональная часть одной равна ирраціональной части другой.*

Дѣйствительно, если x не равно a, то положимъ, что $x=a+m$; тогда

$$a+m+\sqrt{y}=a+\sqrt{b},$$

такъ что $m+\sqrt{y}=\sqrt{b}$; итакъ $\sqrt{b}$ состоитъ изъ части раціональной и ирраціональной, что невозможно (ст. 296). Поэтому $x=a$, а слѣдовательно и $\sqrt{y}=\sqrt{b}$.

300. Если $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=x+\sqrt{y}$, то $\sqrt{(a-\sqrt{b})}=x-\sqrt{y}$.

Дѣйствительно, такъ какъ $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=x+\sqrt{y}$, то, возведя въ квадратъ, мы будемъ имѣть

$$a+\sqrt{b}=x^2+2x\sqrt{y}+y;$$

слѣдовательно $a=x^2+y$, и $\sqrt{b}=2x\sqrt{y}$ (ст. 299).

Отсюда $a-\sqrt{b}=x^2-2x\sqrt{y}+y$

и $\sqrt{(a-\sqrt{b})}=x-\sqrt{y}$.

Подобно этому мы можемъ показать, что если

$$\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

то и $\sqrt{(a-\sqrt{b})}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

301. *Квадратный корень изъ двучленнаго выраженія, въ которомъ одинъ членъ раціональный, а другой ирраціональный второй степени, въ нѣкоторыхъ случаяхъ можетъ быть выраженъ двучленомъ, въ которомъ оба члена ирраціональныя величины второй степени.*

Пусть $a+\sqrt{b}$ будетъ данное двучленное выраженіе, и положимъ, что

$$\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

По ст. 300 $\sqrt{(a-\sqrt{b})}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

Перемножимъ ихъ: $\sqrt{(a^2-b)}=x-y$.

Возведемъ въ квадратъ обѣ части перваго уравненія:

$$a+\sqrt{b}=x+2\sqrt{(xy)}+y;$$

слѣдовательно $$a=x+y.$$

Отсюда, складывая и вычитая, найдемъ

$$a+\sqrt{(a^2-b)}=2x,\ a-\sqrt{(a^2-b)}=2y,$$

слѣдовательно $x=\frac{1}{2}\{a+\sqrt{(a^2-b)}\},\ y=\frac{1}{2}\{a-\sqrt{(a^2-b)}\}.$

Итакъ x и y извѣстны, а слѣдовательно извѣстенъ и $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$, который равенъ $\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

Точно также извѣстенъ и $\sqrt{(a-\sqrt{b})}$, потому что онъ равенъ $\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

302. Напримѣръ, найдемъ квадратный корень изъ $3+2\sqrt{2}$

Здѣсь $a=3,\ \sqrt{b}=2\sqrt{2},\ a^2-b=9-8=1$. Поэтому

$$x=\frac{1}{2}(3+1)=2,\ \ y=\frac{1}{2}(3-1)=1.$$

Такимъ образомъ $\sqrt{(3+2\sqrt{2})}=\sqrt{2}+\sqrt{1}=1+\sqrt{2}$.

303. Еще примѣръ. Найти квадратный корень изъ $7-2\sqrt{10}$.

Вмѣсто того чтобы пользоваться статьей 301, мы можемъ произвести все дѣйствіе слѣдующимъ образомъ:

Положимъ, что $$\sqrt{(7-2\sqrt{10}}=\sqrt{x}-\sqrt{y};$$

тогда, возведя въ квадратъ, найдемъ $7-2\sqrt{10}=x-2\sqrt{(xy)}+y;$

слѣдовательно $$x+y=7 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

и $$2\sqrt{(xy)}=2\sqrt{10};$$

слѣдовательно $$(x+y)^2-4xy=49-(2\sqrt{10})^2,$$

то-есть $$(x-y)^2=49-40=9,$$

и $$x-y=3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Поэтому изъ (1) и (2) $x=5$ и $y=2$.

Итакъ $$\sqrt{(7-2\sqrt{10})}=\sqrt{5}-\sqrt{2}.$$

304. Изъ ст. 301 слѣдуетъ, что

$$\sqrt{x}=\sqrt{\left\{\frac{a+\sqrt{(a^2-b}}{2}\right\}},\ \ \sqrt{y}=\sqrt{\left\{\frac{a-\sqrt{(a^2-b}}{2}\right\}},$$

слѣдовательно, если a^2-b не будетъ *точнымъ квадратомъ*, то значенія $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ будутъ сложными ирраціональными выраженіями и двучленъ $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ будетъ сложнѣе, чѣмъ $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$.

305. Двучленное ирраціональное выраженіе вида $\sqrt{(a^2c)}+\sqrt{b}$ можетъ быть написано такъ $\sqrt{c}\left(a+\sqrt{\frac{b}{c}}\right)$. Поэтому, если $a^2-\frac{b}{c}$ есть *точный квадратъ*, то квадратный корень изъ $a+\sqrt{\frac{b}{c}}$ можетъ быть

выраженъ въ видѣ $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, а слѣдовательно квадратный корень изъ $\sqrt{(a^2c)}+\sqrt{b}$ будетъ $\sqrt[4]{c}(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

306. Напримѣръ, найдемъ квадратный корень изъ $\sqrt{32}+\sqrt{30}$.

Здѣсь $$\sqrt{32}+\sqrt{30}=\sqrt{2}(4+\sqrt{15});$$

такимъ образомъ $$\sqrt{(\sqrt{32}+\sqrt{30})}=\sqrt[4]{2}\times\sqrt{(4+\sqrt{15})};$$

и не трудно показать, что

$$\sqrt{(4+\sqrt{15})}=\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Слѣдовательно $$\sqrt{(\sqrt{32}+\sqrt{30})}=\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}(\sqrt{5}+\sqrt{3}).$$

207. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ мы можемъ извлечь квадратный корень изъ выраженія, имѣющаго видъ $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$, положивъ

$$\sqrt{(a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z};$$

въ этомъ случаѣ $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=x+y+z+2\sqrt{(xy)}+2\sqrt{(yz)}+\sqrt{(zx)}$; поэтому мы можемъ положить

$$2\sqrt{(xy)}=\sqrt{b},\ 2\sqrt{(yz)}=\sqrt{c},\ 2\sqrt{(zx)}=\sqrt{d},$$

и если значенія x, y и z, найденныя отсюда, удовлетворятъ также условію $x+y+z=a$, то мы найдемъ требуемый корень.

308. Напримѣръ, найдемъ квадратный корень изъ

$$8+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}.$$

Полагаемъ $\sqrt{(8+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2\sqrt{10})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$; тогда $8+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}=x+y+z+2\sqrt{(xy)}+2\sqrt{(yz)}+2\sqrt{(zx)}$.

Полагаемъ $2\sqrt{(xy)}=2\sqrt{2}$, $2\sqrt{(yz)}=2\sqrt{5}$, $2\sqrt{(zx)}=2\sqrt{10}$;

отсюда умноженіемъ находимъ $\sqrt{(xy)}\times\sqrt{(yz)}=10$

и $$\sqrt{(zx)}=\sqrt{10},$$

слѣдовательно по раздѣленіи

$$y=1,$$

а потому $$x=2 \text{ и } z=5.$$

Эти значенія удовлетворяютъ уравненію $x+y+z=8$.

Итакъ, искомый квадратный корень будетъ $\sqrt{2}+\sqrt{1}+\sqrt{5}$,

то-есть $$1+\sqrt{2}+\sqrt{5}.$$

309. Если $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}=x+\sqrt{y}$, то $\sqrt[3]{(a-\sqrt{b})}=x-y$.

Дѣйствительно, положимъ, что

$$\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}=x+\sqrt{y};$$

тогда, возвышая въ кубъ, получимъ

$$a+\sqrt{b}=x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+y\sqrt{y};$$

слѣдовательно $a=x^3+3xy$, $\sqrt{b}=3x^2\sqrt{y}+y\sqrt{y}$; (ст. 299)

отсюда $$a-\sqrt{b}=x^3-3x^2\sqrt{y}+3xy-y\sqrt{y},$$

и $$\sqrt[3]{(a-\sqrt{b})}=x-\sqrt{y}.$$

310. *Кубическій корень изъ двучлена* $a\pm\sqrt{b}$ *можетъ быть въ нѣкоторыхъ случаяхъ найденъ.*

Полагаемъ $$\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}=x+\sqrt{y}.$$

тогда $$\sqrt[3]{(a-\sqrt{b})}=x-\sqrt{y}.$$

Перемноживъ ихъ, получаемъ

$$\sqrt[3]{(a^2-b)}=x^2-y.$$

Положимъ теперь, что a^2-b будетъ точнымъ кубомъ и обозначимъ его чрезъ c^3; тогда

$$c=x^2-y,$$

а по ст. 309, $$a=x^3+3xy;$$

подставимъ сюда вмѣсто y его значеніе; тогда

$$a=x^3+3x(x^2-c),$$

слѣдовательно $$4x^3-3cx=a.$$

Изъ этого уравненія x можетъ быть найдено путемъ *пробъ*, а тогда будетъ извѣстно и y изъ уравненія $y=x^2-c$.

Итакъ, очевидно, что способъ этотъ приложимъ только въ томъ случаѣ, когда a^2-b будетъ *точнымъ кубомъ*; но даже и тогда онъ неудобенъ, потому что приводитъ къ уравненію, рѣшать которое мы теперь не имѣемъ никакой возможности, кромѣ какъ ощупью. Притомъ-же предложеніе это и не имѣетъ практической важности.

311. Найдемъ, напримѣръ, кубическій корень изъ $10+\sqrt{108}$.

Положимъ $\sqrt[3]{(10+\sqrt{108})}=x+\sqrt{y}$; тогда

$$\sqrt[3]{(10-\sqrt{108})}=x-\sqrt{y}.$$

Перемноживъ ихъ между собою, получимъ

$$\sqrt[3]{(100-108)}=x^2-y, \text{ то есть}$$

$$-2=x^2-y.$$

И также $10=x^3+3xy=x^3+3x(x^3+2)$; а потому

$$4x^3+6x=10.$$

Мы видимъ, что это уравненіе удовлетворяется при $x=1$; поэтому $y=3$, и искомый кубическій корень будетъ $1+\sqrt{3}$.

Еще примѣръ. Найти кубическій корень изъ $18\sqrt{3}+14\sqrt{5}$.

$$18\sqrt{3}+14\sqrt{5}=3\sqrt{3}\left(6+\frac{14}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\right).$$

Кубическій корень изъ $3\sqrt{3}$ есть $\sqrt{3}$; а кубическій корень изъ $6+\frac{14}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}$ можетъ быть найденъ. Дѣйствительно, здѣсь $a^2-b=36-\frac{196}{9}\times\frac{5}{3}=-\frac{8}{27}$; такъ что $c=-\frac{2}{3}$. Отсюда мы получаемъ уравненіе $4x^3+2x=6$, которое, какъ мы видимъ, удовлетворяется положеніемъ $x=1$. Такимъ образомъ искомый корень будетъ $\sqrt{3}\left(1+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$, то-есть $\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

312. Рѣшимъ теперь одно уравненіе, заключающее въ себѣ ирраціональныя величины, что послужитъ образчикомъ рѣшенія подобныхъ задачъ. Это уравненіе походитъ на рѣшенныя раньше тѣмъ, что мы получаемъ *одно* только значеніе для неизвѣстной величины.

Рѣшить уравненіе $\sqrt{(x+2)}+\sqrt{(x-14)}=8$.

Перенесемъ члены— $\sqrt{(x+2)}=8-\sqrt{(x-14)}$;

Возведемъ въ квадратъ обѣ части; получимъ

$$x+2=64-16\sqrt{(x-14)}+x-14;$$

перенесемъ члены—

$$16\sqrt{(x-14)}=48;$$

раздѣлимъ на 16, $\sqrt{(x-14)}=3$;

возвысимъ въ квадратъ обѣ части—

$$x-14=9,$$

слѣдовательно $x=23$.

Примѣры ирраціональныхъ выраженій.

1. Найти множитель раціональности для $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{2}{3}}$.

2. Найти множитель раціональности для $\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$.

3. Найти множитель раціональности для $\sqrt{3}-\sqrt[4]{5}$.

4. Дано $\sqrt{3}=1.7320508$; найти значеніе $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

5. Показать, что $\frac{(3+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{3}}=\frac{1}{5}\sqrt{15}$.

6. Показать, что $\dfrac{15}{\sqrt{10}+\sqrt{20}+\sqrt{40}-\sqrt{5}-\sqrt{80}}=\sqrt{5}(1+\sqrt{2})$.

7. Извлечь квадратный корень изъ

$$9\frac{x}{y}-24\sqrt{\frac{x}{y}}+34-24\sqrt{\frac{y}{x}}+9\frac{y}{x}.$$

8. Извлечь квадратный корень изъ $(a+b)^2-4(a-b)\sqrt{(ab)}$.

Извлечь квадратный корень изъ выраженій въ слѣдующихъ примѣрахъ отъ 9 до 18 включительно.

9. $4+2\sqrt{3}$.
10. $7-4\sqrt{3}$.
11. $7+2\sqrt{10}$.
12. $18+8\sqrt{5}$.
13. $75-12\sqrt{21}$.
14. $16+5\sqrt{7}$.
15. $ab+c^2+\sqrt{\{(a^2-c^2)(b^2-c^2)\}}$.
16. $\sqrt{27}+\sqrt{15}$.
17. $-9+6\sqrt{3}$.
18. $1+(1-c^2)^{-\frac{1}{2}}$.
19. Найти значеніе

$$\frac{1+x}{1+\sqrt{(1+x)}}+\frac{1-x}{1+\sqrt{(1-x)}}, \text{ если } x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

20. Найти значеніе

$$\frac{1+x}{1+\sqrt{(1+x)}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{(1-x)}}, \text{ если } x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

21. Извлечь квадратный корень изъ выраженія

$$6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}.$$

22. Извлечь квадратный корень изъ $5+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{15}$.
23. Извлечь квадратный корень изъ

$$15-2\sqrt{3}-2\sqrt{15}+6\sqrt{2}-2\sqrt{6}+2\sqrt{5}-2\sqrt{30}.$$

24. Извлечь кубическій корень изъ $7+5\sqrt{2}$.
25. Извлечь кубическій корень изъ $16+8\sqrt{5}$.
26. Извлечь кубическій корень изъ $9\sqrt{3}-11\sqrt{2}$.
27. Извлечь кубическій корень изъ $21\sqrt{6}-23\sqrt{5}$.
28. Показать, что $\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)}-\sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)}=1$.
29. Рѣшить уравненіе $\sqrt{(x+11)}-\sqrt{x}=1$.
30. Рѣшить уравненіе $\sqrt{(3x+4)}+\sqrt{(3x-5)}=9$.
31. Рѣшить уравненіе $a\sqrt{(b-x)}=b\sqrt{(a-x)}$.
32. Рѣшить уравненіе $\sqrt{(x+a)}+\sqrt{(x+b)}=\sqrt{c}$.

ГЛАВА XX.

Квадратныя уравненія.

313. Когда уравненіе содержитъ только квадратъ неизвѣстной величины, то значеніе этого квадрата можетъ быть найдено по правиламъ для рѣшенія уравненій простыхъ, т. е. иервой степени; послѣ чего, извлекая квадратный корень, мы найдемъ значеніе неизвѣстной величины. Напримѣръ, положимъ, дано уравненіе

$$8x^2 - 72 + 10x^2 = 7 - 24x^2 + 89;$$

перенеся члены, получимъ $42x^2 = 168;$

и раздѣливъ, найдемъ $x^2 = 4,$

а слѣдовательно $x = \sqrt{4} = \pm 2.$

Двойной знакъ употребляется потому, что квадратный корень изъ всякаго количества можетъ быть положительнымъ или отрицательнымъ (ст. 231).

Съ перваго взгляда можетъ пожалуй показаться, что изъ равенства $x^2 = 4$ мы должны-бы были вывести $\pm x = \pm 2$, а не $x = \pm 2$. Но мы найдемъ, что первый видъ рѣшенія въ сущности совершенно одинаковъ со вторымъ. Дѣйствительно, $\pm x = \pm 2$ даетъ или $+x = +2$, или $+x = -2$, или $-x = +2$, или $-x = -2$, то-есть всего только $x = 2$ и $x = -2$. Отсюда слѣдуетъ, что когда мы извлекаемъ квадратный корень изъ обѣихъ частей уравненія, то достаточно ставить двойной знакъ предъ квадратнымъ корнемъ изъ *одной* только какой нибудь его части.

314. Квадратныя уравненія, содержащія только квадратъ неизвѣстной величины, называются *чистыми* квадратными. Если-же они содержатъ еще первую степень неизвѣстной величины, то называются иногда *расположенными*. Названія эти несущественны. Приступимъ теперь къ разсмотрѣнію послѣдняго вида уравненій.

315. Покажемъ сперва, что каждое квадратное уравненіе можетъ быть приведено къ виду $x^2 + px = q$, гдѣ p и q могутъ быть положительными или отрицательными величинами. Дѣйствительно, мы можемъ привести всякое квадратное уравненіе къ этому виду слѣдующими пріемами: соберемъ члены, содержащіе неизвѣстныя величины, въ лѣвой части уравненія, а извѣстныя—въ правой его части: если коэффиціентъ при x^2 будетъ отрицательнымъ, то измѣнимъ знаки у всѣхъ членовъ уравненія; затѣмъ раздѣлимъ каждый членъ на коэффиціентъ нри x^2. Такимъ образомъ мы можемъ представить всякое квадратное уравненіе подъ видомъ

$$x^2 + px = q.$$

Чтобы рѣшить это уравненіе, прибавимъ къ обѣимъ его частямъ по $\frac{1}{4}p^2$; тогда будетъ

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}+q.$$

Лѣвая часть уравненія представляетъ теперь *полный квадратъ*; извлечемъ квадратный корень изъ обѣихъ частей; мы получимъ

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}+q\right)};$$

перенеся членъ $\frac{p}{2}$ во вторую часть, окончательно получимъ

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}+q\right)}.$$

316. Положимъ напримѣръ, что

$$-3x^2+36x-105=0;$$

перенесемъ извѣстный членъ—

$$-3x^2+36x=105,$$

Перемѣнимъ знаки, $3x^2-36x=-105,$

раздѣлимъ на 3, $x^2-12x=-35;$

придадимъ къ обѣимъ частямъ $\left(\frac{12}{2}\right)^2$, то-есть 36; тогда

$$x^2-12x+36=36-35=1;$$

извлечемъ квадратный корень изъ обѣихъ частей; получимъ

$$x-6=\pm1.$$

Слѣдовательно $x=6\pm1$, то-есть $x=7$, или 5. Если которое нибудь изъ этихъ значеній подставимъ вмѣсто x въ выраженіе $-3x^2+36x-105$, то результатъ будетъ равняться нулю.

317. Поэтому можно дать слѣдующее правило для рѣшенія квадратнаго уравненія:

Перенесеніемъ членовъ и приведеніемъ расположить уравненіе такъ, чтобы члены, заключающіе неизвѣстную величину, были всѣ въ одной части уравненія и чтобы коэффиціентъ при x^2 *былъ* $+1$; *приложить къ обѣимъ частямъ уравненія квадратъ половины коэффиціента при* x *и извлечь квадратный корень изъ обѣихъ частей.*

318. Для другого примѣра возьмемъ уравненіе

$$ax^2+bx+c=0;$$

перенесемъ члены, $ax^2+bx=-c$

раздѣлимъ на a, $$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

придадимъ $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, $$x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2};$$

извлечемъ квадратный корень,

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$$

и наконецъ $$x=\frac{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}.$$

Замѣтимъ частный случай, когда $c=0$. Тогда, если возьмемъ верхній знакъ, получимъ $x=0$; если-же возьмемъ нижній знакъ, то найдемъ, что $x=-\frac{b}{a}$. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ уравненіе приводится къ $ax^2+bx=0$ или $x(ax+b)=0$, и очевидно, что оно удовлетворяется, когда $x=0$ или когда $ax+b=0$, то-есть когда $x=-\frac{b}{a}$.

319. Когда предложенъ какой-нибудь примѣръ для рѣшенія, то, вмѣсто того, чтобы слѣдовать способу, указанному въ ст. 317, мы можемъ воспользоваться *формулой* ст. 318. Такъ, возьмемъ примѣръ ст. 316, именно $-3x^2+36x-105=0$; изъ сравненія его съ формулой ст. 318 мы видимъ, что можно положить $a=-3$, $b=36$, $c=-105$. Отсюда, если мы подставимъ эти значенія вмѣсто a, b и c въ выводъ ст. 318, то получимъ значеніе x. Здѣсь

$$b^2-4ac=(36)^2-12\times105=36;$$ а потому

$$x=\frac{-36\pm6}{-6}=7 \text{ или } 5.$$

320. Для другого примѣра возьмемъ уравненіе

$$x^2-6x=-2;$$

придадимъ по $\left(\frac{6}{2}\right)^2$, $$x^2-6x+9=9-2=7.$$

Извлечемъ квадратный корень,

$$x-3=\pm\sqrt{7}$$

и перенеся -3, $$x=3\pm\sqrt{7}.$$

Здѣсь $\sqrt{7}$ не можетъ быть найденъ точно, но мы можемъ найти приближенное его значеніе съ извѣстною степенью точности, и тогда получимъ значеніе x съ какою угодно степенью точности.

321. Въ разсмотрѣнныхъ до сихъ поръ примѣрахъ мы находили *два различныхъ корня* квадратнаго уравненія; но въ нѣкоторыхъ случаяхъ мы могли-бы найти въ сущности только одинъ корень. Возьмемъ

напримѣръ уравненіе $x^2-12x+36=0$; по извлеченіи квадратнаго корня мы получимъ $x-6=0$, а слѣдовательно $x=6$. Тѣмъ не менѣе удобно говорить, что и въ этомъ случаѣ уравненіе имѣетъ *два*, но *равныхъ* корня.

322. Если квадратное уравненіе имѣетъ видъ

$$ax^2+bx+c=0,$$

то изъ ст. 318 мы знаемъ, что два его корня соотвѣтственно будутъ

$$\frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} \quad \text{и} \quad \frac{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}.$$

Оба они будутъ различны, если b^2-4ac не равно нулю, если-же этотъ двучленъ будетъ нулемъ, то каждый изъ корней будетъ равенъ $-\frac{b}{2a}$. Такимъ образомъ это соотношеніе $b^2-4ac=0$ есть условіе того, чтобы два корня квадратнаго уравненія были равны.

323. Разсмотримъ теперь примѣръ $x^2-10x+32=0$.

Перенесемъ извѣстный членъ, $x^2-10x=-32$,

приложимъ что нужно, $x^2-10x+25=25-32=-7$.

Если теперь перейдемъ къ извлеченію квадратнаго корня, то получимъ

$$x-5=\pm\sqrt{-7}.$$

Но отрицательное число—7 не имѣетъ ни точнаго, ни приближеннаго квадратнаго корня (ст. 232); такимъ образомъ не возможно найти никакого дѣйствительнаго значенія x, могущаго удовлетворять данному уравненію. Въ такомъ случаѣ крадратное уравненіе не имѣетъ дѣйствительныхъ корней; то-же самое выражаютъ иногда, говоря, что корни здѣсь будутъ *невозможные*, *мнимые*, *воображаемые*. Къ этому вопросу мы возвратимся потомъ въ главѣ XXV.

324. Если квадратное уравненіе представлено подъ видомъ

$$ax^2+bx+c=0,$$

то по ст. 318 мы видимъ, что корни будутъ *дѣйствительными*, если b^2-4ac величина *положительная*, то-есть если b^2 алгебраически будетъ больше $4ac$, и что корни будутъ невозможными, если b^2-4ac будетъ величина *отрицательная*, то-есть если b^2 алгебраически будетъ меньше ac.

Примѣры квадратныхъ уравненій.

1. $x^2-4x+3=0$.
2. $x^2-5x+4=0$.
3. $6x^2-13x+6=0$.
4. $3x^2-7x=20$.
5. $2x^2-7x+3=0$.
6. $3x^2-53x+34=0$.
7. $x^2+10x+24=0$.
8. $7x^2-3x=160$.

9. $14x-x^2=33$.

10. $2x^2-2x-\frac{3}{2}=0$.

11. $x^2-3=\frac{1}{6}(x-3)$.

12. $4(x^2-1)=4x-1$.

13. $110x^2-21x+1=0$.

14. $780x^2-73x+1=0$.

15. $(x-1)(x-2)=6$.

16. $(3x-2)(x-1)=14$.

17. $(3x-5)(2x-5)=(x+3)(x-1)$.

18. $(2x+1)(x+2)=3x^2-4$.

19. $(x+1)(2x+3)=4x^2-22$.

20. $(x-1)(x-2)+(x-2)(x-4)=6(2x-5)$.

21. $(2x-3)^2=8x$.

22. $(5x-3)^2-7=44x+5$.

23. $(x-7)(x-4)+(2x-3)(x-5)=103$.

24. $\frac{5}{7}x^2+\frac{7}{5}x+\frac{73}{140}=0$.

25. $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)=\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)$.

26. $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$.

27. $\frac{5x}{21}(x+1)-\frac{1}{7}(2x^2+x-1)=\frac{4}{35}(x+1)$.

28. $8x+11+\frac{7}{x}=\frac{21+65x}{7}$.

29. $\frac{6}{x}+\frac{x}{6}=\frac{5(x-1)}{4}$.

30. $\frac{x}{7}+\frac{21}{x+5}=\frac{23}{7}$.

31. $\frac{21}{5-x}-\frac{x}{7}=\frac{23}{7}$.

32. $\frac{1}{2(x-1)}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{1}{4}$.

33. $\frac{3}{2(x^2-1)}+\frac{x}{4(x+1)}=\frac{3}{8}$.

34. $\frac{x}{15}+\frac{40}{3(10-x)}=\frac{3(10+x)}{95}$.

35. $\frac{2x}{15}+\frac{3x-50}{3(10+x)}=\frac{12x+70}{190}$.

36. $\frac{x^2-5x}{x+3}=x-3+\frac{1}{x}$.

37. $\frac{x+2}{x-1}-\frac{4-x}{2x}=\frac{7}{3}$.

38. $\frac{x}{x-1}=\frac{3}{2}+\frac{x-1}{x}$.

39. $\frac{x+4}{x-4}+\frac{x-4}{x+4}=\frac{10}{3}$.

40. $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{5}{6}$.

41. $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{13}{6}$.

42. $\frac{x-6}{x-12}-\frac{x-12}{x-6}=\frac{5}{6}$.

43. $\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+2}=\frac{3}{5}$.

44. $\frac{4}{x+1}+\frac{5}{x+2}=\frac{12}{x+3}$.

45. $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{x}=\frac{14}{x+4}$.

46 $\frac{2x-3}{3x-5}+\frac{3x-5}{2x-3}=\frac{5}{2}$.

47. $\frac{3x-2}{2x-5}-\frac{2x-5}{3x-2}=\frac{8}{3}$.

48. $\frac{x+3}{x+2}+\frac{x-3}{x-2}=\frac{2x-3}{x-1}$.

49. $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2(x+3)}{x-3}$.

50. $10(2x+3)(x-3)+(7x+3)^2=20(x+3)(x-1)$.

51. $(7-4\sqrt{3})x^2+(2-\sqrt{3})x=2$.

52. $x^2-2ax+a^2-b^2=0$.

53. $x^2-2ax+b^2=0$.

54. $(3a^2+b^2)(x^2-x+1)=(3b^2+a^2)(x^2+x+1)$.

55. $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$.

56. $\frac{1}{(x-b)(x-c)}+\frac{1}{(a+c)(a+b)}=\frac{1}{(a+c)(x-c)}+\frac{1}{(a+b)(x-b)}$.

57. $\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$.

58. $(ax-b)(bx-a)=c^2$.

59. $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{2c}{x-c}$.

60. $abx^2+\frac{3a^2x}{c}=\frac{6a^2+ab-2b^2}{c^2}-\frac{b^2x}{c}$.

61. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}+\frac{x+c}{x-c}=3$.

62. $\frac{a+c(a+x)}{a+c(a-x)}+\frac{a+x}{x}=\frac{a}{a-2cx}$.

ГЛАВА XXI.

Уравненія, рѣшаемыя подобно квадратнымъ.

325. Существуютъ уравненія, которыя, не будучи въ сущности квадратными, могутъ быть рѣшаемы по способамъ подобнымъ тѣмъ, какіе даны въ предыдущей главѣ.

Напримѣръ, возьмемъ уравненіе

$$x^4-9x^2+20=0.$$

Перенесемъ извѣстный членъ,

$$x^4-9x^2=-20,$$

придадимъ по $\left(\frac{9}{2}\right)^2$, $x^4-9x^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2=\left(\frac{9}{2}\right)^2-20=\frac{1}{4}$,

извлечемъ квадратный корень,

$$x^2-\frac{9}{2}=\pm\frac{1}{2};$$

поэтому $x^2=\frac{9}{2}\pm\frac{1}{2}=5$ или 4.

Слѣдовательно $x=\pm\sqrt{5}$ или ± 2.

326. Подобно этому мы можемъ рѣшить всякое уравненіе вида

$$ax^{2n}+bx^n+c=0.$$

Перенесемъ членъ c, $ax^{2n}+bx^n=-c$,

раздѣлимъ на a, $x^{2n}+\frac{b}{a}x^n=-\frac{c}{a}$,

приложимъ по $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, $x^{2n}+\frac{b}{a}x^n+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$,

извлечемъ квадратный корень,

$$x^n+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a};$$

слѣдовательно $x^n=\frac{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$.

Отсюда посредствомъ извлеченія корня n-й степени можетъ быть найдено значеніе x.

327. Положимъ, что дано уравненіе

$$x+4\sqrt{x}=21;$$

слѣдовательно $x+4\sqrt{x}+4=25$,

откуда $\sqrt{x}+2=\pm 5$;

слѣдовательно $\sqrt{x}=-2\pm 5=3$ или -7;

а потому $x=9$ или 49.

328. Возьмемъ еще примѣръ

$$x^{-1}+x^{-\frac{1}{2}}=6;$$

слѣдовательно $x^{-1}+x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}=\frac{25}{4}$;

поэтому $x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}=\pm\frac{5}{2}$,

откуда $x^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}=2$ или -3,

слѣдовательно $$x^{-1}=4 \text{ или } 9,$$

и наконецъ $$x=\frac{1}{4} \text{ или } \frac{1}{9}.$$

329. Положимъ, что требуется рѣшить уравненіе

$$x+\sqrt{(5x+10)}=8.$$

Сдѣлаемъ перенесеніе, $$\sqrt{(5x+10)}=8-x;$$

возвысимъ въ квадратъ обѣ части,

$$5x+10=64-16x+x^2;$$

слѣдовательно $$x^2-21x=-54;$$

и значитъ $$x^2-21x+\left(\frac{21}{2}\right)^2=\left(\frac{21}{2}\right)^2-54=\frac{225}{4};$$

откуда $$x-\frac{21}{2}=\pm\frac{15}{2};$$

и слѣдовательно $$x=\frac{21}{2}\pm\frac{15}{2}=18, \text{ или } 3.$$

Подставивъ эти значенія x въ лѣвую часть даннаго уравненія, мы найдемъ, что корень 3 удовлетворяетъ уравненію, но 18 не удовлетворяетъ ему; однако мы нашли-бы, что 18 удовлетворяетъ уравненію

$$x-\sqrt{(5x+10)}=8.$$

Дѣйствительно, уравненіе $5x+10=64-16x+x^2$, полученное нами изъ даннаго уравненія послѣ перенесенія членовъ и возвышенія въ квадратъ, можетъ быть также получено изъ уравненія $x-\sqrt{(5x+10)}=8$. Итакъ, мы не можемъ быть увѣрены, что окончательно полученныя нами значенія x будутъ удовлетворять предложенному уравненію; они могутъ удовлетворять уравненію другого вида.

330. Разсмотримъ еще примѣръ—

$$x-2\sqrt{(x^2+x+5)}-14=0.$$

Перенесемъ члены, $$x-14=2\sqrt{(x^2+x+5)};$$

возведемъ въ квадратъ, $$x^2-28x+196=4x^2+4x+20;$$

слѣдовательно $$3x^2+32x=176.$$

Изъ послѣдняго уравненія мы получимъ $x=4$, или $\frac{-44}{3}$. Но посредствомъ повѣрки найдемъ, что ни одно изъ этихъ значеній не удовлетворяетъ предложенному уравненію, хотя оба они удовлетворяютъ уравненію

$$x+2\sqrt{(x^2+x+5)}-14=0.$$

Изъ этого и предыдущаго примѣра мы видимъ, что когда какое нибудь уравненіе приведено къ раціональному виду посредствомъ возвышенія въ квадратъ, то необходимо бываетъ изслѣдовать, удовлетво-

ряютъ-ли окончательно полученныя значенія корней уравненію въ его первоначальномъ видѣ. Это замѣчаніе примѣнимо, напримѣръ, и къ уравненіямъ, рѣшеннымъ въ ст. 312, 327 и 328.

331. Положимъ, что всѣ члены уравненія перенесены въ одну часть, и полученное такимъ образомъ выраженіе можетъ быть представлено въ видѣ произведенія множителей первой или второй степени; тогда уравненіе можно рѣшить по способамъ, даннымъ раньше. Напримѣръ, положимъ, что

$$(x-c)(x^2-3ax+2a^2)=0.$$

Лѣвая часть уравненія обращается въ нуль, когда или $x-c=0$, или $x^2-3ax+2a^2=0$, и ни въ какомъ другомъ случаѣ. Но если $x-c=0$, то мы имѣемъ $x=c$, а если $x^2-3ax+2a^2=0$, то мы найдемъ, что $x=a$, или $x=2a$. Слѣдовательно предложенное уравненіе удовлетворяется значеніями $x=c$, или a, или $2a$, и никакими другими значеніями не удовлетворяется.

332. Умѣнье разлагать выраженія на два множителя можно пріобрѣсти только упражненіемъ; впрочемъ нѣкоторое пособіе можетъ оказать въ этомъ слѣдующее начало, которое мы выяснимъ на примѣрахъ. Разберемъ такой примѣръ

$$x(x-c)^2=a(a-c)^2.$$

Здѣсь очевидно, $x=a$ удовлетворяетъ уравненію; и мы найдемъ, что если перенести всѣ члены въ одну часть, то $x-a$ будетъ общимъ множителемъ всего выраженія. Дѣйствительно, уравненіе можно написать такъ

$$x^3-a^3-2c(x^2-a^2)+c^2(x-a)=0,$$

то-есть
$$(x-a)\{x^2+ax+a^2-2c(x+a)+c^2\}=0.$$

Слѣдовательно другіе корни кромѣ a найдутся изъ рѣшенія квадратнаго уравненія

$$x^2+ax+a^2-2c(x+a)+c^2=0.$$

Такимъ образомъ, когда одинъ изъ корней сразу видѣнъ, то мы легко можемъ привести уравненіе къ виду, указанному въ ст. 331.

333. Дадимъ теперь нѣсколько различныхъ примѣровъ такихъ уравненій, которыя могутъ быть сведены къ квадратнымъ.

1) Положимъ, что дано

$$x^2-7x+\sqrt{(x^2-7x+18)}=24.$$

Приложимъ по 18 къ обѣимъ частямъ; тогда

$$x^2-7x+18+\sqrt{(x^2-7x+18)}=42;$$

дополнимъ до квадрата; тогда

$$x^2-7x+18+\sqrt{(x^2-7x+18)}+\frac{1}{4}=42\tfrac{1}{4}=\frac{169}{4};$$

слѣдовательно $\sqrt{(x^2-7x+18)}+\frac{1}{2}=\pm\frac{13}{2}$;

откуда $\sqrt{(x^2-7x+18)}=6$, или -7;

а слѣдовательно $x^2-7x+18=36$, или 49.

Такимъ образомъ мы получили теперь два обыкновенныхъ квадратныхъ уравненія, и остается только рѣшить ихъ. Изъ перваго мы получимъ $x=9$ или -2, а изъ второго $x=\frac{1}{2}(7\pm\sqrt{173})$. Повѣркою мы найдемъ, что только первыя два рѣшенія удовлетворяютъ предложенному уравненію; другія-же два принадлежатъ уравненію

$$x^2-7x-\sqrt{(x^2-7x+18)}=24.$$

2) Положимъ, что дано

$$x^4+x^3-4x^2+x+1=0.$$

Раздѣлимъ на x^2; тогда

$$x^2+x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0;$$

или $$x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}-4=0,$$

слѣдовательно $$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0;$$

откуда $$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)=6.$$

и $$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4}=6\frac{1}{4}=\frac{25}{4};$$

слѣдовательно $$x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\pm\frac{5}{2};$$

откуда $$x+\frac{1}{x}=2, \text{ или } -3.$$

Положимъ во-первыхъ, что $$x+\frac{1}{x}=2;$$

тогда получимъ $$x^2-2x+1=0,$$

и слѣдовательно $$x=1.$$

Теперь положимъ, что $$x+\frac{1}{x}=-3;$$

тогда $$x^2+3x=-1;$$

а потому $$x^2+3x+\frac{9}{4}=\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4};$$

слѣдовательно $$x+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ и } x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

3) Положимъ, что дано

$$x^4+3x+1=3x^3+\frac{4}{9}x^2.$$

Перенесемъ члены,

$$x^4-3x^3+3x+1=\frac{4x^2}{9};$$

слѣдовательно $$\left(x^2-\frac{3x}{2}\right)^2-\frac{9x^2}{4}+3x+1=\frac{4x^2}{9};$$

откуда $$\left(x^2-\frac{3x}{2}\right)^2-2\left(x^2-\frac{3x}{2}\right)-\frac{x^2}{4}+1=\frac{4x^2}{9};$$

слѣдовательно $$\left(x^2-\frac{3x}{2}\right)^2-2\left(x^2-\frac{3x}{2}\right)+1=\frac{x^2}{4}+\frac{4x^2}{9}=\frac{25x^2}{36}.$$

Извлекая квадратный корень, получимъ

$$x^2-\frac{3x}{2}-1=\pm\frac{5x}{6}.$$

Теперь мы имѣемъ два обыкновенныхъ квадратныхъ уравненія, именно $x^2-\frac{3x}{2}-1=\frac{5x}{6}$ и $x^2-\frac{3x}{2}-1=-\frac{5x}{6}$.

Изъ перваго получимъ $x={}^1/_6(7\pm\sqrt{85})$, а изъ второго $x={}^1/_3(1\pm\sqrt{10})$.

4) Положимъ, что дано

$$6x\sqrt{x}-11x+6\sqrt{x}-1=0.$$

Мы можемъ писать это уравненіе въ видѣ

$$(x-3\sqrt{x})^2+2(x-3\sqrt{x})+1=x^2.$$

Слѣдовательно $$x-3\sqrt{x}+1=\pm x.$$

Возьмемъ сперва верхній знакъ; мы получимъ

$$x-3\sqrt{x}+1=x;$$

слѣдовательно $$\sqrt{x}=\frac{1}{3} \text{ и } x=\frac{1}{9}.$$

Возьмемъ теперь нижній знакъ; тогда

$$x-3\sqrt{x}+1=-x.$$

слѣдовательно $$2x-3\sqrt{x}+1=0.$$

Изъ этого уравненія мы получаемъ $\sqrt{x}=1$, или $\frac{1}{2}$, а слѣдовательно $x=1$, или $\frac{1}{4}$.

5) Положимъ, что дано

$$\frac{x+c+\sqrt{(x^2-c^2)}}{x+c-\sqrt{(x^2-c^2)}}=\frac{9(x+c)}{8c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

При рѣшеніи этого уравненія мы употребимъ пріемъ, который часто очень сокращаетъ алгебраическія вычисленія.

Положимъ, что $$\frac{a}{b}=\frac{p}{q},$$

тогда будетъ $$\frac{a+b}{b}=\frac{p+q}{q},\ \frac{a-b}{b}=\frac{p-q}{q},\ \frac{a+b}{a-b}=\frac{p+q}{p-q}.$$

Дѣйствительно, первый изъ этихъ трехъ выводовъ получается, если придать по единицѣ къ каждой изъ данныхъ равныхъ величинъ; второй получается вычитаніемъ единицы изъ каждой изъ данныхъ равныхъ величинъ; третій-же получается отъ дѣленія перваго вывода на второй. Каждымъ изъ этихъ пріемовъ можно въ извѣстныхъ случаяхъ пользоваться. Этимъ путемъ мы изъ даннаго уравненія (1) выводимъ:

$$\frac{2(x+c)}{2\sqrt{(x^2-c^2)}}=\frac{9x+17c}{9x+c}.$$

Возведемъ обѣ части въ квадратъ и упростимъ лѣвую часть, тогда получимъ

$$\frac{x+c}{x-c}=\frac{(9x+17c)^2}{(9x+c)^2} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Пользуясь третьимъ изъ предыдущихъ пріемовъ, мы выводимъ изъ (2)

$$\frac{x}{c}=\frac{(9x+17c)^2+(9x+c)^2}{(9x+17c)^2-(9x+c)^2}=\frac{(9x+17c)^2+(9x+c)^2}{16c(18x+18c)}.$$

Сдѣлавъ приведеніе, получимъ

$$63x^2-18xc-145c^2=0,$$

а отсюда $$x=\frac{5c}{3},\ \text{или}\ x=-\frac{29c}{21}.$$

6) Положимъ, что

$$\sqrt{\left(\frac{3a}{4}-x\right)}+\sqrt{(3ax-x)}=\frac{3a}{2}\sqrt{(1-4x)}.$$

Перенесемъ члены; тогда будетъ

$$\frac{3a}{2}\sqrt{(1-4x)}-\sqrt{\left(\frac{3a}{4}-x\right)}=\sqrt{(3ax-x)}.$$

Возведя въ квадратъ, получимъ

$$\frac{9a^2}{4}(1-4x)-3a\sqrt{(1-4x)}\sqrt{\left(\frac{3a}{4}-x\right)}=3ax-\frac{3a}{4}=-\frac{3a}{4}(1-4x).$$

Раздѣлимъ на $\sqrt{(1-4x)}$; тогда

$$\frac{9a^2+3a}{4}\sqrt{(1-4x)}=3a\sqrt{\left(\frac{3a}{4}-x\right)}.$$

Возведемъ въ квадратъ,

$$(1+3a)^2(1-4x)=16\left(\frac{3a}{4}-x\right);$$

слѣдовательно $4x\{(1+3a)^2-4\}=(1+3a)^2-12a=(1-3a)^2$;

а слѣдовательно $4x(3a+3)(3a-1)=(3a-1)^2$,

откуда $$x=\frac{3a-1}{12(a+1)}.$$

А изъ отброшеннаго множителя $\sqrt{(1-4x)}$ найдемъ еще корень $x=\frac{1}{4}$.

Этотъ примѣръ приведенъ съ цѣлью обратить вниманіе читателя на то обстоятельство, что когда обѣ части какого нибудь уравненія должны быть возвышены въ квадратъ, то прежде такого возвышенія, въ обѣихъ частяхъ уравненія нужно произвести наиболѣе удобное расположеніе членовъ. Въ этомъ примѣрѣ, если-бы мы возвели обѣ части въ квадратъ, оставивъ ихъ въ томъ видѣ, какъ онѣ были даны, мы не достигли-бы уничтоженія ни одного члена; но сдѣлавъ перестановку до возвышенія въ квадратъ, мы достигаемъ того, что величина $-x$ встрѣчается въ обѣихъ частяхъ, а слѣдовательно можетъ быть сокращена.

7) Положимъ, что дано

$$\sqrt{(x^2+9)}+\sqrt{(x^2-9)}=\sqrt{(34)}+4.$$

Мы имѣемъ слѣдующее тожество:

$$x^2+9-(x^2-9)=18=34-16.$$

Раздѣливъ обѣ части этого тожества на соотвѣтственныя части даннаго уравненія, мы получимъ

$$\sqrt{(x^2+9)}-\sqrt{(x^2-9)}=\sqrt{(34)}-4.$$

Сложивъ эти два уравненія, получимъ

$$\sqrt{(x^2+9)}=\sqrt{(34)};$$

слѣдовательно $x^2=25$, и $x=\pm 5$.

Это уравненіе приведено съ цѣлью показать употребленный здѣсь искусственный пріемъ. Такой пріемъ часто съ пользою можетъ примѣняться къ рѣшенію уравненій; напримѣръ, этимъ путемъ можно рѣшить задачу (6)

8) $$\sqrt{(2x+4)}-2\sqrt{(2-x)}=\frac{12x-8}{\sqrt{(9x^2+16)}}.$$

Это уравненіе мы можемъ переписать такъ:

$$\sqrt{(2x+4)}-2\sqrt{(2-x)}=\frac{2\{2(x+2)-4(2-x)\}}{\sqrt{(9x^2+16)}}.$$

Множитель $\sqrt{(2x+4)}-2\sqrt{(2-x)}$ можетъ быть теперь изъ обѣихъ частей удаленъ; тогда мы получимъ:

$$\sqrt{(9x^2+16)}=2\{\sqrt{(2x+4)}+2\sqrt{(2-x)}\}.$$

Возвысивъ въ квадратъ, найдемъ

$$9x^2+16=4\{12-2x+4\sqrt{(8-2x^2)}\},$$

слѣдовательно $x^2+8x=4(8-2x^2)+16\sqrt{(8-2x^2)}$;

а слѣдовательно $x^2+8x+16=4(8-2x^2)+16\sqrt{(8-2x^2)}+16$.

Извлечемъ квадратный корень; тогда

$$\pm(x+4)=2\sqrt{(8-2x^2)}+4.$$

Теперь рѣшеніе можетъ быть закончено, и мы получимъ

$$x=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3},$$

кромѣ того будетъ пара мнимыхъ корней.

Уравнявъ нулю отброшенный раньше множитель $\sqrt{(2x+4)}-2\sqrt{(2-x)}$, получимъ $x=\frac{2}{3}$.

Легко видѣть, что въ нѣкоторыхъ изъ этихъ примѣровъ употреблены очень искусственные пріемы. Умѣнье пользоваться такими преобразованіями читатель можетъ пріобрѣсти только однимъ упражненіемъ. Много примѣровъ такого рода можно найти въ главѣ LIV.

Примѣры уравненій, приводимыхъ къ квадратнымъ.

1. $3x+2\sqrt{x}-1=0$.
2. $x^{10}+31x^5=32$.
3. $3x^3+42x^{\frac{3}{2}}=3321$.
4. $x^{\frac{1}{n}}-13x^{\frac{1}{2n}}=14$.
5. $x^6-35x^3+216=0$.
6. $x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{2}{n}}+2=0$.
7. $x+2\sqrt{(ax)}+c=0$.
8. $3x^4-7x^2=43076$.
9. $x^4-14x^2+40=0$.
10. $x^{\frac{1}{3}}+\frac{5}{2x^{\frac{1}{3}}}=3\frac{1}{4}$.
11. $\sqrt{(2x)}-7x=-52$.
12. $3x^n\sqrt[3]{(x^n)}+\frac{2x^n}{3\sqrt{x^n}}=16$.
13. $x+5-\sqrt{(x+5)}=6$.
14. $2\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}=5$.
15. $x^{\frac{1}{4}}+5x^{\frac{1}{2}}-22=0$.
16. $3x^{\frac{3}{2}}-4x^{\frac{3}{4}}=7$.

17. $2x+\sqrt{(4x+8)}=\frac{7}{2}$. 18. $2(x^{\frac{1}{n}}+x^{-\frac{1}{n}}=5$.

19. $\sqrt{(2x+7)}+\sqrt{(3x-18)}=\sqrt{(7x+1)}$.

20. $\frac{\sqrt{(x^2-16)}}{\sqrt{(x-3)}}+\sqrt{(x+3)}=\frac{7}{\sqrt{(x-3)}}$.

21. $\sqrt{(a+x)}+\sqrt{(a-x)}=\sqrt{b}$. 22. $\sqrt{(x+9)}=2\sqrt{x}-3$.

23. $x+\sqrt{(5x+10)}=8$. 24. $2^{x+1}+4^x=80$.

25. $\frac{x^3-4x}{x-2}+\frac{x^2-1}{x+1}=39$. 26. $\frac{\sqrt{(a+x)}}{\sqrt{a}+\sqrt{(a+x)}}=\frac{\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{a}-\sqrt{(a-x)}}$.

27. $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=n(n-1)$.

28. $(a+b)\sqrt{(a^2+b^2+x^2)}-(a-b)\sqrt{(a^2+b^2+x^2)}=a^2+b^2$.

29. $x+\sqrt{x}+\sqrt{(x+2)}+\sqrt{(x^2+2x)}=a$.

30. $2x+\sqrt{(2+2x)}=c(1-x)$.

31. $\frac{a-x}{\sqrt{a}+\sqrt{(a-x)}}+\frac{a+x}{\sqrt{a}+\sqrt{(a+x)}}=\sqrt{a}$.

32. $\frac{\sqrt{(x+2a)}-\sqrt{(x-2a)}}{\sqrt{(x-2a)}+\sqrt{(x+2a)}}=\frac{x}{2a}$.

33. $\sqrt{(x+8)}-\sqrt{(x+3)}=\sqrt{x}$. 34. $\sqrt{(x+3)}+\sqrt{(x+8)}=5\sqrt{x}$.

35. $\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}+\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}=\frac{34}{15}$. 36. $\sqrt{(a+bx^n)}-\sqrt{a}=c\sqrt{(bx^n)}$.

37. $\sqrt{(x+4)}-\sqrt{x}=\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)}$. 38. $x^2+\frac{1}{x^2}-a^2-\frac{1}{a^2}=0$.

39. $\frac{850}{931}=\frac{x^2(x^4-a^4)}{x^6-a^6}$.

40. $\frac{\sqrt{(x^2+1)}+\sqrt{(x^2-1)}}{\sqrt{(x^2+1)}-\sqrt{(x^2-1)}}+\frac{\sqrt{(x^2+1)}-\sqrt{(x^2-1)}}{\sqrt{(x^2+1)}+\sqrt{(x^2-1)}}=4\sqrt{(x^2-1)}$.

41. $\left(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(a^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$. 42. $\frac{a^2+x^2}{a+x}+\frac{a^2-x^2}{a-x}=4a$.

43. $\sqrt{(1-x+x^2)}-\sqrt{(1+x+x^2)}=m$.

44. $\frac{x+\sqrt{(x^2-1)}}{x-\sqrt{(x^2-1)}}+\frac{x-\sqrt{(x^2-1)}}{x+\sqrt{(x^2-1)}}=34$.

45. $\sqrt{(x^2-3ax+a^2)}+\sqrt{(x^2+3ax+a^2)}=\sqrt{(2a^2+2b^2)}$.

46. $x\sqrt{\left(\frac{6}{x}-x\right)}=\frac{1+x^2}{\sqrt{x}}$. 47. $\sqrt[2pq]{(x^{p+q})}-\frac{1}{2c}(\sqrt[p]{x}+\sqrt[q]{x})=0$.

48. $\sqrt{x}+\sqrt{\{x-\sqrt{(1-x)}\}}=1$. 49. $(x+a)^5-(x-a)^5=242a^5$.

50. $\dfrac{x^3+1}{x^2-1}=x+\sqrt{\dfrac{6}{x}}$.

51. $\sqrt{(x^2+ax+b^2)}+\sqrt{(x^2+bx+a^2)}=a+b$.

52. $\dfrac{25x^2-16}{10x-8}=\dfrac{3(x^2-4)x}{2x-4}$.

53. $\sqrt{(2x+9)}+\sqrt{(3x-15)}=\sqrt{(7x+8)}$.

54. $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\left\{\dfrac{(b-c)(ac-bx)}{abc}\right\}}=1$.

55. $\sqrt{(x^2+2x-1)}+\sqrt{(x^2+x+1)}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

56. $\sqrt{(x^2+ax-1)}+\sqrt{(x^2+bx-1)}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

57. $(x^2+1)(x+2)=2$.

58. $(x^2+a)(x+b)=ab$.

59. $(x-a)(x-b)(x-c)+abc=0$.

60. $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{4x}{1+x^2}$.

61. $\dfrac{1}{x+a+b}+\dfrac{1}{x-a+b}+\dfrac{1}{x+a-b}+\dfrac{1}{x-a-b}=0$.

62. $\dfrac{(a-x)(x+m)}{x+n}=\dfrac{(a+x)(x-m)}{x-n}$.

63. $\left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)^2=1+\dfrac{cx}{ab}$.

64. $2x+1+x\sqrt{(x^2+2)}+(x+1)\sqrt{(x^2+2x+3)}=0$.

65. $x^2+3=2\sqrt{(x^2-2x+2)}+2x$.

66. $x^2+5x+4=5\sqrt{(x^2+5x+28)}$.

67. $\sqrt{(x^2-2x+9)}-\dfrac{x^2}{2}=3-x$.

68. $3x^2+15x-2\sqrt{(x^2+5x+1)}=2$.

69. $(x+5)(x-2)+3\sqrt{\{x(x+3)\}}=0$.

70. $x^2+3-\sqrt{(2x^2-3x+2)}=\dfrac{3}{2}(x+1)$.

71. $x(x+1)+3\sqrt{(2x^2+6x+5)}=25-2x$.

72. $x^2-2\sqrt{(3x^2-2ax+4)}+4=\dfrac{2a}{3}\left(x+\dfrac{a}{2}+1\right)$.

73. $x^2-x+3\sqrt{(2x^2-3x+2)}=\dfrac{x}{2}+7$.

74. $\dfrac{9}{1+x+x^2}=5-x-x^2$.

75. $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)=c^4$.

76. $16x(x+1)(x+2)(x+3)=9$.

77. $\dfrac{a^2+ax+x^2}{a^2-ax+x^2}=\dfrac{a^2}{x^2}$. 78. $a=x^4+(1-x)^4$.

79. $x^4-2x^3+x=a$. 80. $x^4-2x^3+x=132$.

81. $\sqrt{x}+\sqrt{(x+7)}+2\sqrt{(x^2+7x)}=35-2x$.

82. $x^2-8(x+1)\sqrt{x}+18x+1=0$.

83. $2(x^2+ax)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{x}+\sqrt{(a+x)}=b-2x$.

84. $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0$. 85. $x^4+4a^3x=a^4$.

86. $x^4+ax^3+bx^2+cx+\dfrac{c^2}{a^2}=0$.

87. $1+\sqrt{\left(1-\dfrac{a}{x}\right)}=\sqrt{\left(1+\dfrac{x}{a}\right)}$.

88. $x^2+\dfrac{1}{x^2}+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{142}{9}$.

89. $\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}-\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{x-1}{x}$. 90. $\dfrac{x^4+1}{(x+1)^4}=\dfrac{1}{2}$.

91. $x^2+1=0$. 92. $nx^3+x+n+1=0$.

93. $(x-2)(x-3)(x-4)=1.2.3$.

94. $(x-1)(x-2)(x-3)-(6-1)(6-2)(6-3)=0$.

95. $(x-1)(x-2)(x-3)=24$. 96. $6x^3-5x^2+x=0$.

97. $x^3+x^2-4x-4=0$. 98. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{b}{x}+\dfrac{b^2}{x^2}=1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{b^2}{a^2}$.

99. $8x^3+16x=9$. 100. $x^2-\dfrac{2}{3x}=1\frac{4}{9}$.

101. $3x^6+8x^4-8x^2=3$. 102. $x(x^2-2)=m(x^2+2mx+2)$.

103. $(x^2-a^2)(x+a)b+(a^2-b^2)(a+b)x+(b^2-x^2)(b+x)a=0$.

104. $x^3+px^2+\left(p-1+\dfrac{1}{p-1}\right)x+1=0$.

105. $(p-1)^2x^3+px^2+\left(p-1+\dfrac{1}{p-1}\right)x+1=0$.

ГЛАВА XXII.

Теорія квадратныхъ уравненій и выраженій второй степени.

334. *Квадратное уравненіе не можетъ имѣть болѣе двухъ корней.*

Дѣйствительно, всякое квадратное уравненіе можетъ принять видъ $ax^2+bx+c=0$, если всѣ члены его собрать въ одной части уравненія, и тогда по ст. 318 значеніе x будетъ или

$$\frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}, \text{ или } \frac{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a},$$

то-есть значеніе x должно быть тѣмъ или другимъ изъ этихъ *двухъ* количествъ.

Доказательство этого даютъ иногда въ такомъ видѣ. Пусть, если возможно, три различныя количества α, β и γ будутъ корнями квадратнаго уравненія $ax^2+bx+c=0$; тогда по предположенію

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0,\ a\beta^2+b\beta+c=0,\ a\gamma^2+b\gamma+c=0.$$

Вычитая, получимъ

$$a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0;$$

раздѣлимъ на $\alpha-\beta$, что по предположенію не равно нулю;

тогда $$a(\alpha+\beta)+b=0.$$

Подобнымъ же образомъ $$a(\alpha+\gamma)+b=0.$$

Вычтя одно изъ другого, получимъ

$$a(\beta-\gamma)=0;$$

но это невозможно, потому что по предположенію a не есть нуль, а также и $\beta-\gamma$ не равняется нулю. Слѣдовательно квадратное уравненіе не можетъ имѣть трехъ различныхъ корней.

335. *Въ квадратномъ уравненіи, въ которомъ коэффиціентъ перваго члена есть единица и всѣ члены котораго находятся въ одной части, сумма корней равна коэффиціенту второго члена съ обратнымъ знакомъ, а произведеніе корней равно послѣднему члену.*

Дѣйствительно, корни уравненія $ax^2+bx+c=0$ будутъ

$$\frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} \text{ и } \frac{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a},$$

слѣдовательно сумма корней будетъ $-\frac{b}{a}$, а произведеніе ихъ будетъ $\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$, то-есть $\frac{c}{a}$. А по раздѣленіи на a, уравненіе напишется $x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0$, и такимъ образомъ предложеніе доказано.

*

336. Пусть α и β означаютъ корни уравненія

$$ax^2+bx+c=0;$$

тогда $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ и $\alpha\beta=\frac{c}{a}$. Эти соотношенія полезны при нахожденіи значеній такихъ выраженій, въ которыхъ α и β встрѣчаются въ симметрическомъ видѣ. Напримѣръ

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a};$$

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{b^2-4ac}{a^2};$$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{b}{a}:\frac{c}{a}=-\frac{b}{c}.$$

Соотношенія, доказанныя въ ст. 335, полезны для провѣрки рѣшенія какого нибудь квадратнаго уравненія; какъ скоро полученные корни не удовлетворяютъ этимъ соотношеніямъ, мы можемъ быть увѣрены, что въ вычисленіе вкралась какая нибудь ошибка.

Когда мы знаемъ одинъ корень квадратнаго уравненія, то можемъ найти другой при помощи одного изъ такихъ соотношеній. Возьмемъ напримѣръ уравненіе

$$\frac{a+c}{x+a}+\frac{b+c}{x+b}=\frac{2(a+b+c)}{x+a+b}.$$

Здѣсь $x=c$ очевидно удовлетворяетъ уравненію; освободивъ уравненіе отъ дробей, мы получимъ

$$(a+b)x^2+\{a^2+b^2-c(a+b\}x-c(a^2+b^2)=0.$$

Итакъ произведеніе корней равно $-\frac{c(a^2+b^2)}{a+b}$; а такъ какъ одинъ изъ корней есть c, то другой долженъ быть $-\frac{a^2+b^2}{a+b}$.

337. Мы имѣемъ

$$ax^2+bx+c=a\left\{x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}\right\};$$

теперь подставимъ вмѣсто $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$ ихъ выраженія въ зависимости отъ α и β; тогда

$$ax^2+bx+c=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

Такимъ образомъ *выраженіе* ax^2+bx+c тожественно *съ выраженіемъ* $a(x-\alpha)(x-\beta)$; то-есть два эти выраженія равны для всѣхъ значеній x.

Поэтому мы можемъ доказать предложеніе ст. 334 инымъ образомъ. Дѣйствительно, никакое другое значеніе x кромѣ α и β не можетъ уничтожить $(x-\alpha)(x-\beta)$, такъ какъ произведеніе двухъ величинъ не можетъ уничтожиться, если не уничтожается ни одна изъ этихъ величинъ.

Читатель естественно можетъ спросить, остается-ли тожество

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

справедливымъ также и въ случаяхъ, упомянутыхъ въ ст. 323, когда корни $ax^2+bx+c=0$ становятся *невозможными*. Мы возвратимся къ этому вопросу въ главѣ XXV.

338. Учащійся долженъ тщательно отличать *уравненія второй степени* отъ *выраженій второй степени*. Въ уравненіи второй степени или квадратномъ $ax^2+bx+c=0$ мы можемъ предполагать, что x имѣетъ только одно изъ двухъ опредѣленныхъ значеній, но когда мы говоримъ о *выраженіи* второй степени ax^2+bx+c, не считая его равнымъ нулю, тогда можемъ предполагать, что x имѣетъ какое угодно значеніе.

339. Мы имѣемъ

$$ax^2+bx+c=a\left\{x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right\}=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}.$$

Теперь положимъ во-первыхъ, что b^2-4ac будетъ величина *отрицательная*; изъ этого слѣдуетъ, что $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ необходимо будетъ положительною величиною для всѣхъ дѣйствительныхъ значеній x. Въ этомъ случаѣ ax^2+bx+c, равное произведенію a на нѣкоторое положительное количество, должно имѣть такой-же знакъ, какъ и a. Такимъ образомъ, если b^2-4ac будетъ величиной отрицательной, то ax^2+bx+c имѣетъ тотъ-же знакъ, какъ и a для всѣхъ дѣйствительныхъ значеній x.

Затѣмъ положимъ, что b^2-4ac равно *нулю*, тогда

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Здѣсь, какъ и прежде, ax^2+bx+c имѣетъ тотъ же знакъ, какъ и a; въ этомъ случаѣ выраженіе ax^2+bx+c будетъ *точнымъ квадратомъ* въ отношеніи x, и его квадратный корень будетъ

$$\pm\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right).$$

Наконецъ положимъ, что b^2-4ac величина *положительная*; тогда

$$ax^2+bx+c=a\left\{x+\frac{b}{2a}-\frac{\surd(b^2-4ac)}{2a}\right\}\left\{x+\frac{b}{2a}+\frac{\surd(b^2-4ac)}{2a}\right\}$$
$$=a(x-\alpha)(x-\beta),$$

гдѣ α и β дѣйствительныя величины, именно

$$\alpha=\frac{-b+\surd(b^2-4ac)}{2a} \text{ и } \beta=\frac{-b-\surd(b^2-4ac)}{2a},$$

Выраженіе $a(x-\alpha)(x-\beta)$ должно имѣть тотъ-же знакъ, какъ и a, исключая случай, когда одинъ изъ множителей $x-\alpha$ или $x-\beta$ будетъ положительнымъ а другой отрицательнымъ; мы покажемъ теперь, что это можетъ быть единственно лишь въ случаѣ, когда x заключается между α и β. Изъ двухъ разностей $\alpha-\beta$ и $\beta-\alpha$ одна должна быть положительной; положимъ, что такою будетъ первая разность, такъ что что α *алгебраически* будетъ *больше* чѣмъ β. Теперь, если x алгебраически больше α, то $x-\alpha$ величина положительная, а слѣдовательно $x-\beta$ тоже положительная величина; если же x *алгебраически меньше* β, то $x-\beta$ будетъ величиною отрицательною, а слѣдовательно отрицательною-же будетъ и $x-\alpha$ Но если x заключается между α и β, то $x-\alpha$ будетъ отрицательной, а $x-\beta$ положительной. Для такого значенія x знакъ выраженія ax^2+bx+c противоположенъ знаку a.

Заключеніе, вытекающее изъ разбора этихъ трехъ случаевъ—слѣдующее: какое-бы дѣйствительное значеніе не имѣло x, выраженіе ax^2+bx+c и a всегда имѣютъ одинаковый знакъ, кромѣ того случая, когда корни уравненія $ax^2+bx+c=0$ возможны и различны, и значеніе для x взято такое, что оно заключается между этими корнями.

340. Корни уравненія

$$ax^2+bx+c=0 \text{ будутъ } \frac{-b\pm\surd(b^2-4ac)}{2a},$$

а корни уравненія

$$ax^2-bx+c=0 \text{ будутъ } \frac{b\pm\surd(b^2-4ac)}{2a}.$$

Очевидно, что корни послѣдняго уравненія тѣ же, что и корни перваго, но съ обратнымъ знакомъ. Слѣдовательно, если два квадратныя уравненія различаются только знакомъ второго члена, то корни одного изъ нихъ могутъ быть получены посредствомъ измѣненія знаковъ корней другого.

341. Положимъ, что намъ нужно раздѣлить ax^2+bx+c на $x-h$. Первый членъ частнаго будетъ ax, слѣдующій членъ будетъ $ah+b$ и наконецъ получится остатокъ ah^2+bh+c. Если этотъ остатокъ уничтожается, такъ что $ah^2+bh+c=0$, то h есть *корень уравненія*

$ax^2+bx+c=0$. Такимъ образомъ *выраженіе* ax^2+bx+c дѣлится на $x-h$ только тогда, когда h будетъ корнемъ *уравненія* $ax^2+bx+c=0$.

342. Теперь можно будетъ разсмотрѣть нѣкоторые частные случаи уравненія $ax^2+bx+c=0$. Корни этого уравненія суть

$$\frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} \text{ и } \frac{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}.$$

Изслѣдуемъ сперва случай, когда $a=0$.

Числитель перваго корня дѣлается тогда $-b+b$, то-есть 0; такимъ образомъ корень этотъ принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$. Числитель второго корня будетъ $-2b$, такъ что этотъ корень принимаетъ видъ $\frac{-2b}{0}$. Если въ первоначальномъ уравненіи мы положимъ $a=0$; то оно обратится въ $bx+c=0$, такъ что $x=-\frac{c}{b}$; того-же результата мы достигнемъ съ помощью выраженія, принимающаго видъ $\frac{0}{0}$, посредствомъ надлежащаго преобразованія. Дѣйствительно, умноживъ числителя и знаменателя дроби $\frac{-b+\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$ на $b+\sqrt{(b^2-4ac)}$, мы получимъ

$$\frac{-2c}{b+\sqrt{(b^2-4ac)}},$$

и если теперь положимъ $a=0$, то получимъ $\frac{-2c}{2b}$, то-есть $-\frac{c}{b}$. Если и корень $\frac{-b-\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$ преобразуемъ, умноживъ его числителя и знаменателя на $b-\sqrt{(a^2-4ac)}$, то онъ обратится въ $\frac{-2c}{b-\sqrt{(b^2-ac)}}$, и чѣмъ меньше a, тѣмъ меньше будетъ и знаменатель этой дроби, а слѣдовательно тѣмъ больше сама дробь; къ такому-же заключенію, очевидно, можно придти, и не производя преобразованія корня. Такимъ образомъ мы можемъ выразить наши выводы въ слѣдующихъ словахъ: Если въ уравненіи $ax^2+bx+c=0$ коэффиціентъ a очень малъ въ сравненіи съ b и c, то одинъ корень будетъ очень великъ, а другой близокъ къ $-\frac{c}{b}$, и чѣмъ меньше a, тѣмъ больше будетъ первый корень и тѣмъ ближе къ $-\frac{c}{b}$ будетъ второй.

343. Теперь положимъ, что a и b будутъ равны нулю; тогда обыкновенныя выраженія обоихъ корней примутъ видъ $\frac{0}{0}$. Преобразовавъ

корни по предыдущему, мы увидимъ, что если a и b очень малы сравнительно съ c, то оба корня становятся весьма большими и будутъ тѣмъ больше, чѣмъ меньше a и b.

344. Наконецъ положимъ, что a, b и c будутъ нули; тогда корни примутъ видъ $\frac{0}{0}$. Въ этомъ случаѣ, если мы преобразуемъ корни, какъ въ ст. 342, то снова придемъ къ выводу $\frac{0}{0}$, и можемъ сказать, что здѣсь значеніе x въ самомъ дѣлѣ неопредѣленно.

345. Дадимъ примѣръ приложенія выводовъ ст. 339.

Пусть требуется удостовѣриться, можетъ-ли дробь $\frac{x^2-2x+21}{6x-14}$ принимать какое угодно значеніе при надлежащемъ выборѣ величины x.

Положимъ $$\frac{x^2-2x+21}{6x-14}=y;$$

тогда $$x^2-2x+21=y(6x-14);$$

слѣдовательно $$x^2-2(1+3y)x+21+14y=0.$$

Рѣшивъ это квадратное уравненіе, мы получаемъ

$$x=1+3y\pm\sqrt{(9y^2-8y-20)}.$$

Слѣдовательно, если x будетъ дѣйствительнымъ количествомъ, то $9y^2-8y-20$ должно быть положительнымъ, т.-е. $9\,(y-2)(y+\frac{10}{9})$ должно быть положительнымъ. Слѣдовательно y не можетъ заключаться между 2 и $-\frac{10}{9}$, но можетъ имѣть всякое другое значеніе. Итакъ мы заключаемъ, что при надлежаще выбранномъ значеніи x дробь $\frac{x^2-2x+21}{6x-14}$ можетъ имѣть какое угодно значеніе, исключая величинъ, содержащихся между 2 и $-\frac{10}{9}$.

Примѣры къ теоріи уравненій и выраженій второй степени.

Разложить слѣдующія четыре квадратныя выраженія на произведеніе простыхъ множителей.

1. $3x^2-10x-25$.
2. $x^2+73x+780$.
3. $2x^2+x-6$.
4. $x^2-88x+1612$.
5. Составить квадратное уравненіе, корни котораго 6 и 8.
6. Составить квадратное уравненіе, корни котораго 4 и 5.
7. Составить квадратное уравненіе, корни котораго 1 и -2.

8. Составить квадратное уравненіе, корни котораго $1\pm\sqrt{5}$.

9. Найти сумму, разность и произведеніе корней уравненія:

$$x^2-42x+117=0.$$

10. При какомъ значеніи m уравненіе $2x^2+8x+m=0$ будетъ имѣть равные корни?

11. Если α и β будутъ корни уравненія $x^2-px+q=0$, то найти значеніе выраженій $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ и $\alpha^3+\beta^3$.

12. Если α и β будутъ корни уравненія $ax^2+bx+c=0$, то составить уравненіе, корни котораго были бы $\frac{1}{\alpha}$ и $\frac{1}{\beta}$.

13. Показать, что корни уравненія $x^2+px+q=0$ будутъ раціональными, если $p=k+\frac{q}{k}$, гдѣ p, q, k нѣкоторыя раціональныя количества

14. Показать, что если $ax^2+bx+c=0$ и $a'x^2+b'x+c'=0$ имѣютъ общій корень, то $(a'c-ac')^2=(a'b-ab')(b'c-c'b)$.

15. Если x будетъ дѣйствительная величина, то доказать, что $\frac{2x-7}{2x^2-2x-5}$ не можетъ имѣть дѣйствительнаго значенія между $\frac{1}{11}$ и 1.

16. Если p больше единицы, тогда для всѣхъ дѣйствительныхъ значеній x выраженіе $\frac{x^2-2x+p^2}{x^2+2x+p^2}$ заключается между $\frac{p-1}{p+1}$ и $\frac{p+1}{p-1}$.

ГЛАВА XXIII.

Совмѣстныя уравненія второй степени.

336. Теперь мы дадимъ нѣсколько примѣровъ совмѣстныхъ уравненій, въ которыхъ одно уравненіе или болѣе можетъ быть выше, чѣмъ первой степени. При рѣшеніи такихъ задачъ употребляются разные искусственные пріемы, надлежащее умѣнье пользоваться которыми можно пріобрѣсти лишь путемъ упражненія.

1) Положимъ, что даны уравненія

$$x^2-2y^2=71,\ x+y=20.$$

Изъ второго уравненія находимъ $y=20-x$; подставимъ это въ первое, тогда получимъ

$$x^2-2(20-x)^2=71;$$

слѣдовательно $$-x^2+80x-800=71,$$

а слѣдовательно $$x^2-80x=-871.$$

Изъ этого квадратнаго уравненія мы получимъ $x=13$, или 67; тогда изъ уравненія $y=20-x$ найдемъ соотвѣтственныя значенія y, именно $y=7$, или -47.

2) Положимъ, что даны уравненія

$$x^2+y^2=25,\ xy=12.$$

Здѣсь $$x^2+y^2=25,$$
$$2xy=24;$$

поэтому, сложивъ ихъ, найдемъ

$$x^2+2xy+y^2=25+24=49,$$

то-есть $$(x+y)^2=49,$$

слѣдовательно $$x+y=\pm 7.$$

Подобнымъ-же образомъ, вычитая, найдемъ

$$(x-y)^2=25-24=1.$$

слѣдовательно $$x-y=\pm 1.$$

Теперь намъ придется разсмотрѣть четыре случая, именно:

$$x+y=7,\ x-y=\ \ 1;\quad x+y=-7,\ x-y=\ \ 1$$
$$x+y=7,\ x-y=-1;\quad x+y=-7,\ x-x=-1.$$

Рѣшивъ эти простыя уравненія, мы получимъ окончательно

$$x=\pm 3,\ y=\pm 4;\ \text{или}\ x=\pm 4,\ y=\pm 3.$$

3) Положимъ, что даны уравненія

$$2y^2-4xy+3x^2=17,\ y^2-x^2=16.$$

Пусть $y=vx$, и подставимъ это въ оба уравненія; тогда

$$x^2(2v^2-4v+3)=17,\ x^2(v^2-1)=16;$$

поэтому, раздѣливъ, найдемъ

$$\frac{2v^2-4v+3}{v^2-1}=\frac{17}{16};$$

слѣдовательно $$32v^2-64v+48=17v^2-17,$$

то-есть $$15v^2-64v+65=0.$$

Изъ этого квадратнаго уравненія мы найдемъ $v=\frac{5}{3}$ или $\frac{13}{5}$. Возьмемъ первое значеніе v; тогда $x^2=\frac{16}{v^2-1}=9$; слѣдовательно $x=\pm 3$ и $y=vx=\pm 5$. Взявъ затѣмъ второе значеніе v, мы будемъ имѣть $x^2=\frac{25}{9}$; слѣдовательно $x=\pm\frac{5}{3}$ и $y=\pm\frac{13}{3}$.

Употребленный здѣсь искусственный пріемъ можетъ быть удобнымъ, когда члены, заключающіе неизвѣстныя количества, составляютъ въ каждомъ уравненіи выраженіе однородное второй степени. (Смотри ст. 24).

4) Положимъ, что даны уравненія

$$x^2+xy-6y^2=24,\ x^2+3xy-10y^2=32.$$

Пусть $y=vx$; подставимъ это въ оба уравненія и раздѣлимъ ихъ другъ на друга; тогда

$$\frac{1+3v-10v^2}{1+v-6v^2}=\frac{32}{24}=\frac{4}{3},$$

слѣдовательно $$6v^2-5v+1=0.$$

Изъ этого квадратнаго уравненія мы получимъ $v=\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{3}$. Значеніе $v=\frac{1}{2}$ окажется невозможнымъ, потому что оно приводитъ къ недопустимому выводу $x^2\times 0=24$. Дѣйствительно, уравненія изъ которыхъ получены значенія v, могутъ быть написаны такъ:

$$x^2(1-2v)(1+3v)=24;\ x^2(1-2v)(1+5v)=32;$$

а отсюда мы видимъ, что значеніе v, найденное изъ уравненія $1-2v=0$ не приложимо, и что такимъ образомъ мы должны взять только $\frac{1+3v}{1+5v}=\frac{24}{32}$, что дастъ $v=\frac{1}{3}$.

Тогда $$x^2\left(1-\frac{2}{3}\right)(1+1)=24;$$

слѣдовательно $x^2=36$; а потому $x=\pm 6$, и $y=\pm 2$.

5) Положимъ, что даны уравненія

$$x+y=a,\ x^5+y^5=b^5.$$

Раздѣливъ одно на другое, найдемъ

$$\frac{x^5+y^5}{x+y}=\frac{b^5}{a},$$

то-есть $$x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4=\frac{b^5}{a},$$

или $$x^4+y^4-xy(x^2+y^2)+x^2y^2=\frac{b^5}{a}.$$

А такъ какъ $$x+y=a,$$
$$x^2+y^2=a^2-2xy;$$

то слѣдовательно $x^4+y^4+2x^2y^2=(a^2-2xy)^2=a^4-4a^2xy+4x^2y^2$;

откуда $$x^4+y^4=a^4-4a^2xy+2x^2y^2.$$

Подставивъ значенія x^4+y^4 и x^2+y^2, мы получимъ

$$a^4-4a^2xy+2x^2y^2-xy(a^2-2xy)+x^2y^2=\frac{b^5}{a},$$

то-есть $$5x^2y^2 - 5a^2xy = \frac{b^5}{a} - a^4.$$

Мы можемъ получить этотъ результатъ также и другимъ путемъ. Можно показать, что

$$a^5 = x^5 + y^5 + 5xy(x^3 + y^3) + 10x^2y^2(x + y);$$

такимъ образомъ $$a^5 - b^5 = 5xy(x^3 + y^3) + 10ax^2y^2;$$

и $$a^3 = x^3 + y^2 + 3xy(x + y)$$

$$= x^3 + y^3 + 3axy;$$

слѣдовательно $$a^5 - b^5 = 5xy(a^3 - 3axy) + 10ax^2y^2,$$

или $$5ax^2y^2 - 5a^3xy = b^5 - a^5.$$

Изъ этого квадратнаго уравненія мы можемъ найти два значенія xy; пусть c будетъ одно изъ этихъ значеній; тогда мы будемъ имѣть

$$x + y = a, \quad xy = c;$$

итакъ $$(x + y)^2 - 4xy = a^2 - 4c,$$

то-есть $$(x - y)^2 = a^2 - 4c;$$

поэтому $$x - y = \pm\sqrt{(a^2 - 4c)}.$$

Такимъ образомъ, зная $x + y$ и $x - y$, мы непосредственно можемъ найти значенія x и y.

Можно поступить еще такъ: Положимъ $x - y = z$; тогда, такъ какъ $x + y = a$, то мы получимъ

$$x = \frac{1}{2}(a + z), \quad y = \frac{1}{2}(a - z).$$

Подставимъ во второе изъ данныхъ уравненій; тогда

$$(a + z)^5 + (a - z)^5 = 32b^5,$$

слѣдовательно $$5az^4 + 10a^3z^2 = 16b^5 - a^5.$$

Изъ этого квадратнаго уравненія мы можемъ найти z^2, и слѣдовательно z, то-есть $x - y$; а слѣдовательно x и y.

Большое число такихъ примѣровъ можно найти въ главѣ LIV.

Примѣры совмѣстныхъ уравненій второй степени.

1. $4x^2 + 7y^2 = 148, \quad 3x^2 - y^2 = 11.$

2. $x + y = 100, \quad xy = 2400.$

3. $x + y = 4, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1.$

4. $x + y = 7, \quad x^2 + 2y^2 = 34.$

5. $x - y = 12, \quad x^2 + y^2 = 74.$

6. $x - \frac{x - y}{2} = 4, \quad y - \frac{x + 3y}{x + 2} = 1.$

7. $x^2 + y^2 = 65, \quad xy = 28.$

8. $xy = 1, \quad 3x - 5y = 2.$

9. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2, \quad x + y = 2.$

10. $x^2+xy+2y^2=74,\ 2x^2+2xy+y^2=73.$

11. $2x+3y=37;\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{14}{45}.$

12. $x^2+3xy=54,\ xy+4y^2=115.$

13. $x^2+xy=15,\ xy-y^2=2.$

14. $x^2+xy+4y^2=6,\ 3x^2+8y^2=14.$

15. $x^2+xy=12,\ xy-2y^2=1.$

16. $x^2-xy+y^2=21,\ y^2-2xy+15=0.$

17. $x^2-4y^2=9,\ xy+2y^2=3.$

18. $7x^2-8xy=159,\ 5x+2y=7.$

19. $x^2-2xy-y^2=1,\ x+y=2.$

20. $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{10}{3},\ x^2+y^2=45.$

21. $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{5}{2},\ x^2+y^2=20.$

22. $0.1y+0.125x=y-x,\ y-0.5x=0.75xy-3x.$

23. $0.3x+0.125y=3x-y,\ 3x-0.5y=2.25xy+3y.$

24. $\left.\begin{array}{l} y^2-4xy+20x^2+3y-264x=0 \\ 5y^2-38xy+x^2-12y+1056x=0 \end{array}\right\}.$

25. $x+y=x^2,\ 3y-x=y^2.$

26. $x^2+y^2=\frac{5}{2}xy,\ x-y=\frac{1}{4}xy.$

27. $x+2y+\frac{3x}{y}=16,\ 3x+y+\frac{3x}{y}=23.$

28. $4(x+y)=3xy,\ x+y+x^2+y^2=26.$

29. $x-y=2,\ x^3-y^3=8.$

30. $x+y=5,\ x^3+y^3=65.$

31. $x+y=11,\ x^3+y^3=1001.$

32. $xy(x+y)=30,\ x^3+y^3=35.$

33. $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=18,\ x+y=12.$

34. $x+y=18,\ x^3+y^3=4914.$

35. $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=9,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4}.$

36. $x^3(x+y)=80,\ x^2(2x-3y)=80.$

37. $x^2y+y^2x=20,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{4}.$

38. $x^2+y^2=7+xy,\ x^3+y^3=6xy-1.$

39. $x^2+y^2=8,\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2}.$

40. $x+y=4,\ x^4+y^4=82.$

41. $x^5-y^5=3093$, $x-y=3$.

42. $\left(3-\frac{6y}{x+y}\right)^2+\left(3+\frac{6y}{x-y}\right)^2=82$, $xy=2$.

43. $x^2-x^2y^2+y^2=19$, $x-xy+y=4$.

44. $x^2-xy+y^2=7$, $x^4+x^2y^2+y^4=133$.

45. $x^2+xy+y^2=49$, $x^4+x^2y^2+y^4=931$.

46. $x^4-x^2+y^4-y^2=84$, $x^2+x^2y^2+y^2=49$.

47. $x(12-xy)=y(xy-3)$, $xy(y+4x-xy)=12(x+y-3)$.

48. $x+y+\sqrt{(xy)}=14$, $x^2+y^2+xy=84$.

49. $x+y-\sqrt{(xy)}=7$, $x^2+y^2+xy=133$.

50. $x+y=72$, $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6$.

51. $x+\sqrt{(x^2-y^2)}=8$, $x-y=1$.

52. $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{7}{\sqrt{(xy)}}+1$, $\sqrt{(x^3y)}+\sqrt{(y^3x)}=78$.

53. $x+y=10$, $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2}$.

54. $\sqrt{x}-\sqrt{y}=2\sqrt{(xy)}$, $x+y=20$.

55. $\sqrt{(x+y)}+2\sqrt{(x-y)}=\frac{2(x-y)}{\sqrt{(x-y)}}$, $\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{34}{15}$.

56. $\sqrt{(3+x^2)}+2y=8$, $2x^2+\sqrt{(5y^2+4x^4)}=9$.

57. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=4$.

58. $x^2-y^2=a^2$, $xy=b^2$.

59. $x+y=a$, $x^4+y^4=b^4$.

60. $x^4+y^4=14x^2y^2$, $x+y=a$.

61. $\frac{a}{a+x}+\frac{b}{b+y}=1$, $x+y=a+b$.

62. $\frac{bx}{y+b}+\frac{ay}{x+a}=\frac{a+b}{2}$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$.

63. $x-y=a$, $x^5-y^5=b^5$.

64. $\sqrt{(x^2+y^2)}+\sqrt{(x^2-y^2)}=2y$, $x^4-y^4=a^4$.

65. $2ab(a+b)x+y^2=abx^2+2aby$, $abx+(a+b)y=xy$.

66. $2\sqrt{(x^2-y^2)}+xy=1$, $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=a$.

67. $x+y=a\sqrt{(xy)}$, $x-y+c\sqrt{\frac{x}{y}}$.

68. $\sqrt{(x+y)}+\sqrt{(x-y)}=\sqrt{a}$, $\sqrt{(x^2+y^2)}+\sqrt{(x^2-y^2)}=b$.

69. $\left(\frac{a^2-x^2}{y^2-b^2}+\frac{y^2-b^2}{a^2-x^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{a^2+x^2}{y^2+b^2}+\frac{y^2+b^2}{a^2+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}=4,\ xy=ab.$

70. $x^2+y^2-(x+y)=a,\ x^4+y^4+x+y-2(x^3+y^3)=b.$

71. $yz=bc,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1.$

72. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=9,\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13,\ 8x+3y=5.$

73. $y+z=\frac{1}{x},\ z+x=\frac{1}{y},\ x+y=\frac{1}{z}.$

74. $xyz=a^2(y+z)=b^2(z+x)=c^2(x+y).$

75. $x^2+yz=y^2+zx=c,\ z^2+xy=a.$

76. $\frac{1}{29}\left(x+\frac{y}{z}\right)=\frac{1}{34}\left(y+\frac{x}{z}\right)=\frac{1}{6},\ x+y+z=15.$

77. $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{2},\ xyz=1.$

78. $x^3+y^3+z^3=x^2+y^2+z^2=x+y+z=1.$

79. $x(x+y+z)=a^2,\ y(x+y+z)=b^2,\ z(x+y+z)=c^2.$

80. $xy+yz+yz=26.$
$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)=162,$
$xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+xz(x^2+z^2)=538.$

ГЛАВА XXIV.

Задачи, приводящія къ квадратнымъ уравненіямъ.

347. Рѣшимъ теперь и изслѣдуемъ нѣкоторыя задачи, приводящія къ квадратнымъ уравненіямъ.

Крестьянинъ продалъ лошадь за 24 рубля, причемъ оказалось, что онъ потерялъ столько процентовъ, сколько ему стоила лошадь. Узнать, сколько онъ самъ заплатилъ за лошадь.

Пусть x будетъ цѣна лошади въ рубляхъ; крестьянинъ теряетъ x рублей съ каждыхъ 100 рублей, поэтому вся его потеря будетъ $\frac{x}{100}\times x$, то-есть $\frac{x^2}{100}$; но эта потеря съ другой стороны равняется $x-24$; такимъ образомъ

$$\frac{x^2}{100}=x-24;$$

откуда $$x^2-100x=-2400,$$

и $$x^2-100x+(50)^2=2500-2400=100,$$

откуда $$x-50=\pm 10,$$

и $$x=60 \text{ или } 40.$$

Итакъ, мы можемъ заключить, что лошадь стоила или 60, или 40 рублей, потому что каждое изъ этихъ чиселъ удовлетворяетъ условіямъ задачи.

348. Разложить число 10 на двѣ части, чтобы произведеніе ихъ было равно 24.

Пусть x означаетъ одну изъ частей, тогда $10-x$ будетъ другая часть, слѣдовательно

$$x(10-x)=24,$$

откуда $$x^2-10x=-24$$

и $$x^2-10x+5^2=25-24=1,$$

слѣдовательно $$x-5=\pm 1,$$

и $$x=4 \text{ или } 6.$$

Здѣсь хотя x можетъ имѣть то или другое изъ двухъ значеній, но существуетъ только одинъ способъ разложенія 10 на двѣ части такъ, чтобы ихъ произведеніе равнялось 24; одна часть будетъ 4, а другая 6.

349. Торговецъ купилъ овецъ на 80 рублей; если бы за тѣ-же деньги онъ купилъ 4 овцами больше, то цѣна каждой изъ нихъ была-бы рублемъ дешевле. Найти, сколько торговецъ купилъ овецъ и сколько стоила каждая изъ нихъ.

Пусть x означаетъ число овецъ; тогда $\frac{80}{x}$ будетъ цѣна каждой изъ нихъ въ рубляхъ. Если-бы торговецъ купилъ четырьмя больше, то цѣна каждой изъ нихъ была-бы $\frac{80}{x+4}$ рубл.; такимъ образомъ по условію

$$\frac{80}{x+4}=\frac{80}{x}-1;$$

слѣдовательно $$80x=80(x+4)-x^2-4x,$$

откуда $$x^2+4x=320,$$

и $$x^2+4x+2^2=320+4=324,$$

отсюда $$x+2=\pm 18,$$

и $$x=16 \text{ или } -20.$$

Здѣсь возможно допустить только положительное значеніе x, и такимъ образомъ число овецъ будетъ 16, а цѣна каждой изъ нихъ 5 р.

При рѣшеніи задачъ, какъ въ этомъ примѣрѣ, могутъ иногда получаться результаты, несогласные съ сущностью предложеннаго вопроса. Размышленіе показываетъ, что алгебраическій способъ выраженія гораздо общнѣе обыкновеннаго языка, такъ что какое-нибудь уравненіе, представляющее условія данной задачи, можетъ выражать также и другія условія. Опытъ убѣдитъ читателя, что всегда возможно выбрать такое рѣшеніе, которое принадлежитъ рѣшаемой задачѣ, и что иногда можно будетъ, измѣняя надлежащимъ образомъ выраженіе первоначальной задачи, составить новую, соотвѣтствующую тому рѣшенію, какое оказывалось неприложимымъ къ первоначальной задачѣ. Такъ, въ настоящемъ случаѣ мы могли-бы предложить слѣдующее видоизмѣненіе первоначальной задачи: Торговецъ купилъ овецъ на 80 рублей, если-бы онъ купилъ ихъ четырьмя меньше, то цѣна каждой была-бы рублемъ дороже. Найти число овецъ и цѣну каждой овцы.

Пусть x представляетъ это число; тогда по условію вопроса мы будемъ имѣть

$$\frac{80}{x-4}=\frac{80}{x}+1.$$

Мы найдемъ, что корни этого уравненія будутъ 20 и -16; такимъ образомъ число 20, бывшее въ предыдущей задачѣ отрицательнымъ, а потому не имѣвшимъ смысла, является теперь вполнѣ возможнымъ отвѣтомъ на вопросъ.

350. Найти такое число, чтобы удвоенный квадратъ его, сложенный съ утроеннымъ этимъ-же числомъ равнялся 65.

Означимъ искомое число буквой x; тогда по условію вопроса

$$2x^2+3x=65.$$

Легко найти, что корни этого квадратнаго уравненія будутъ 5 и $-\frac{13}{2}$, изъ которыхъ первый удовлетворяетъ условію вопроса. Съ цѣлью истолковать значеніе другого корня, замѣтимъ, что если мы напишемъ $-x$ вмѣсто x, то уравненіе обратится въ

$$2x^2-3x=65;$$

а корни этого уравненія будутъ $\frac{13}{2}$ и -5, какъ это можно найти путемъ пробъ или пользуясь правиломъ ст. 340. Слѣдовательно $\frac{13}{2}$ будетъ отвѣтомъ на новый вопросъ, именно: Найти такое число, чтобы удвоенный квадратъ его, *уменьшенный* утроеннымъ искомымъ числомъ равнялся бы 65.

351. Раздѣлить данную линію на двѣ части, такъ чтобы удвоенный квадратъ, построенный на одной части, равнялся прямоугольнику, построенному изъ цѣлой линіи и другой части.

Пусть a означаетъ длину прямой, а x длину одной изъ ея частей; тогда $a-x$ будетъ длина другой части; такимъ образомъ по условію вопроса,

$$2x^2=a(a-x);$$

сдѣдовательно

$$2x^2+ax=a^2,$$

и

$$x^2+\frac{ax}{2}=\frac{a^2}{2};$$

затѣмъ

$$x^2+\frac{ax}{2}+\left(\frac{a}{4}\right)^2=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{16}=\frac{9a^2}{16}.$$

отсюда

$$x+\frac{a}{4}=\pm\frac{3a}{4},$$

и

$$x=\frac{a}{2}\text{ или }-a.$$

Здѣсь искомая длина есть $\frac{a}{2}$. Отрицательный отвѣтъ указываетъ на слѣдующую задачу: Продолжить данную прямую такъ, чтобы удвоенный квадратъ, построенный на продолженной части, равнялся прямоугольнику, построенному изъ данной линіи и изъ той, которая образовалась изъ данной и продолженія ея.

352. Въ данныхъ до сихъ поръ примѣрахъ оба корня квадратнаго уравненія прилагались къ данной или къ видоизмѣненной задачѣ, которую легко было составить. Однако часто можетъ оказаться, что только одинъ корень прилагается къ данной задачѣ, а для другого нельзя бываетъ подыскать никакого доступнаго пониманію объясненія.

353. Могутъ быть даны и такія задачи, которыя заключаютъ больше чѣмъ одну неизвѣстную величину, и такимъ образомъ намъ придется имѣть дѣло съ *совмѣстными уравненіями*. Дадимъ одинъ примѣръ такихъ задачъ.

A и B продали пшеницы на 227 р. 20 к. B продалъ четырьмя четвертями больше, чѣмъ A, а если-бы онъ продалъ столько-же, сколько A, то выручилъ бы за это 80 рублей; между тѣмъ какъ A получилъ-бы 134 р. 40 к, если бы продалъ столько, сколько B. Найти, сколько продалъ каждый и опредѣлить цѣну, по которой они продавали четверть пшеницы.

Пусть x означаетъ число четвертей, проданныхъ A; тогда $x+4$ будетъ число четвертей, проданныхъ B; положимъ, что A продаетъ свою пшеницу по y *двугривенныхъ* за четверть, а B—по z двугривенныхъ за четверть; тогда, такъ какъ цѣна проданной пшеницы равняется 1136 двугривеннымъ, то мы получимъ

$$xy+(x+4)z=1136 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Если-бы B продалъ столько, сколько A, то онъ получилъ бы 400 двугривенныхъ; итакъ

$$xz=400 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Подобно этому и $(x+4)y=672 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$

Изъ (3) мы получаемъ $xy=672-4y$ и, подставивъ это въ (1), найдемъ

$$672-4y+400+4z=1136;$$

слѣдовательно $$4(z-y)=64$$

и $$z-y=16 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Изъ (2) мы имѣемъ

$$x=\frac{400}{z},$$

а изъ (3) $$x=\frac{672}{y}-4;$$

поэтому $$\frac{400}{z}=\frac{672}{y}-4,$$

или $$\frac{100}{z}=\frac{168}{y}-1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Теперь мы можемъ найти y и z изъ уравненій (4) и (5). Подставимъ въ (5) значеніе z изъ (4); тогда

$$\frac{100}{y+16}=\frac{168}{y}-1;$$

слѣдовательно $$100y=168(y+16)-(y^2-16y),$$

откуда $$y^2-52y-2688=0.$$

Изъ этого квадратнаго уравненія мы найдемъ что $y=84$ или -32; послѣднее значеніе должно быть отброшено. Итакъ $z=100$ и $x=4$, т. е. A продалъ 4 четверти по 16 р. 80 к. за четверть, а B продалъ 8 четвертей по 20 рублей за четверть.

Примѣры задачъ.

1. Найти такія два числа, чтобы сумма ихъ равнялась 39, а сумма ихъ кубовъ была-бы 17199.

2. Нѣкоторое число составлено изъ произведенія трехъ послѣдовательныхъ чиселъ, и если раздѣлить его на каждое изъ нихъ поочередно, то сумма частныхъ будетъ равна 47. Найти это число.

3. Длина прямоугольнаго поля превышаетъ его ширину на 3 фута, площадь-же его равна 2667 квадратнымъ саженямъ безъ 3 кв. футовъ. Найти длину и ширину поля.

4. Гребцы въ лодкѣ спускаются на $3^1/_2$ версты внизъ по рѣкѣ и возвращаются назадъ черезъ 1 часъ 40 минутъ; предполагая скорость теченія рѣки въ 2 версты въ часъ, найти, съ какой скоростью при тѣхъ-же условіяхъ лодка могла-бы двигаться въ стоячей водѣ.

5. Сельскій хозяинъ желаетъ загородить прямоугольный кусокъ земли, содержащій $43832^1|_4$ квад. футовъ, 176-ю плетеными щитами, длиною каждый по 6 футовъ. Сколько щитовъ придется поставить ему на каждую сторону?

6. Нѣкто снимаетъ извѣстное число десятинъ земли за 672 рубля; четыре десятины обработываетъ онъ самъ, остальную-же землю сдаетъ другимъ, беря за десятину 4 рублями дороже, чѣмъ платитъ самъ, и съ этой части выручаетъ сумму, которую онъ илатитъ за всю землю. Сколько десятинъ онъ снимаетъ?

7. Нѣкто купилъ овецъ на 280 рублей, изъ которыхъ двѣ пало, а остальныхъ онъ перепродалъ, взявъ по 4 рубля прибыли на каждой овцѣ и заработавъ на всемъ этомъ дѣлѣ 8 рублей. Найти, сколько имъ было куплено овецъ.

8. Прямая линія д [illegible] дѣлена пополамъ и продолжена; найти, на сколько нужно ее продолжить, чтобы прямоугольникъ, построенный изъ одной половины этой линіи и другой половины, сложенной съ продолженіемъ, равнялся-бы квадрату, построенному на продолженной части.

9. Произведеніе двухъ чиселъ равно 750, а частное отъ раздѣленія одного на другое равняется $3^1|_3$. Найти эти числа.

10. Господинъ послалъ слугу на рынокъ купить на 48 копѣекъ апельсиновъ. Такъ какъ слуга самъ съѣлъ пару изъ нихъ, то апельсины обошлись господину за десятокъ на 8 копѣекъ дороже противъ рыночной цѣны. Сколько апельсиновъ долженъ былъ получить господинъ за 48 копѣекъ?

11. Если-бы на 48 копѣекъ можно было купить 2 яйцами больше, чѣмъ сколько на нихъ даютъ, то дюжина яицъ стоила-бы 4 копѣйками дешевле. Сколько стоитъ дюжина яицъ?

12. За шиллингъ можно получить баварскихъ крейцеровъ 6-ю больше, чѣмъ австрійскихъ крейцеровъ; а 15 австрійскихъ крейцеровъ стоятъ на $^1|_{12}$ шиллинга дороже 15 баварскихъ. Сколько австрійскихъ и баварскихъ крейцеровъ можно получить за шиллингъ?

13. Найти два числа, сумма которыхъ равняется ихъ девятикратной разности и произведеніе которыхъ безъ большаго числа равно двѣнадцатикратному большему числу, раздѣленному на меньшее.

14. Двое работниковъ были наняты за неодинаковую плату и по истеченіи извѣстнаго времени разсчитаны. Первый получилъ 30 р. 72 к., а второй, работавшій 6 днями меньше, получилъ 17 р. 28 к. Если-бы

второй работалъ все время, а первый пропустилъ-бы 6 дней, то они получили бы поровну. Сколько дней работалъ каждый изъ нихъ и по скольку получалъ въ день?

15. Общество, состоящее изъ нѣсколькихъ человѣкъ, издержало въ гостинницѣ нѣкоторую сумму денегъ. Если-бы людей было пятью больше и если-бы каждый изъ нихъ издержалъ 48 копѣйками больше, то всего пришлось-бы уплатить по счету 57 р. 60 к. А если-бы людей было тремя меньше и каждый издержалъ-бы 44 копѣйками меньше, то имъ пришлось-бы уплатить 23 р. 96 к. Изъ сколькихъ человѣкъ состояло общество и сколько издержалъ каждый изъ нихъ?

16. Нѣкто купилъ на 1500 фунтовъ нѣсколько англійскихъ желѣзнодорожныхъ акцій, номинальная стоимость которыхъ 20 фунтовъ, въ то время, когда учетъ на нихъ составлялъ извѣстное число процентовъ; а послѣ того, когда за нихъ платили столько-же процентовъ преміи, онъ продалъ часть ихъ за 1000 фунтовъ, оставивъ у себя 60 акцій. Сколько акцій онъ купилъ и сколько платилъ за каждую изъ нихъ?

17. Найти такое число, квадратъ котораго, сложенный съ его кубомъ, равняется девятикратному слѣдующему за нимъ по порядку большему числу.

18. Нѣкто имѣетъ 8320 рублей, которые раздѣляетъ на двѣ части и отдаетъ ихъ для приращенія процентами не по одинаковой таксѣ, такъ что обѣ части даютъ одинаковую прибыль. Если-бы первая часть приносила столько-же процентовъ, какъ вторая, то прибыль на нее была-бы 230 р. 40 к.; а если-бы вторая часть приносила столько процентовъ, сколько первая, то прибыль съ нея была бы 313 р. 60 к. Найти, по скольку процентовъ даютъ та и другая часть?

19. Путешественникъ, которому пришлось проѣхать 56 англійскихъ миль по желѣзной дорогѣ, а остальную часть пути на лошадяхъ, замѣтилъ, что въ поѣздѣ онъ проѣзжалъ четвертую часть всего пути въ то время, въ какое на лошадяхъ проѣзжалъ 5 миль, и что въ моментъ прибытія его на мѣсто поѣздъ долженъ уйти на 35 миль дальше, чѣмъ онъ, отъ станціи, на которой онъ съ него слѣзъ. Сравнить скорости ѣзды по желѣзной дорогѣ и на лошадяхъ и найти, сколько миль проѣхалъ путешественникъ на лошадяхъ?

20. *A* ѣдетъ изъ Лондона въ Йоркъ, а *B* въ то-же время изъ Йорка въ Лондонъ, и оба ѣдутъ равномѣрно. *A* доѣхалъ до Йорка черезъ 16 часовъ, а *B* достигъ Лондона черезъ 36 часовъ послѣ того, какъ они встрѣтились на пути. Найти, во сколько времени каждый изъ нихъ совершилъ свое путешествіе?

21. Курьеръ употребляетъ 14 часовъ, чтобы изъ мѣста *P* доѣхать до мѣста *Q*. Другой курьеръ выѣзжаетъ одновременно съ первымъ изъ

мѣста, лежащаго за 10 верстъ за P, и достигаетъ Q въ то-же время, какъ и первый курьеръ. Второй курьеръ находитъ, что ему нужно на полчаса меньше времени, чѣмъ первому, чтобъ проѣхать 20 верстъ. Найти разстояніе Q отъ P.

22. Два путешественника A и B одновременно выѣзжаютъ одинъ изъ мѣста P, а другой изъ мѣста Q и ѣдутъ на встрѣчу другъ другу. При встрѣчѣ ихъ оказалось, что A проѣхалъ 30 верстами больше, чѣмъ B и что A доѣдетъ до Q въ 4 дня, а B доѣдетъ до P въ 9 дней, считая отъ момента встрѣчи. Найти разстояніе между P и Q.

23. Сосудъ наполняется водою посредствомъ двухъ трубъ; чрезъ одну изъ этихъ трубъ сосудъ можетъ наполниться двумя часами скорѣе, чѣмъ чрезъ другую, а чрезъ обѣ трубы онъ наполняется въ $1\frac{7}{8}$ часа. Найти, въ какое время наполняется сосудъ каждою трубою отдѣльно.

24. Сосудъ нужно наполнить водою посредствомъ двухъ трубъ. Первая труба остается открытою впродолженіе трехъ пятыхъ того времени, которое требуетъ вторая труба, чтобъ наполнить сосудъ; послѣ этого первая труба закрывается, а вторая открывается. Если-бы обѣ трубы оставались одновременно открытыми, то сосудъ наполнился-бы 6 часами скорѣе, и чрезъ первую трубу влилось-бы двѣ трети того количества воды, которое доставляетъ въ то-же время вторая. Во сколько времени наполняютъ сосудъ та и другая труба отдѣльно?

25. Извѣстное число рабочихъ могутъ переносить кучу камней изъ одного мѣста въ другое въ 8 дней. Если-бы рабочихъ было на 8 человѣкъ больше, и каждый изъ нихъ могъ-бы поднимать въ разъ 5 фунтами меньше, то переноска заняла бы 7 часовъ. Но если-бы рабочихъ было 8 человѣками меньше, а каждый могъ-бы поднимать 11 фунтами больше, то работа была-бы окончена въ 9 часовъ. Найти число рабочихъ и вѣсъ ноши, которую переносилъ каждый изъ нихъ каждый разъ.

ГЛАВА XXV.

Воображаемыя выраженія.

354. Хотя квадратный корень изъ какого-нибудь отрицательнаго количества есть символическое указаніе невозможности дѣйствія, однако такіе квадратные корни часто употребляются въ математическихъ изслѣдованіяхъ при условіи нѣкоторыхъ допущеній, которыя мы теперь и объяснимъ.

355. Пусть a означаетъ нѣкоторое дѣйствительное количество; тогда квадратные корни изъ отрицательной величины $-a^2$ выразятся по обыкновенному означенію чрезъ $\pm\sqrt{(-a^2)}$. Но $-a^2$ можно разсматривать какъ произведеніе a^2 на -1; такъ что если мы предположимъ, что квадратный корень изъ этого произведенія можетъ быть составленъ такимъ-же образомъ, какъ если-бы оба множителя были положительными, т. е перемноженіемъ корней изъ каждаго множителя, то квадратные корни изъ $-a^2$ могутъ быть выражены посредствомъ $\pm a\sqrt{(-1)}$. Итакъ мы *допускаемъ*, что выраженія $\pm\sqrt{(-a^2)}$ и $\pm a\sqrt{(-1)}$ равны между собою. Такимъ образомъ въ нашихъ изслѣдованіяхъ мы будемъ употреблять одно только воображаемое выраженіе, именно $\sqrt{(-1)}$.

356. Положимъ, что мы имѣемъ выраженіе $\alpha+\beta\sqrt{(-1)}$, гдѣ α и β нѣкоторыя дѣйствительныя величины. Можно сказать, что это выраженіе состоитъ изъ дѣйствительной части α и части воображаемой $\beta\sqrt{(-1)}$, но благодаря присутствію послѣдней мы будемъ смотрѣть на все выраженіе, какъ на воображаемое. Когда β равно нулю, членъ $\beta\sqrt{(-1)}$ *считается уничтожающимся*; на это можно смотрѣть какъ на другое допущеніе. Если α и β оба равны нулю, то все выраженіе уничтожается, но неиначе.

357. При сдѣланныхъ выше допущеніяхъ и еще при дополнительномъ допущеніи, что такіе члены, какъ $\beta\sqrt{(-1)}$ могутъ подчиняться обыкновеннымъ правиламъ для алгебраическихъ преобразованій, мы можемъ доказать, какъ сейчасъ увидимъ, нѣсколько предложеній.

358. *Чтобы два воображаемыя выраженія могли быть равны между собою, необходимо и достаточно, чтобъ были равны дѣйствительныя ихъ части, а также и коэффиціенты при* $\sqrt{(-1)}$.

Дѣйствительно, положимъ, что

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\gamma+\delta\sqrt{-1};$$

тогда, по перестановкѣ членовъ, будемъ имѣть

$$(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)\sqrt{-1}=0;$$

и тогда по ст. 356 $\alpha-\gamma=0$ и $\beta-\delta=0$, то-есть $\alpha=\gamma$ и $\beta=\delta$.

Такимъ образомъ уравненіе

$$\alpha+\beta\sqrt{(-1)}=\gamma+\delta\sqrt{(-1)}$$

можетъ быть разсматриваемо, какъ символическое представленіе *двухъ* равенствъ $\alpha=\gamma$ и $\beta=\delta$ при помощи *одного*.

359. Возьмемъ теперь два воображаемыхъ выраженія $\alpha+\beta\sqrt{(-1)}$ и $\gamma+\delta\sqrt{(-1)}$ и составимъ ихъ сумму, разность, произведеніе и частное.

Сумма ихъ будетъ $\alpha+\gamma+(\beta+\delta)\sqrt{(-1)}$.

Если второе выраженіе вычтемъ изъ перваго, то остатокъ будетъ

$$\alpha-\gamma+(\beta-\delta)\sqrt{(-1)}.$$

Произведеніе будетъ

$$\{\alpha+\beta\sqrt{(-1)}\}\{\gamma+\delta\sqrt{(-1)}\}=\alpha\gamma-\beta\delta+(\alpha\delta+\beta\gamma)\sqrt{(-1)};$$

потому что $\sqrt{(-1)}\times\sqrt{(-1)}$, по предположенію, равняется -1.

Частное отъ дѣленія перваго выраженія на второе будетъ

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{(-1)}}{\gamma+\delta\sqrt{(-1)}}$$

Это можно представить въ другомъ видѣ, умноживъ числителя и знаменателя на $\gamma-\delta\sqrt{(-1)}$; тогда новый числитель будетъ

$$\alpha\gamma+\beta\delta+(\beta\gamma-\alpha\delta)\sqrt{(-1)};$$

а новый знаменатель $\gamma^2+\delta^2$; слѣдовательно

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{(-1)}}{\gamma+\delta\sqrt{(-1)}}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}\sqrt{(-1)}.$$

360. Дадимъ теперь примѣръ того, какимъ путемъ воображаемыя выраженія могутъ проникать въ Алгебру Положимъ, что намъ нужно рѣшить уравненіе $x^3=1$. Мы можемъ писать это уравненіе такъ

$$x^3-1=0,$$

или въ видѣ произведенія

$$(x-1)(x^2+x+1)=0.$$

Такимъ образомъ, чтобы удовлетворить предложенному уравненію, мы должны положить или $x-1=0$, или $x^2+x+1=0$. Первое условіе даетъ $x=1$; второе-же мы можемъ написать такъ

$$x^2+x=-1;$$

слѣдовательно $$x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}.$$

Слѣдовательно $$x+\frac{1}{2}=\pm\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(-1)}.$$

И наконецъ $$x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(-1)}.$$

Такимъ образомъ мы заключаемъ, что если одно изъ послѣднихъ воображаемыхъ выраженій будетъ возвышено въ кубъ, то результатъ долженъ равняться единицѣ. Это можно повѣрить. Возьмемъ напримѣръ верхній знакъ, тогда

$$\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(-1)}\right\}^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3+3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(-1)}.$$

$$+3\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(-1)}\right\}^2+\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(-1)}\right\}^3.$$

Но $$\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8},$$

$$3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(-1)}=\frac{3\sqrt{3}}{4\ 2}\sqrt{(-1)}=\frac{3\sqrt{3}}{8}\sqrt{(-1)}$$

$$3\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(-1)}\right\}^2=\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{8},$$

$$\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(-1)}\right\}^3=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(-1)}\right\}^2\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(-1)}.$$

$$=-\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(-1)}=-\frac{3\sqrt{3}}{8}\sqrt{(-1)}.$$

Итакъ, результатъ дѣйствительно равенъ единицѣ.

Если $x^3=1$, то мы имѣемъ $x=(1)^{\frac{1}{3}}$; такимъ образомъ оказывается, что существуетъ три кубичныхъ корня изъ единицы, именно 1 и $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(-1)}$.

361. Въ статьѣ 337 мы видѣли, что квадратное *выраженіе* ax^2+bx+c всегда тожественно равно съ $a(x-p)(x-q)$, гдѣ p и q корни *уравненія* $ax^2+bx+c=0$. Если корни будутъ мнимые, то p и q будутъ вида $\alpha\pm\beta\sqrt{(-1)}$; и мы будемъ тогда имѣть

$$ax^2+bx+c=a\{x-\alpha-\beta\sqrt{(-1)}\}\{x-\alpha+\beta\sqrt{(-1)}\}.$$

Здѣсь не представится никакого затрудненія, если мы вспомнимъ то условіе, что обыкновенныя алгебраическія дѣйствія распространяются и на членъ $\beta\sqrt{(-1)}$. Дѣйствительно, вторая часть предполагаемаго нами тожества будетъ

$$a\{(x-\alpha)^2+\beta^2\},\ \text{то-есть}\ a\{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2\},$$

а изъ значеній α и β мы имѣемъ

$$2\alpha=-\frac{b}{a},\ \text{и}\ \alpha^2+\beta^2=\frac{c}{a};$$

такимъ образомъ вторая часть тожественно равна первой.

362. Два воображаемыхъ выраженія называются *сопряженными*, если они различаются только знакомъ коэффиціента при $\sqrt{(-1)}$. Такъ $\alpha+\beta\sqrt{(-1)}$ и $\alpha-\beta\sqrt{(-1)}$ будутъ *сопряженными*.

Отсюда слѣдуетъ, что *сумма* двухъ сопряженныхъ воображаемыхъ выраженій будетъ дѣйствительною; дѣйствительнымъ-же будетъ и ихъ произведеніе. Такъ въ предыдущемъ примѣрѣ сумма равна 2α, а произведеніе равняется $\alpha^2+\beta^2$.

363. Положительное значеніе квадратнаго корня изъ $\alpha^2+\beta^2$ называется *модулемъ* каждаго изъ выраженій

$$\alpha+\beta\sqrt{(-1)} \text{ и } \alpha-\beta\sqrt{(-1)},$$

т. е. принимается за *мѣру* ихъ. Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что модуль какого-нибудь дѣйствительнаго количества есть численная величина этого количества взятая со знакомъ +.

Чтобы модуль $\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}$ могъ уничтожиться, необходимо, чтобы $\alpha=0$ и $\beta=0$; въ этомъ случаѣ выраженія

$$\alpha+\beta\sqrt{(-1)} \text{ и } \alpha-\beta\sqrt{(-1)}$$

уничтожаются. И наоборотъ—если эти выраженія уничтожаются, то $\alpha=0$ и $\beta=0$, а слѣдовательно уничтожается и модуль.

364. Если два воображаемыхъ выраженія равны, то равны и ихъ *модули*. Однако не будетъ необходимо справедливымъ, что такія выраженія равны, если равны ихъ модули.

365. Модуль произведенія $\alpha+\beta\sqrt{(-1)}$ и $\gamma+\delta\sqrt{(-1)}$ будетъ

$$\sqrt{\{(\alpha\gamma-\beta\delta)^2+(\beta\gamma+\alpha\delta^2\}}. \text{ (См. ст. 359).}$$

Но $$(\alpha\gamma-\beta\delta)^2+(\beta\gamma+\alpha\delta)^2=(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2);$$

такимъ образомъ модуль этого произведенія будетъ

$$\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}\times\sqrt{(\gamma^2+\delta^2)}.$$

Слѣдовательно *модуль произведенія двухъ воображаемыхъ выраженій равенъ произведенію ихъ модулей.*

Отсюда слѣдуетъ, что модуль частнаго двухъ воображаемыхъ выраженій есть частное ихъ модулей. Это можно также показать, составивъ модуль выраженія для частнаго, даннаго въ ст. 359.

366. Часто необходимо бываетъ разсматривать степени отъ $\sqrt{(-1)}$. Мы можемъ найти ихъ послѣдовательнымъ умноженіемъ; такъ

$$\{\sqrt{(-1)}\}^1=\sqrt{(-1)}, \qquad \{\sqrt{(-1)}\}^2=-1$$

$$\{\sqrt{(-1)}\}^3=\{\sqrt{(-1)}\}^2\times\sqrt{(-1)}=-\sqrt{(-1)}, \quad \{\sqrt{(-1)}\}^4=1.$$

Если мы захотѣли-бы получить степени выше четвертой, то снова пришли-бы къ выводамъ $\sqrt{(-1)}$, -1, $-\sqrt{(-1)}$, 1. Такъ что четырьмя, выше написанными формулами мы можемъ выражать всякія степени. Дѣйствительно, всякое цѣлое число должно быть одного изъ четырехъ видовъ: $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, смотря потому, дѣлится ли оно на 4 безъ остатка, или даетъ остатки, соотвѣтственно равные 1, 2, 3. Итакъ

$$\{\sqrt{(-1)}\}^{4n}=1, \quad \{\sqrt{(-1)}\}^{4n+1}=\sqrt{(-1)}, \quad \{\sqrt{(-1)}\}^{4n+2}=-1$$

$$\{\sqrt{(-1)}\}^{4n+3}=-\sqrt{(-1)}.$$

367. *Квадратный корень изъ всякаго воображаемаго выраженія вида* $\alpha+\beta\sqrt{(-1)}$ *можетъ быть выраженъ въ такомъ-же видѣ.*

Дѣйствительно, положимъ, что

$$\sqrt{\{\alpha+\beta\sqrt{(-1)}\}}=x+y\sqrt{(-1)};$$

тогда $\alpha+\beta\sqrt{(-1)}=\{x+y\sqrt{(-1)}\}^2=x^2-y^2+2xy\sqrt{(-1)}$.

Отсюда, по ст. 358,

$$x^2-y^2=\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$2xy=\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2);$$

слѣдовательно изъ (1) и (2)

$$(x^2+y^2)^2=\alpha^2+\beta^2,$$

и такимъ образомъ $x^2+y^2=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$.

Изъ (1) и (3) получаемъ

$$x^2=\tfrac{1}{2}\{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}+\alpha\},\quad y^2=\tfrac{1}{2}\{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}-\alpha\};$$

откуда $$x=\pm\left\{\frac{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}+\alpha}{2}\right\}^{\frac{1}{2}},\quad y=\pm\left\{\frac{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}-\alpha}{2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Такъ какъ значенія x и y предполагаются дѣйствительными, то x^2+y^2 есть величина положительная, и такимъ образомъ количество $\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}$ должно быть взято со знакомъ $+$. И такъ какъ значеніе x и y должны удовлетворять уравненію $2xy=\beta$, то они должны имѣть *одинаковые* знаки, когда β будетъ положительная величина, и *разные* знаки при *отрицательной* величинѣ β. По причинѣ двойного знака у выраженій x и y, мы видимъ, что $\alpha+\beta\sqrt{(-1)}$ имѣетъ два квадратныхъ корня, различающихся только знаками.

368. Предполагая, что $\alpha=0$ и $\beta=\pm1$, мы можемъ изъ выраженій предыдущей статьи найти корень квадратный изъ $\pm\sqrt{(-1)}$. Такъ мы получимъ

$$\sqrt{\{+\sqrt{(-1)}\}}=\pm\frac{1+\sqrt{(-1)}}{\sqrt{2}},\quad \sqrt{\{-\sqrt{(-1)}\}}=\pm\frac{1-\sqrt{(-1)}}{\sqrt{2}}.$$

Если положимъ $z^4=-1$, то получимъ $z^2=\pm\sqrt{(-1)}$; а потому $z=\pm\sqrt{\{\pm\sqrt{(-1)}\}}$. И такъ какъ $z^4=-1$, то мы имѣемъ $z=(-1)^{\frac{1}{4}}$. Такимъ образомъ здѣсь будетъ четыре корня изъ -1, именно четыре выраженія, заключающіяся въ $\pm\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)}}{\sqrt{2}}$.

Точно также существуетъ четыре корня четвертой степени изъ $+1$, потому что если положимъ $z^4=1$, то найдетъ, что $z^2=\pm1$, а $z=\pm\sqrt{1}$ и $z=\pm\sqrt{(-1)}$. Подобнымъ-же образомъ мы нашли-бы восемь корней восьмой степени изъ 1 или изъ -1, и такъ далѣе.

Разные примѣры.

1. Упростить $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$.

2. Если $\frac{a-b}{1+ab}+\frac{c-d}{1+cd}=0$, то доказать, что

$$\frac{a-d}{1+ad}=\frac{b-c}{1+bc} \text{ и } \frac{a+c}{1-ac}=\frac{b+d}{1-bd}.$$

3. Показать что $a^3+b^3+c^3-3abc=$

$$\tfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\{a+b+c\},$$

$$a^3+b^3+c^3+24abc=$$

$$(a+b+c)^3-3\{a(b-c)^2+c(a-b)^2\},$$

$$(a+b+c)^3-27abc=$$

$$\tfrac{1}{2}\{(a+b+7c)(a-b)^2+(b+c+7a)(b-c)^2+(c+a+7b)(c-a)^2\}$$

$$9(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)^3=$$

$$(4a+4b+c)(a-b)^2+(4b+4c+a)(b-c)^2+(4c+4a+b)(c-a)^2.$$

4. Доказать, что если $a+b+c$ равно нулю, то и слѣдующее выраженіе такъ-же будетъ равно нулю

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ab}-1.$$

5. Если квадратный корень изъ произведенія двухъ количествъ есть количество раціональное, то показать, что квадратный корень изъ частнаго, полученнаго отъ дѣленія одного изъ выраженій на другое, также раціональное количество.

6. Извлечь квадратный корень изъ $\{1+x\}\{1+x^3+2(1-x^2)\sqrt{x}\}$.

7. Выразить корни уравненія $x^4-2ax^2+b^2=0$ въ видѣ суммы двухъ ирраціональныхъ выраженій второй степени.

8. Выразить корни уравненія $4x^4-4(1+n^2)a^2x^2+n^2a^4=0$ въ видѣ суммы двухъ ирраціональныхъ выраженій второй степени.

9. Произведя дѣйствіе извлеченія квадратнаго корня, найти значеніе x, обращающее въ точный квадратъ выраженіе

$$x^4+6x^3+11x^2+3x+31.$$

10. Показать, что если $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ есть точный квадратъ, то коэффиціенты его должны удовлетворять условіямъ

$$8c=a(4b-a^2) \text{ и } (4b-a^2)^2=64d.$$

11. Если значенія x, y, x', y' всѣ будутъ возможны и если

$$1+xx'+yy'=\sqrt{(1+x^2+y^2)}\sqrt{(1+x'^2+y'^2)},$$

то показать, что $x=x'$ и $y=y'$.

12. Показать, что уравненіе

$$a^2b^4(x-x')^2+a^4b^2(y-y')^2+(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)(b^2x'^2+a^2y'^2-a^2b^2)=0$$

равнозначительно съ двумя уравненіями

$$a^2b^2-a^2yy'-b^2xx'=0 \text{ и } xy'-x'y=0.$$

13. Нѣкто продалъ лошадь за 157 р. 44 к., потерявъ при этомъ 18 процентовъ первоначальной стоимости ея. Найти первоначальную стоимость лошади.

14. Разложить число 16 на такія три части, чтобы разность двухъ меньшихъ частей была квадратнымъ корнемъ самой бо́льшей изъ частей, и чтобы разность двухъ бо́льшихъ была квадратомъ наименьшей части.

15. Показать, что

$$\left\{\frac{-1+\sqrt{(-3)}}{2}\right\}^n+\left\{\frac{-1-\sqrt{(-3)}}{2}\right\}^n$$

равно 2, если n есть кратное 3, и равно -1, если n будетъ всякое другое цѣлое число.

Рѣшить слѣдующія уравненія:

16. $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x+2}{x-2}=2\dfrac{x+3}{x-3}$.

17. $\dfrac{4}{x^2-2x}=\dfrac{2}{x^2-x}+x^2-x$.

18. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{4}{x}\right)\left(x-\dfrac{9}{x}\right)=(x-1)(x-2)(x-3)$.

19. $x^4-8x^3+12x^2+16x-16=0$.

20. $\sqrt{(2x-1)}+\sqrt{(3x-2)}=\sqrt{(4x-3)}+\sqrt{(5x-4)}$.

21. $2b\{\sqrt{(x+a)}-b\}+2c\{\sqrt{(x-a)}+c\}=a$.

22. $\{\sqrt{(a+x)}-\sqrt{a}\}\{\sqrt{(a-x)}+\sqrt{a}\}=nx$.

23. $x+y=a+b$, $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=2$.

24. $\dfrac{ax}{a+x}+\dfrac{by}{b+y}=\dfrac{(a+b)c}{a+b+c}$, $x+y=c$.

25. $6\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)=5=6\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$.

26. $x(bc-xy)=y(xy-ac)$, $xy(ay+bx-xy)=abc(x+y-c)$.

27. $\left(x-3y+\dfrac{1}{z}\right)(x+z)=6$, $\left(x+\dfrac{1}{z}\right)\dfrac{1}{y}=9$, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{9}{2}$.

28.
$$(v+x)(y+z)=b+c-a,$$
$$(v+y)(z+x)=c+a-b,$$
$$(v+z)(x+y)=a+b-c$$
$$v^2+x^2+y^2+z^2=3(a+b+c).$$

ГЛАВА XXVI.

Кратное отношеніе.

369. Отношеніемъ называется извѣстная зависимость одного количества отъ другого по величинѣ, причемъ разсматривается, во сколько разъ одно количество больше другого, или какую часть одного количества составляетъ другое, или сколько и какихъ частей одного количества заключается въ другомъ.

Такъ, сравнивая 6 и 3, мы замѣчаемъ, что 6 имѣетъ извѣстную величину по сравненію съ 3, которое содержится въ немъ два раза; сравнивая еще 6 съ 2, мы видимъ, что 6 имѣетъ *другую* относительную величину, потому что содержитъ въ себѣ 2 три раза, такъ что 6 въ сравненіи съ 2 будетъ больше, чѣмъ въ сравненіи съ 3.

370. Отношеніе a къ b выражается обыкновенно тѣмъ, что между ними ставится двоеточіе $(a:b)$, причемъ a называется *предыдущимъ членомъ* отношенія, а b—*послѣдующимъ его членомъ*.

371. Отношеніе измѣряется дробью, числитель которой есть *предыдущій* членъ отношенія, а знаменатель—*послѣдующій* членъ. Такъ, мѣрою отношенія a къ b будетъ $\frac{a}{b}$; для краткости можно говорить, что

отношеніе a къ b равняется $\frac{a}{b}$, *или есть* $\frac{a}{b}$.

372. Отсюда наоборотъ, когда $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то мы можемъ говорить, что отношеніе a къ b равно отношенію c къ d.

373. *Если оба члена отношенія помножить или раздѣлить на одну и ту-же величину, то отношеніе не измѣнится.*

Дѣйствительно, $\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$ (по ст 135).

374. Мы можемъ *сравнивать* два или нѣсколько отношеній, приводя измѣряющія ихъ дроби къ одному знаменателю. Такъ, положимъ, что одно изъ нихъ будетъ отношеніе a къ b, а другое — отношеніе c къ d; тогда первое будетъ $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$, а второе $\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}$. Поэтому первое отношеніе будетъ больше, равно или меньше второго, смотря по тому, будетъ-ли ad больше, равно или меньше bc.

375. Отношеніе можетъ быть *больше*, *меньше* или *равно* единицѣ, смотря по тому, будетъ-ли предыдущій членъ больше, меньше или равенъ послѣдующему.

376. *Отношеніе большее единицы уменьшается, а отношеніе меньшее единицы увеличивается отъ прибавленія къ обоимъ его членамъ одного какого-нибудь количества.*

Пусть отношеніе будетъ $\frac{a}{b}$ и пусть составлено новое отношеніе прибавленіемъ x къ обоимъ членамъ первоначальнаго отношенія; тогда $\frac{a+x}{b+x}$ будетъ больше или меньше $\frac{a}{b}$, смотря по тому, будетъ-ли $\frac{b(a+x)}{b(b+x)}$ больше или меньше, чѣмъ $\frac{a(b+x)}{b(b+x)}$, т.-е. смотря по тому, будетъ-ли $b(a+x)$ больше или меньше $a(b+x)$, а значитъ, смотря по тому, будетъ ли xb больше или меньше xa, то-есть смотря по тому, будетъ-ли b больше или меньше a.

377. *Отношеніе большее единицы увеличивается, а отношеніе меньшее единицы уменьшается отъ вычитанія изъ обоихъ его членовъ одного и того-же количества.*

Пусть данное отношеніе будетъ $\frac{a}{b}$ и пусть составлено новое отношеніе вычитаніемъ x изъ обоихъ членовъ первоначальнаго отношенія; тогда $\frac{a-x}{b-x}$ будетъ больше или меньше $\frac{a}{b}$, смотря по тому, будетъ-ли $\frac{b(a-x)}{b(b-x)}$ больше или меньше $\frac{a(b-x)}{b(b-x)}$, то-есть смотря по тому, будетъ-ли $b(a-x)$ больше или меньше $a(b-x)$, а значитъ, смотря по тому, будетъ-ли bx меньше или больше ax или окончательно, смотря по тому будетъ-ли b меньше или больше a.

378. Если предыдущіе члены нѣсколькихъ отношеній перемножить между собою, а также перемножить и послѣдующіе члены, то получится новое отношеніе, называющееся *сложнымъ* отношеніемъ данныхъ. Такъ отношеніе $ac : bd$ называется *сложнымъ* отношеніемъ, происшедшимъ изъ отношеній $a : b$ и $c : d$.

379. Когда отношеніе $a : b$ умножается само на себя, то происходящее отъ того отношеніе $a^2 : b^2$ называется иногда *двойнымъ* отношеніемъ сравнительно съ отношеніемъ $a : b$; точно также отношеніе $a^3 : b^3$ называется *тройнымъ* сравнительно съ отношеніемъ $a : b$. Подобнымъ образомъ отношеніе $a : b$ называютъ иногда *половиннымъ* по сравненію съ отношеніемъ $a^2 : b^2$, и такъ далѣе. Но такіе термины теперь выходятъ изъ употребленія.

380. *Если послѣдующій членъ перваго отношенія будетъ предыдущимъ членомъ второго отношенія, и т д., и мы составимъ изъ такихъ отношеній сложное отношеніе перемноженіемъ ихъ, то*

происшедшее отъ того новое отношеніе будетъ равно отношенію перваго предыдущаго къ послѣднему послѣдующему.

Пусть мы имѣемъ три отношенія именно $a:b$, $b:c$, $c:d$; тогда сложное отношеніе будетъ $a\times b\times c:b\times c\times d$, то-есть $a:d$. Подобно этому можно доказать предложеніе, какое-бы ни было число отношеній.

381. *Если отношеніе больше единицы, то отъ умноженія на него всякое другое отношеніе увеличивается, а если отношеніе меньше единицы, то отъ умноженія на него всякое другое отношеніе уменьшается.*

Пусть отношеніе $x:y$ умножится на отношеніе $a:b$; сложное отношеніе будетъ $xa:yb$, и оно будетъ больше или меньше отношенія $a:b$, смотря по тому будетъ-ли $\frac{xa}{yb}$ больше или меньше $\frac{a}{b}$, т.-е. смотря по тому, будетъ-ли x больше или меньше y.

382. *Если разность между предыдущимъ и послѣдующимъ членами отношенія будетъ малою сравнительно съ каждымъ изъ нихъ, то отношеніе квадратовъ ихъ приблизительно можно получить удвоеніемъ этой разности.*

Пусть данное отношеніе будетъ $(a+x):a$, гдѣ x малая величина сравнительно съ a; тогда отношеніе квадратовъ предыдущаго и послѣдующаго будетъ $(a^2+2ax+x^2):a^2$. Но x малая величина сравнительно съ a, и слѣдовательно x^2 или $x\times x$ также малая величина сравительно съ $2a\times x$ и еще гораздо меньше въ сравненіи съ $a\times a$. Слѣдовательно $(a^2+2ax):a^2$, то-есть $a+2x:a$ очень близко будетъ выражать отношеніе $(a+x)^2:a^2$.

Такъ отношеніе квадрата 1001 къ квадрату 1000 будетъ весьма приблизительно равно 1002 : 1000. Истинное отношеніе будетъ 1002.001 : 1000, въ которомъ предыдущій членъ отличается отъ послѣдующаго только на одну тысячную долю единицы.

383. Отсюда мы можемъ заключить, что отношеніе квадратнаго корня изъ $a+2x$ къ квадратному корню изъ a приблизительно равно отношенію $a+x$ къ a, когда x будетъ малая величина сравнительно съ a. То-есть, *если разность двухъ величинъ мала по сравненію съ каждой изъ нихъ, то отношеніе ихъ квадратныхъ корней приблизительно получится, если возьмемъ половину этой разности.*

Подобно тому, какъ въ ст. 382, можно доказать, что когда x мало сравнительно съ a, то отношеніе $a+3x$ къ a близко равно отношенію $(a+x)^3$ къ a^3, и $a+4x$ къ a близко равно отношенію $(a+x)^4:a^4$ и т. д.

Эти выводы могутъ быть обобщены, когда читатель познакомится съ *теоремой о биномѣ*.

384. Дадимъ здѣсь одну очень употребительную теорему, касающуюся отношеній.

Положимъ, что $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$. Тогда каждое изъ этихъ отношеній равняется $\left(\frac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ гдѣ p, q, r, n какія угодно величины.

Дѣйствительно, пусть $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$; тогда

$$kb=a,\ kd=c,\ kf=e;$$

а потому $$p(kb)^n+q(kd)^n+r(kf)^n=pa^n+qc^n+re^n,$$

слѣдовательно $$k^n=\frac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n} \text{ и } k=\left(\frac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Тотъ-же способъ доказательства можно употребить, чтобъ получить такой-же результатъ, когда *три* или болѣе отношеній $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ будутъ равны. Нужно замѣтить, что нѣтъ необходимости въ томъ, чтобы p, q, r, n были только *положительными* количествами.

Въ частномъ случаѣ мы можемъ положить $n=1$, тогда найдемъ, что каждое изъ отношеній $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ равно $\frac{pa+qc+re}{pb+qd+rf}$, а въ еще болѣе частномъ случаѣ мы можемъ положить $p=q=r$, и тогда каждое изъ данныхъ отношеній равняется $\frac{a+c+e}{b+d+f}$.

385. Положимъ, что мы имѣемъ три неизвѣстныя величины x, y, z, связанныя между собою *двумя* уравненіями

$$ax+by+cz=0,\ a'x+b'y+c'z=0;$$

этихъ уравненій недостаточно для опредѣленія неизвѣстныхъ величинъ, но съ помощью ихъ можно будетъ опредѣлить отношенія, существующія между этими величинами. Дѣйствительно, умножимъ первое уравненіе на c', а второе на c и вычтемъ; тогда получимъ

$$(ac'-a'c)x+(bc'-b'c)y=0;$$

а потому $$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}.$$

Умножимъ еще первое уравненіе на b', а второе на b и вычтемъ, тогда получимъ точно также

$$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{z}{ab'-a'b}.$$

Итакъ мы можемъ писать полученный выводъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{z}{ab'-a'b}.$$

Этотъ выводъ очень важенъ, и его слѣдуетъ внимательно замѣтить; знаменатель второй дроби можетъ быть выведенъ изъ знаменателя первой, а знаменатель третьей изъ знаменателя второй по способу, объясненному въ ст. 211.

Означимъ величину каждой изъ этихъ дробей буквой k; тогда

$$x=k(bc'-b'c),\ y=k(ca'-c'a),\ z=k(ab'-a'b).$$

Положимъ теперь, что мы имѣемъ также третье уравненіе, содержащее неизвѣстныя x, y, z; тогда, подставивъ въ него приведенныя сейчасъ выраженія для x, y, z, мы получимъ уравненіе, изъ котораго опредѣлится k; такимъ образомъ x, y, z сдѣлаются извѣстными.

Положимъ напримѣръ, что третье уравненіе будетъ

$$lx^2+my^2+nz^2=1,$$

тогда k опредѣлится изъ уравненія

$$k^2\{l(bc'-b'c)^2+m(ca'-c'a)^2+n(ab'+a'b)^2\}=1.$$

Примѣры отношеній.

1. Написать отношеніе *двойное* съ отношеніемъ 2 : 3 и *половинное* съ отношеніемъ 100 : 144.

2. Написать сложное отношеніе изъ 3 : 5 и 7 : 9.

3. Два числа находятся въ отношеніи 2 къ 3, а если прибавить къ каждому изъ нихъ по 9, то они будутъ въ отношеніи 3 къ 4. Найти эти числа.

4. Показать, что отношеніе $a:b$ будетъ двойнымъ для отношенія $a+c:b+c$, если $c^2=ab$.

5. Отъ A до B ведутъ двѣ дороги, изъ которыхъ одна на 14 верстъ длиннѣе другой, и двѣ-же дороги идутъ отъ B до C, изъ которыхъ одна на 8 верстъ длиннѣе другой. Разстоянія отъ A до B и отъ B до C по короткимъ дорогамъ относятся между собою какъ 1 къ 2, а разстоянія по длиннымъ дорогамъ относятся какъ 2 къ 3. Опредѣлить эти разстоянія.

6. Рѣшить уравненія

$$\frac{ax+by}{cz}=\frac{cz+ax}{by}=\frac{by+cz}{ax}=x+y+z.$$

7. Доказать, что если $\frac{a_1+a_2x}{a_2+a_3y}=\frac{a_2+a_3x}{a_3+a_1y}=\frac{a_3+a_1x}{a_1+a_2y}$, то каждое изъ этихъ отношеній равно $\frac{1+x}{1+y}$, при предположеніи, что $a_1+a_2+a_3$ не равно нулю.

8. Если $\frac{a-b}{ay+bx}=\frac{b-c}{bz+cx}=\frac{c-a}{cy+az}=\frac{a+b+c}{ax+by+cz}$, то каждое изъ

этихъ отношеній $=\frac{1}{x+y+z}$, при предположеніи, что $a+b+c$ не равно нулю.

9. Показать, что если $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$, то $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

10. Если $\frac{a-a'}{a'-a''}=\frac{b-b'}{b'-b''}=\frac{c-c'}{c'-c''}$, то каждое изъ этихъ отношеній $=\frac{ab'-a'b}{a'b''-a''b'}=\frac{bc'-b'c}{b'c''-b''c'}=\frac{ca'-c'a}{c'a''-c''a'}=\frac{a+b+c-(a'+b'+c')}{a'+b'+c'-(a''+b''+c'')}$.

11. Рѣшить уравненія

$$2x+y-2z=0,\ 7x+6y-9z=0,\ x^3+y^3+z^3=1728.$$

12. Рѣшить уравненія

$$ax+by+cz=0,\ bcx+cay+abz=0,\ xyz+abc(a^3x+b^3y+c^3z)=0.$$

ГЛАВА XXVII.

Пропорція.

386. Четыре величины называются пропорціональными, когда первая изъ нихъ представляетъ такое-же кратное, такую-же часть или такія-же части второй, какъ третья — четвертой; то-есть когда $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то четыре величины a, b, c, d называются пропорціональными. Это обыкновенно выражаютъ словами: a относится къ b, какъ c относится къ d, а изображаютъ такъ: $a:b=c:d$.

Члены a и d называются *крайними*, а члены b и c—*средними*.

387. *Когда четыре величины пропорціональны, то произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ.*

Пусть a, b, c, d будутъ четыре такихъ величины; такъ какъ онѣ пропорціональны, то $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (ст. 386), и умноживъ обѣ части равенства на bd, получимъ $ad=bc$.

Отсюда слѣдуетъ, что если первое количество такъ относится ко второму, какъ второе къ третьему, то произведеніе крайнихъ будетъ равно квадрату средняго.

388. Если три члена въ пропорціи даны, то четвертый опредѣлится изъ уравненія $ad=bc$.

389. *Если произведеніе двухъ величинъ равно произведенію двухъ другихъ, то эти четыре величины пропорціональны; при этомъ члены одного какого нибудь произведенія будутъ средними членами пропорціи, а члены другого произведенія—крайними членами пропорціи.*

Пусть $xy=ab$; раздѣлимъ на ay, тогда $\frac{x}{a}=\frac{b}{y}$ или

$$x:a=b:y \text{ (ст. 386).}$$

390. Если $a:b=c:d$ и $c:d=e:f$, то $a:b=e:f$.

Дѣйствительно, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ и $\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, поэтому $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$, или

$$a:b=e:f.$$

391. *Если четыре величины пропорціональны, то и взятыя наоборотъ онѣ будутъ пропорціональны.*

Если $a:b=c:d$, то и $b:a=d:c$.

Дѣйствительно, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; раздѣлимъ единицу на каждое изъ этихъ равныхъ количествъ; тогда $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ или $b:a=d:c$.

392. *Если четыре величины пропорціональны, то первая относится къ третьей, какъ вторая къ четвертой.*

Если $a:b=c:d$, то $a:c=b:d$.

Дѣйствительно, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; умножимъ на $\frac{b}{c}$; тогда $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$,

или $$a:c=b:d.$$

Если эти четыре величины не будутъ *однородны*, то такой перестановки среднихъ членовъ сдѣлать нельзя, потому что при этомъ мы предполагаемъ, что первая величина есть нѣкоторое кратное, или часть, или нѣсколько частей третьей. Одна линія можетъ имѣть къ другой линіи то же отношеніе, какъ напр. какой нибудь вѣсъ къ другому вѣсу, а между линіей и вѣсомъ не можетъ быть никакого соотношенія по величинѣ. Но въ тѣхъ случаяхъ, когда эти четыре количества *представляются числами* или другими количествами одного и того-же рода,—такая перестановка возможна.

393. *Когда четыре количества пропорціональны, то сумма перваго и второго такъ относится ко второму, какъ сумма третьяго и четвертаго—къ четвертому.*

Если $a:b=c:d$, то $a+b:b=c+d:d$.

Дѣйствительно, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; придадимъ по единицѣ къ обѣимъ частямъ; тогда

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1, \text{ то-есть } \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}, \text{ или}$$

$$a+b : b=c+d : d.$$

Въ старыхъ сочиненіяхъ такое преобразованіе называлось *componendo*.

394. *Такъ-же, избытокъ перваго надъ вторымъ такъ относится ко второму, какъ избытокъ третьяго надъ четвертымъ относится къ четвертому.*

Дѣйствительно, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; вычтемъ по единицѣ изъ обѣихъ частей; тогда $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$, то-есть $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$, или

$$a-b : b=c-d : d.$$

Такое преобразованіе называлось въ старыхъ сочиненіяхъ *dividendo*.

395. *Такъ-же, первое такъ относится къ избытку перваго надъ вторымъ, какъ третье—къ избытку третьяго надъ четвертымъ.*

На основаніи предыдущей статьи $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ и также $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$;

поэтому $\frac{a-b}{b}\times\frac{b}{a}=\frac{c-d}{d}\times\frac{d}{c}$ или $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$;

или $$a-b : a=c-d : c$$

и наоборотъ $$a : a-b=c : c-d.$$

Такое преобразованіе называлось прежде *convertendo*.

396. *Когда четыре величины пропорціональны, то сумма первой и второй относится къ ихъ разности такъ-же, какъ сумма третьей и четвертой относится къ ихъ разности.*

Если $a : b=c : d$, то $a+b : a-b=c+d : c-d$.

По ст. 393 $$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d};$$

а по ст. 394 $$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d};$$

слѣдовательно $$\frac{a+b}{b} : \frac{a-b}{b}=\frac{c+d}{d} : \frac{c-d}{d};$$

то-есть $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d};$$

или $$a+b : a-b=c+d : c-d.$$

397. *Когда нѣсколько величинъ пропорціональны, то сумма всѣхъ предыдущихъ такъ относится къ суммѣ всѣхъ послѣдующихъ, какъ каждый изъ предыдущихъ къ своему послѣдующему.*

Пусть $a : b = c : d = e : f$;

тогда $a + c + e : b + d + f = a : b$.

Дѣйствительно, $ad = bc$, и $af = be$ (ст. 386).

также $ab = ba$, откуда $ab + ad + af = ba + bc + be$,

то-есть $a(b + d + f) = b(a + c + e)$.

Слѣдовательно по ст. 389. $a : b = a + c + e : b + d + f$.

Подобно этому доказывается предложеніе и въ томъ случаѣ, когда пропорціональныхъ величинъ будетъ больше трехъ.

398. *Когда четыре величины пропорціональны, то если первую и вторую помножить или раздѣлить на какую нибудь величину, а третью и четвертую помножить или раздѣлить тоже на какую нибудь величину, то полученныя такимъ образомъ величины будутъ пропорціональными.*

Пусть $a : b = c : d$, тогда $ma : mb = nc : nd$.

Въ самомъ дѣлѣ, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, слѣдовательно $\frac{ma}{mb} = \frac{nc}{nd}$, или

$$ma : mb = nc : nd.$$

399. *Если первую и третью помножить или раздѣлить на одну величину, а вторую и четвертую помножить или раздѣлить на другую величину, то полученныя величины будутъ пропорціональны.*

Пусть $a : b = c : d$, тогда $ma : nb = mc : nd$.

Дѣйствительно, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; слѣдовательно $\frac{ma}{b} = \frac{mc}{d}$ и $\frac{ma}{nb} = \frac{mc}{nd}$;

или $$ma : nb = mc : nd.$$

400. *Если въ двухъ пропорціяхъ перемножить соотвѣтствующіе члены другъ на друга, то произведенія будутъ пропорціональны.*

Пусть будутъ пропорціи $a : b = c : d$ и $e : f = g : h$;

тогда $$ae : bf = cg : dh.$$

Дѣйствительно, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$; поэтому $\frac{ae}{bf} = \frac{cg}{dh}$, или

$$ae : bf = cg : dh.$$

Предложеніе это, очевидно, будетъ справедливо для всякаго числа пропорцій.

401. *Если четыре величины пропорціональны, то одинаковыя степени ихъ или корни будутъ также пропорціональны.*

Пусть $a : b = c : d$, тогда $a^n : b^n = c^n : d^n$.

Дѣйствительно, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, слѣдовательно $\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}$, гдѣ n можетъ быть цѣлое или дробное число; такимъ образомъ

$$a^n : b^n = c^n : d^n.$$

402. Если $a : b = b : c$, то $a : c = a^2 : b^2$.

Дѣйствительно, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$; умножимъ на $\frac{a}{b}$; тогда

$$\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c};$$

то-есть

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{c};$$

или

$$a : c = a^2 : b^2.$$

Три величины a, b, c въ этомъ случаѣ составляютъ, какъ это принято говорить, *непрерывную пропорцію* и членъ b называется *среднимъ пропорціональнымъ* между a и c.

403. Подобнымъ-же образомъ мы могли-бы доказать, что если $a : b = b : c = c : d$, то $a : d = a^3 : b^3$. Эти четыре величины называются *непрерывно-пропорціональными*.

404. Изъ предыдущихъ статей слѣдуетъ, что если четыре величины пропорціональны, то мы можемъ вывести изъ нихъ много другихъ пропорцій. Дадимъ еще примѣръ.

Если $a : b = c : d$, то

$$ma + nb : pa + qb = mc + nd : pc + qd.$$

Дѣйствительно, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; слѣдовательно $\frac{ma}{b} = \frac{mc}{d}$;

прибавимъ къ обѣимъ частямъ по n; такимъ образомъ

$$\frac{ma + nb}{b} = \frac{mc + nd}{d}.$$

Подобно этому $\frac{pa + qb}{b} = \frac{pc + qd}{d}$;

откуда $\frac{ma + nb}{b} : \frac{pa + qb}{b} = \frac{mc + nd}{d} : \frac{pc + qd}{d}$;

то-есть $\frac{ma + nb}{pa + qb} = \frac{mc + nd}{pc + qd}$;

или $$ma + nb : pa + qb = mc + nd : pc + qd.$$

205. При опредѣленіи пропорціи предполагалось, что одна величина есть нѣкоторая опредѣленная кратная другой, часть ея или нѣ-

сколько частей ея, или что дробь, составленная такъ, что одна изъ величинъ взята числителемъ, а другая знаменателемъ, есть опредѣленная дробь. Это будетъ случай, когда обѣ величины имѣютъ какую нибудь общую мѣру. Дѣйствительно, пусть x будетъ общею мѣрою величинъ a и b и пусть $a=mx$ и $b=nx$, тогда

$$\frac{a}{b}=\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n},$$

гдѣ m и n означаютъ цѣлыя числа.

406. Но иногда случается, что величины оказываются *несоизмѣримыми*, т.-е. не допускаютъ никакой общей мѣры. Если напримѣръ, одна прямая линія есть сторона квадрата, а другая—діагональ того-же квадрата, то эти линіи не будутъ имѣть общей мѣры--онѣ *несоизмѣримы*. Въ подобныхъ случаяхъ значеніе $\frac{a}{b}$ не можетъ быть выражено какой нибудь дробью $\frac{m}{n}$, гдѣ m и n цѣлыя числа; однако можетъ быть найдена такого рода дробь, которая будетъ представлять значеніе $\frac{a}{b}$ *съ требуемою степенью точности.*

Дѣйствительно, пусть $b=nx$, гдѣ n нѣкоторое цѣлое число; и пусть a будетъ больше mx и меньше $(m+1)x$; тогда $\frac{a}{b}$ будетъ больше $\frac{m}{n}$, но меньше $\frac{m+1}{n}$. Такимъ образомъ разность между $\frac{a}{b}$ и $\frac{m}{n}$ меньше чѣмъ $\frac{1}{n}$. А такъ какъ $nx=b$, то когда x уменьшается, n возрастаетъ и $\frac{1}{n}$ уменьшается. Слѣдовательно, беря x достаточно малымъ, мы можемъ сдѣлать $\frac{1}{n}$ меньше всякой впередъ назначенной дроби, а слѣдовательно и разность между $\frac{m}{n}$ и $\frac{a}{b}$ можетъ быть сдѣлана меньше всякой назначенной впередъ дроби.

407. Если c и d, подобно a и b, также несоизмѣримы и если въ то время, какъ $\frac{a}{b}$ заключается между $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$, и $\frac{c}{d}$ также заключается между $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$, какъ-бы ни возрастали числа m и n, то $\frac{a}{b}$ равно $\frac{c}{d}$.

Дѣйствительно, еслибы $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ были неравны между собою, то между ними должна была-бы существовать извѣстная разность, а такъ какъ каждая изъ этихъ величинъ заключается между $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$, то эта разность должна быть меньше $\frac{1}{n}$. Но такъ какъ, по предположенію, n можетъ возрастать безпредѣльно, то $\frac{1}{n}$ должна безпредѣльно уменьшаться, иначе сказать, она должна быть *меньше* всякой данной величины; поэтому $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ не могутъ имѣть никакой ощутительной разности, и мы можемъ говорить, что $\frac{a}{b}$ *равно* $\frac{c}{d}$. Слѣдовательно, всѣ предположенія относительно пропорціональныхъ величинъ справедливы такъ-же и для этихъ четырехъ величинъ.

408. Полезно сравнить опредѣленіе пропорціи, данное въ этой главѣ, съ опредѣленіемъ, которое дается въ пятой книгѣ Евклида. Послѣднее можетъ быть выражено такъ: Четыре количества пропорціональны, когда, взявъ какія нибудь равнократныя перваго и третьяго и какія нибудь равнократныя второго и четвертаго, мы найдемъ, что кратное третьяго больше, равно или меньше, чѣмъ кратное четвертаго, смотря по тому, будетъ-ли кратное перваго больше, равно или меньше, чѣмъ кратное второго.

Докажемъ сперва, что свойство пропорціи, заключающееся въ опредѣленіи Евклида, есть слѣдствіе алгебраическаго опредѣленія.

Дѣйствительно, положимъ, что $a:b=c:d$; тогда $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, а слѣдовательно $\frac{pa}{qb}=\frac{pc}{qd}$. Отсюда слѣдуетъ, pc больше, равно или меньше qd, смотря по тому, будетъ-ли pa больше, равно или меньше qb.

409. Теперь докажемъ, что свойство, заключающееся въ алгебраическомъ опредѣленіи, является слѣдствіемъ Евклидова опредѣленія. Пусть a, b, c, d будутъ четыре величины, пропорціональныя въ смыслѣ Евклидова опредѣленія; тогда должно быть $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Дѣйствительно, если $\frac{a}{b}$ не равно $\frac{c}{d}$, то одна изъ этихъ дробей должна быть больше другой и возможно будетъ найти нѣкоторую дробь, заключающуюся между ними.

Положимъ, что $\frac{a}{b}$ больше $\frac{c}{d}$, и пусть $\frac{p}{q}$ будетъ промежуточная между ними дробь. Тогда $\frac{a}{b}$ будетъ больше, чѣмъ $\frac{p}{q}$, а потому *qa больше pb*; а $\frac{c}{d}$ будетъ меньше $\frac{p}{q}$, а потому *qc меньше pd*. Такимъ образомъ, a, b, c, d *не будутъ* пропорціональны по опредѣленію Евклида, а это противорѣчитъ предположенію. Слѣдовательно $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ не могутъ быть неравными, то-есть они равны между собою.

410. Обыкновенно полагаютъ, что общее алгебраическое опредѣленіе пропорціи не можетъ употребляться въ Геометріи, такъ какъ нѣтъ способа представить геометрически результатъ дѣйствія дѣленія. Прямыя линіи можно представлять геометрически, но нельзя представлять отвлеченнаго числа, показывающаго сколько разъ одна прямая заключается въ другой. Но нужно также замѣтить, что Евклидово опредѣленіе вполнѣ *строго* и одинаково можетъ прилагаться какъ къ *соизмѣримымъ*, такъ и къ *несоизмѣримымъ* количествамъ, между тѣмъ какъ алгебраическое опредѣленіе, строго говоря, ограничивается только первыми. Слѣдовательно, уже одного этого обстоятельства достаточно, чтобы доказать превосходство опредѣленія Евклида.

Примѣры пропорцій.

1. Послѣдніе три члена пропорціи 4, 6, 8; найти первый членъ.

2. Найти третье пропорціональное къ 25 и 400.

3. Если 3, x, 1083 составляютъ непрерывную пропорцію, то найти x.

4. Если 2 человѣка, работая по 8 часовъ въ день, могутъ переписать рукопись въ 32 дня, то во сколько дней могли-бы переписать ее x человѣкъ, работая по y часовъ въ день.

5. Если x и y неравны между собою и отношеніе x къ y равняется *двойному* отношенію $x+z$ къ $y+z$, то доказать, что z есть средняя пропорціональная между x и y.

6. Если $a:b=p:q$, то $a^2+b^2 : \frac{a^3}{a+b} = p^2+q^2 : \frac{p^3}{p+q}$.

7. Если четыре величины пропорціональны, и вторая изъ нихъ есть средняя пропорціональная между третьей и четвертой, то третья будетъ среднею пропорціональной между первой и второй.

8. Если $(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$, то доказать, что a, b, c, d пропорціональны.

9. Доказать, что когда четыре однородныя величины пропорціональны, то сумма наибольшей и наименьшей изъ нихъ больше суммы двухъ другихъ.

10. Каждый изъ двухъ сосудовъ содержитъ смѣсь вина съ водою; если составить новую смѣсь, взявъ поровну изъ обоихъ сосудовъ, то въ ней окажется столько-же воды, сколько и вина; если-же изъ перваго сосуда взять въ четыре раза больше, чѣмъ изъ второго, то въ новой смѣси вино и вода относились-бы какъ 2 къ 3. Найти пропорцію вина и воды въ каждомъ сосудѣ.

11. *A* и *B* бьются объ закладъ; сумма, которую ставитъ *A*, находится въ такомъ-же отношеніи ко всему количеству его денегъ, какъ сумма, которую ставитъ *B*, ко всему колпчеству денегъ *B*. Если *A* выиграетъ, то онъ будетъ имѣть вдвое больше, чѣмъ *B*, а если проиграетъ, то *B* будетъ имѣть въ три раза больше, чѣмъ *A*. Если всего денегъ у нихъ 168 рублей, то опредѣлить, сколько имѣетъ каждый и какую часть денегъ каждый ставитъ.

12. Если при уменьшеніи числа мужскихъ преступленій на 4.6 процентовъ и при увеличеніи числа женскихъ преступленій на 9.8 процентовъ, общее число преступленій обоего пола возрастаетъ на 1.8 процентовъ, то найти отношеніе между числами тѣхъ и другихъ преступленій.

ГЛАВА XXVIII.

О пропорціональномъ измѣненіи.

411. Настоящая глава содержитъ въ себѣ рядъ предложеній, имѣющихъ связь съ опредѣленіями отношенія и пропорціи, какъ стали пониматься они въ новой фразеологіи, оказавшейся удобной по тѣмъ или другимъ причинамъ.

412. Говорятъ, что одна величина находится *въ прямой зависимости* отъ другой, измѣняется прямо пропорціонально другой, когда двѣ величины такъ зависятъ другъ отъ друга, что съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ одной, увеличивается или уменьшается и другая.

Иногда для краткости опускаютъ слово *прямо* и говорятъ: одна величина пропорціональна другой, одна величина измѣняется такъ-же, какъ и другая.

413. Такъ напримѣръ, если высота треугольника остается неизмѣнной, то площадь его измѣняется вмѣстѣ съ основаніемъ; дѣйствительно, если

основаніе будетъ увеличиваться или уменьшаться, то, какъ мы знаемъ изъ «Началъ» Евклида, и площадь будетъ увеличиваться или уменьшаться въ томъ-же самомъ отношеніи. Мы можемъ выразить это алгебраическими символами слѣдующимъ образомъ: Пусть A и a будутъ два *числа*, представляющія площади двухъ треугольниковъ, имѣющихъ одинаковую высоту, и пусть B и b будутъ *числа*, соотвѣтственно представляющія основанія этихъ треугольниковъ. Тогда $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}$; откуда мы выводимъ $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$ (ст. 392). Если существуетъ третій треугольникъ, имѣющій ту же высоту, какъ и два предыдущіе, то отношеніе числа, представляющаго его площадь, къ числу, представляющему его основаніе, будетъ также равно $\frac{a}{b}$. Положимъ что $\frac{a}{b}=m$, тогда $\frac{A}{B}=m$ и $A=mB$. Здѣсь A можетъ представлять площадь *всякаго* треугольника изъ ряда такихъ, которые имѣютъ общую высоту и основаніе B, причемъ m остается постоянною величиною. Слѣдовательно положеніе, что площадь треугольника измѣняется какъ основаніе, можетъ также выразиться слѣдующимъ образомъ: площадь находится въ постоянномъ отношеніи съ основаніемъ, или: отношеніе площади къ основанію постоянно; подъ этими словами, согласно съ ст. 392, мы разумѣемъ, что *число*, представляющее площадь, находится въ постоянномъ отношеніи *съ числомъ*, представляющимъ основаніе.

Мы сдѣлали эти замѣчанія съ цѣлью пояснить *означенія* и *термины*, которые будутъ употребляться въ настоящей главѣ. Когда мы говоримъ, что A измѣняется какъ B, то разумѣемъ подъ этимъ, что A представляетъ численное значеніе какой нибудь одной изъ величинъ извѣстнаго ряда ихъ, а B представляетъ численное значеніе соотвѣтствующей величины въ другомъ ихъ ряду и что $A=mB$, гдѣ m есть нѣкоторое число, остающееся постоянно однимъ и тѣмъ-же для каждой соотвѣтствующей пары величинъ.

Дадимъ формальное доказательство равенства $A=mB$, выведя его изъ опредѣленія ст. 412.

414. *Если A измѣняется какъ B, то A равно B, помноженному на нѣкоторую постоянную величину.*

Пусть a и b означаютъ одну пару соотвѣтствующихъ значеній двухъ величинъ и пусть A и B означаютъ другую пару; тогда $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}$ по опредѣленію. Слѣдовательно $A=\frac{a}{b}B=mB$, гдѣ m равно постоянному числу $\frac{a}{b}$.

415. Для выраженія *измѣненія* примемъ для краткости символъ ∞; такъ $A \infty B$ будетъ означать, что A измѣняется какъ B.

416. Говорятъ, что одно количество измѣняется *обратно* другому, когда первое измѣняется какъ величина обратная со вторымъ. См. ст. 263.

Такъ, если $A = \frac{m}{B}$, гдѣ m постоянная величина, то говорятъ, что A измѣняется обратно съ B.

417. Говорятъ, что одна величина измѣняется одновременно съ двумя другими, когда при извѣстномъ измѣненіи въ первой величинѣ, произведеніе двухъ другихъ измѣняется въ томъ-же отношеніи.

Такъ, если $A = mBC$, гдѣ m постоянная величина, то говорятъ, что A измѣняется одновременно съ B и C.

418. Говорятъ, что одна величина измѣняется прямо пропорціонально второй и обратно пропорціонально третьей, когда она измѣняется, какъ вторая и обратная третьей—одновременно.

Или, если $A = m\frac{B}{C}$, гдѣ m постоянная величина, то говорятъ, что A прямо пропорціонально B и обратно пропорціонально C.

419. *Если* $A \infty B$ *и* $B \infty C$, *то* $A \infty C$.

Дѣйствительно, пусть $A = mB$ и $B = nC$, гдѣ m и n постоянныя величины; тогда $A = mnC$, и такъ какъ mn постоянная величина, то $A \infty C$.

420. *Если* $A \infty C$ *и* $B \infty C$, *то* $A \pm B \infty C$ *и* $\sqrt{(AB)} \infty C$.

Дѣйствительно, пусть $A = mC$ и $B = nC$, гдѣ m и n постоянныя величины; тогда $A + B = (m+n)C$ и $A - B = (m-n)C$, слѣдовательно $A \pm B \infty C$. Точно также $\sqrt{(AB)} = \sqrt{(mnC^2)} = C\sqrt{(mn)}$; слѣдовательно $\sqrt{(AB)} \infty C$.

421. *Если* $A \infty BC$, *то* $B \infty \frac{A}{C}$ и $C \infty \frac{A}{B}$.

Дѣйствительно, пусть $A = mBC$, тогда $B = \frac{1}{m}\frac{A}{C}$; слѣдовательно $B \infty \frac{A}{C}$. Подобно этому и $C \infty \frac{A}{B}$.

422. *Если* $A \infty B$ *и* $C \infty D$, *то* $AC \infty BD$.

Дѣйствительно, если $A = mB$ и $C = nD$; тогда $AC = mnBD$; слѣдовательно $AC \infty BD$.

423. *Если* $A \infty B$, *то* $A^n \infty B^n$.

Дѣйствительно, если $A = mB$, то $A^n = m^n B^n$, слѣдовательно $A^n \infty B^n$.

424. *Если* $A \propto B$, *то* $AP \propto BP$, *гдѣ* P *нѣкоторая величина— измѣняющаяся или неизмѣняющаяся.*

Дѣйствительно, пусть $A = mB$; тогда $AP = mBP$; слѣдовательно $AP \propto BP$.

425. *Если* $A \propto B$, *когда* C *не измѣняется и* $A \propto C$, *когда* B *не измѣняется, то* $A \propto BC$, *когда* B *и* C *измѣняются одновременно.*

Измѣненіе A зависитъ отъ измѣненій двухъ величинъ B и C; пусть измѣненіе послѣднихъ величинъ совершается отдѣльно, и когда B измѣняется въ b, пусть A измѣняется въ a'; тогда по предположенію $\frac{A}{a'} = \frac{B}{b}$. Пусть теперь C измѣнится въ c и вслѣдствіе этого пусть a' измѣнится въ a; тогда по предположенію $\frac{a'}{a} = \frac{C}{c}$. Такимъ образомъ

$$\frac{A}{a'} \times \frac{a'}{a} = \frac{BC}{bc};$$

то-есть

$$\frac{A}{a} = \frac{BC}{bc};$$

а слѣдовательно $A \propto BC$.

Очень хорошій примѣръ приложенія этого доставляетъ Геометрія. Можно доказать, что площадь треугольника при неизмѣнной высотѣ измѣняется какъ основаніе, а при неизмѣнномъ основаніи какъ высота. Слѣдовательно, когда измѣняются основаніе и высота, то площадь измѣняется какъ произведеніе чиселъ, выражающихъ основаніе и высоту.

426. Подобнымъ-же образомъ, если будетъ сколько угодно величинъ B, C, D, и проч., каждая изъ которыхъ мѣняется какъ другая величина A, когда всѣ остальныя не измѣняются, то когда всѣ онѣ будутъ измѣняться, A будетъ измѣняться какъ ихъ произведеніе.

Возьмемъ напримѣръ, три величины B, C, D. Когда измѣняется одно B, то A измѣняется какъ B; когда измѣняется одно C, то A измѣняется какъ C; слѣдовательно, по ст. 425, когда B и C измѣняются вмѣстѣ, то A измѣняется, какъ BC. Далѣе, когда измѣняется одно D, то A измѣняется какъ D и когда измѣняется одно BC, то A измѣняется какъ BC; слѣдовательно, по ст. 425, когда D и BC измѣняются вмѣстѣ, то A будетъ измѣняться какъ BCD.

Примѣры на измѣненія.

1. Дано, что y измѣняется какъ x и что $y = 3$, когда $x = 1$; найти значеніе y, когда $x = 3$.

2. Если a измѣняется какъ b, и $a = 15$, когда $b = 3$, то найти уравненіе, связывающее a и b.

3. Дано, что z измѣняется одновременно съ x и y и что $z=1$, когда $x=1$ и $y=1$; найти значеніе z, когда $x=2$ и $y=2$.

4. Если z измѣняется какъ $px+y$ и если $z=3$, когда $x=1$ и $y=2$, и $z=5$, когда $x=2$, а $y=3$, то найти p.

5. Если x измѣняется прямо пропорціонально y, когда z остается постояннымъ, и обратно пропорціонально z, когда y остается постояннымъ; тогда, если y и z мѣняются вмѣстѣ x будетъ измѣняться, какъ $\frac{y}{z}$.

6. Если 3, 2, 1 будутъ одновременными значеніями x, y, z въ предыдущемъ примѣрѣ, то опредѣлить значеніе x, когда $y=2$ и $z=4$.

7. Плата 5 человѣкамъ за 6 недѣль составляетъ 91 р. 20 к.; сколько недѣль могутъ работать 4 человѣка за 121 р. 60 к.? (Приложить примѣръ 5).

8. Если квадратъ x измѣняется какъ кубъ y, и $x=2$, когда $y=3$, то найти уравненіе между x и y.

9. Дано, что y измѣняется какъ сумма двухъ величинъ, изъ которыхъ одна мѣняется какъ x, а другая обратно съ x, и что $y=4$, когда $x=1$, и $y=5$, когда $x=2$, то найти уравненіе между x и y.

10. Если одна величина измѣняется какъ другая и равна $\frac{3}{4}$, когда другая равна $\frac{4}{3}$, то найти, чѣмъ будетъ послѣдняя, когда первая будетъ равняться 9.

11. Если одна величина измѣняется, какъ сумма другихъ, когда разность ихъ остается постоянной, и измѣняется какъ разность, когда сумма ихъ остается постоянной, то показать, что когда обѣ величины измѣняются независимо, то первая величина будетъ измѣняться какъ разность ихъ квадратовъ.

12. Дано, что объемъ сферы измѣняется какъ кубъ его радіуса; доказать, что объемъ сферы, радіусъ которой 6 дюймовъ, равенъ суммѣ объемовъ трехъ сферъ, радіусы которыхъ соотвѣтственно 5, 4, 3 дюйм.

13. Двѣ круглыхъ золотыхъ пластинки, каждая толщиною въ одинъ дюймъ, діаметры которыхъ соотвѣтственно равнялись 6 и 8 дюймамъ, сплавлены вмѣстѣ и изъ нихъ сдѣлана одна круглая пластинка толщиною въ дюймъ. Найти ея діаметръ, зная, что площадь круга мѣняется какъ квадратъ его діаметра.

14. Было два золотыхъ шара, радіусы которыхъ r и r'; они расплавлены и изъ нихъ отлитъ новый шаръ. Найти его радіусъ.

16. Если x, y, z такія перемѣнныя величины, что $y+z-x$ есть постоянная, а $(x+y-z)\ (x+z-y)$ измѣняется какъ yz, то доказать, что $x+y+z$ мѣняется какъ yz.

16. Нѣкоторая точка движется такъ, что скорость ея мѣняется съ каждой новой верстой, но остается неизмѣнной, когда она проходитъ каждую версту, причемъ скорость ея на каждой верстѣ обратно пропорціональна числу верстъ, пройденныхъ предъ тѣмъ, какъ она начинаетъ извѣстную версту. Если вторая верста пройдена была въ 2 часа, то найти время, которое потребуется для прохожденія n-й версты.

17. Положимъ, что y измѣняется такъ-же, какъ нѣкоторая величина, представляющая собою сумму трехъ величинъ, изъ которыхъ первая—постоянная, вторая мѣняется какъ x, а третья мѣняется какъ x^2. И положимъ, что когда $x=a$, $y=0$; когда $x=2a$, $y=a$; когда $x=3a$, $y=4a$. Показать, что когда $x=na$, то $y=(n-1)^2a$.

18. Принимая, что количество произведеннаго дѣйствія измѣняется пропорціонально кубу числа дѣятелей въ одно и то-же время и пропорціонально квадратному корню изъ времени при одномъ и томъ-же числѣ дѣятелей; найти, сколько времени потребуется, чтобы 3 человѣка могли сдѣлать одну пятую той работы, которую могутъ произвести 24 человѣка въ 25 часовъ. (См. ст. 425).

ГЛАВА XXIX.

Системы письменнаго счисленія.

427. Читателю извѣстно изъ Ариѳметики, что при обыкновенномъ способѣ изображенія цѣлыхъ чиселъ цифрами, число, представляемое каждою отдѣльною цифрою, всегда бываетъ *нѣкоторымъ кратнымъ какой нибудь степени десяти.* Такъ въ означеніи 347 цифра 3 представляетъ 3 сотни, т.-е. 3 раза 10^2; 4 представляетъ 4 десятка, т.-е. 4 раза 10^1, а 7, представляющее 7 единицъ, представляетъ, иначе сказать, 7 разъ 10^0.

Такой способъ изображенія чиселъ называется *обыкновенною системой обозначенія или счисленія*, а 10 называется *основаніемъ* этой системы.

428. Теперь мы докажемъ, что вмѣсто 10 можно принимать за *основаніе* всякое положительное и цѣлое число, большее единицы и покажемъ, какъ изобразить данное число по какой нибудь данной системѣ. Затѣмъ мы дополнимъ это разными предложеніями, имѣющими связь съ этимъ вопросомъ.

Буквы, съ помощью которыхъ будутъ выражаться числа, мы будемъ называть для краткости *цифрами*.

Когда мы будемъ говорить *о какомъ нибудь основаніи*, то всегда будемъ разумѣть, что основаніе есть нѣкоторое цѣлое и положительное число, большее единицы.

429. *Всякое цѣлое число можно выразить посредствомъ всякаго даннаго основанія системы счисленія.*

Пусть N означаетъ цѣлое число и r—основаніе системы. Положимъ, что r^n есть высшая степень r, не превышающая N; раздѣлимъ N на r^n, и пусть p_n будетъ частное и N_1 остатокъ; тогда

$$N = p_n r^n + N_1.$$

Здѣсь, по предположенію, p_n меньше r, а также N_1 меньше r^n. Теперь раздѣлимъ N_1 на r^{n-1}, и пусть p_{n-1} будетъ частное и N_2 остатокъ; тогда

$$N_1 = p_{n-1} r^{n-1} + N_2.$$

Будемъ продолжать это до тѣхъ поръ, пока остатокъ не будетъ меньше r; такимъ образомъ мы найдемъ, что N выразится въ видѣ слѣдующаго равенства

$$N = p_n r^n + p_{n-1} r^{n-1} + \ldots + p_2 r^2 + p_1 r + p_0.$$

Каждая изъ цифръ p_n, p_{n-1}, $\ldots p_1$, p_0 меньше r, и одна или нѣсколько изъ нихъ послѣ первой могутъ быть нулями.

Наиболѣе удобный способъ опредѣленія цифръ по какой нибудь системѣ будетъ данъ въ слѣдующей статьѣ.

430. *Выразить данное цѣлое число по какой нибудь данной системѣ.*

Подъ словами *данное* цѣлое число мы разумѣемъ цѣлое число, выраженное словесно или цифрами по какой нибудь извѣстной системѣ. Если система не упомянута, то мы будемъ подразумѣвать обыкновенную систему.

Пусть N будетъ данное число, r основаніе системы, въ которой оно выражено. Положимъ, что p_0, p_1, $\ldots p_n$ будутъ искомыя цифры, посредствомъ которыхъ число N выражается въ новой системѣ, въ порядкѣ отъ правой руки къ лѣвой; тогда

$$N = p_n r^n + p_{n-1} r^{n-1} + \ldots + p_2 r^2 + p_1 r + p_0;$$

и мы должны теперь найти значеніе каждой цифры.

Раздѣлимъ N на r, и пусть Q_1 означаетъ частное, тогда очевидно, что $Q_1 = p_n r^{n-1} + p_{n-1} r^{n-2} + p_{n-2} r^{n-3} + \ldots + p_2 r + p_1$, и что остатокъ будетъ p_0. Слѣдовательно p_0 найдется по слѣдующему правилу: *раздѣлите данное число на данное основаніе, тогда остатокъ будетъ первая искомая цифра.*

Далѣе раздѣлимъ Q_1 на r, и пусть Q_2 означаетъ частное; тогда очевидно, что

$$Q_2 = p_n r^{n-2} + p_{n-1} r^{n-3} + \ldots + p_2;$$

а остатокъ будетъ p_1. Слѣдовательно найдена будетъ вторая искомая цифра.

Продолжая такимъ образомъ далѣе, мы найдемъ послѣдовательно всѣ искомыя цифры числа.

431. Для примѣра выразимъ число 43751 въ системѣ, основаніе которой 6. Дѣленіе можно производить и остатки писать такъ:

6)43751
6)7291 5
6)1215 1
6)202 3
6)33 4
5 3

Такимъ образомъ

$$43751 = 5.6^5 + 3.6^4 + 4.6^3 + 3.6^2 + 1.6 + 5,$$

такъ что число это, выраженное въ новой системѣ, будетъ 534315.

432. Выразимъ еще то-же число 43751 въ системѣ, основаніе которой 12.

12)43751
12)3645 . . . 11
12)303 . . . 9
12)25 . . . 3
2 . . . 1

Итакъ $43751 = 2.12^4 + 1.12^3 + 3.12^2 + 9.12 + 11$.

Чтобы выразить число по новой системѣ, намъ нужно принять какой нибудь знакъ для *одиннадцати*; пусть этотъ знакъ будетъ B; тогда число выразится въ новой системѣ такъ $2139B$.

Мы не можемъ употреблять означеніе 11 для выраженія *одиннадцати*, потому что 11 въ новой системѣ представляетъ собою $1.12 + 1$, то-есть *тринадцать*.

433. Разсмотримъ теперь такой примѣръ, гдѣ число дано не въ обыкновенной системѣ.

Число выражается чрезъ $A347B$ въ системѣ, основаніе которой двѣнадцать; требуется выразить его въ системѣ, основаніе которой одиннадцать.

Здѣсь A означаетъ *десять*, а B *одиннадцать*.

B)$A347B$
$B273$ . . . 2

Дѣйствіе дѣленія на одиннадцать совершается такъ: во-первыхъ, B не содержится въ A, потому что одиннадцать не содержится въ де-

сяти; тогда мы задаемся, сколько разъ B содержится въ $A3$, гдѣ A означаетъ десять разъ двѣнадцать, то-есть сто-двадцать, такъ что вопросъ будетъ состоять въ томъ, сколько разъ одиннадцать заключается въ сто-двадцати-трехъ? Оно содержится одиннадцать разъ съ остаткомъ два. Затѣмъ мы спрашиваемъ, сколько разъ B содержится въ 24, то-есть сколько разъ одиннадцать содержится въ двадцати-восьми? Оно содержится два раза съ остаткомъ шесть. Тогда спрашиваемъ, сколько разъ B содержится въ 67, то-есть сколько разъ одиннадцать содержится въ семидесяти-девяти? оно содержится семь разъ съ остаткомъ два. Наконецъ задаемся вопросомъ, сколько разъ B содержится въ $2B$, т.-е. сколько разъ одиннадцать содержится въ тридцати-пяти? Оно содержится три раза съ остаткомъ два.

Слѣдовательно 2 будетъ первая искомая цифра.

Остальную часть дѣйствія мы только покажемъ въ знакахъ; учащійся долженъ старательно продѣлать это для себя и тогда сравнить полученный результатъ съ тѣмъ, что дано здѣсь.

$$
\begin{array}{r}
B)\underline{B\,2\,7\,3} \\
B)\underline{1\,0\,2\,A}\ \ldots\ 1 \\
B)\underline{1\,1\,4}\ \ldots\ 2 \\
B)\,1\,2\ \ldots\ 6 \\
\hline
1\ \ldots\ 3
\end{array}
$$

Слѣдовательно данное число равняется слѣдующему:

$$1.B^5+3B^4+6B^3+2B^2+1.B+2;$$

то-есть въ системѣ, основаніе которой одиннадцать, оно представляется въ видѣ 136212.

434. Переходить отъ одной системы къ другой можно также и по другому способу. Положимъ, напримѣръ, что намъ нужно выразить по обыкновенной системѣ число 24613, написанное по семеричной системѣ. Здѣсь намъ придется въ сущности вычислить выраженіе

$$2x^4+4x^3+6x^2+x+3,$$

полагая $x=7$. Для этого мы можемъ употребить способъ, объясненный въ *Теоріи Уравненій*, ст. 5.

$$
\begin{array}{r}
2+\ 4+\ \ 6+\ \ 1+\ \ \ 3 \\
\quad +14+126+924+6475 \\
\hline
18+132+925+6478
\end{array}
$$

Результатъ будетъ 6478. Этотъ пріемъ выгоденъ, когда приходится переходить отъ какой нибудь системы къ десятичной.

435. Легко составить какое угодно число примѣровъ для взаимной провѣрки выводовъ. Такъ напр. можно взять два числа, выраженныя

въ обыкновенной системѣ, и найти ихъ произведеніе, затѣмъ перевести это произведеніе на другую систему; послѣ этого выразить оба числа по той-же самой системѣ и найти ихъ произведеніе по этой системѣ; полученный результатъ долженъ быть такой-же, какъ и раньше. Или можно взять какое нибудь число, возвести его въ квадратъ, выразить послѣдній по другой какой нибудь системѣ и извлечь изъ него квадратный корень въ этой системѣ, а затѣмъ перевести полученный результатъ на первоначальную систему.

436. Пусть теперь требуется преобразовать данную *дробь*, переведя съ одной системы на другую. Это можно сдѣлать, преобразовавъ отдѣльно числителя и знаменателя данной дроби по способу ст. 430. Такимъ образомъ мы получимъ дробь тожественную съ данной, причемъ числитель и знаменатель ея будутъ выражены по новой системѣ.

437. Въ ст. 427 мы говорили, что въ обыкновенной системѣ счисленія каждая цифра, стоящая въ выраженіи какого нибудь числа цифрами, представляетъ *нѣкоторое кратное отъ какой нибудь степени десяти*. Это положеніе можно обобщить или распространить, такъ что можно утверждать, что если какое нибудь число выражено въ обыкновенной системѣ, и число это будетъ *цѣлое*, или *десятичная дробь*, или *цѣлое съ десятичной частью*, то каждая его цифра представляетъ *нѣкоторое кратное отъ какой нибудь степени десяти*. Такъ, въ 347.958 цифры 3, 4 и 7 имѣютъ значенія, опредѣленныя нами въ ст. 427, а 9 представляетъ $\frac{9}{10}$, то-есть 9 разъ 10^{-1}; 5 представляетъ $\frac{5}{100}$; то-есть 5 разъ 10^{-2}, и 8 представляетъ $\frac{8}{1000}$, т.-е. 8 разъ 10^{-3}.

Поэтому намъ естественно приходится встрѣтиться со слѣдующей задачей: требуется выразить данную дробь въ какой нибудь системѣ посредствомъ ряда дробей, аналогичныхъ *десятичнымъ дробямъ* въ обыкновенной системѣ. Такія дроби мы будемъ называть для краткости *системными* дробями.

438. *Выразить данную дробь посредствомъ ряда системныхъ дробей при данномъ основаніи.*

Подъ *данной* дробью мы будемъ понимать дробь, выраженную словами или цифрами по обыкновенной системѣ.

Пусть F означаетъ данную дробь и пусть r будетъ основаніе данной системы. Положимъ, что t_1, t_2, ... будутъ числители, т.-е. цифры искомыхъ системныхъ дробей въ порядкѣ *отъ лѣвой* руки *къ правой*; тогда

$$F = \frac{t_1}{r} + \frac{t_2}{r^2} + \frac{t_3}{r^3} + \ldots$$

гдѣ t_1, t_2, t_3, ... нужно будетъ найти.

Умножимъ обѣ части этого равенства на r; тогда будетъ

$$Fr = t_1 + \frac{t_2}{r} + \frac{t_3}{r^2} + \ldots$$

Правая часть этого равенства состоитъ изъ цѣлаго числа t и изъ добавочной дробной части. Пусть I_1 означаетъ цѣлую часть числа Fr и F_1—дробную часть; тогда мы должны имѣть

$$I_1 = t_1, \; F_1 = \frac{t_2}{r} + \frac{t_3}{r_2} + \ldots$$

Такимъ образомъ, чтобы получить первый числитель t_1 въ ряду системныхъ дробей, мы приходимъ къ такому правилу: *умножить данную дробь на основаніе данной системы; тогда наибольшее цѣлое число въ произведеніи будетъ первымъ числителемъ или первой цифрой искомой системной дроби.*

Умножимъ затѣмъ F_1 на r; пусть I_2 будетъ цѣлая часть произведенія и F_2—дробная часть; тогда будетъ

$$I_2 = t_2, \; F_2 = \frac{t_3}{r} + \frac{t_4}{r^2} + \ldots$$

Слѣдовательно t_2, т. е. второй изъ искомыхъ числителей становится теперь извѣстнымъ. Продолжая идти такимъ образомъ далѣе, мы будемъ послѣдовательно опредѣлять искомые числители. Если какое нибудь изъ произведеній, появляющихся въ лѣвой части равенствъ, будетъ цѣлымъ числомъ, то дѣйствіе окончится, и данная дробь выразится конечнымъ рядомъ системныхъ дробей. Если-же никакого цѣлаго произведенія не получится, то дѣйствіе не окончится никогда, и данная дробь можетъ выразиться лишь въ видѣ безконечнаго ряда системныхъ дробей, при этомъ числители этихъ дробей будутъ *періодически* повторяться, какъ въ десятичной періодической дроби.

439. Напримѣръ, выразить $\frac{123}{128}$ посредствомъ ряда системныхъ дробей при основаніи 8.

Умножимъ $\frac{123}{128}$ на 8; мы получимъ $\frac{123}{16}$, то-есть $7 + \frac{11}{16}$.

Умножимъ $\frac{11}{16}$ на 8; мы получимъ $\frac{11}{2}$, то-есть $5 + \frac{1}{2}$.

Умножимъ $\frac{1}{2}$ на 8; мы получимъ 4.

Слѣдовательно $\frac{123}{128} = \frac{7}{8} + \frac{5}{8^2} + \frac{4}{8^3}$.

440. Не лишне замѣтить, что основаніе десять представляетъ собою не только основаніе обыкновеннаго способа изображать числа зна-

ками, но и на самомъ дѣлѣ является основаніемъ нашего способа *говорить* о числахъ. Это будетъ видно, если замѣтить, на какой стадіи счета, начиная отъ единицы, мы выводимъ новыя *слова*. Напримѣръ, всѣ числа между двадцать-одинъ и двадцать-девять, включая и ихъ самихъ, выражаются посредствомъ словъ, уже встрѣчавшихся въ счетѣ до двадцати; но послѣ этого является новое слово, именно *тридцать*, и мы можемъ считать далѣе безъ новаго слова до тридцати девяти; и такъ далѣе.

Число *десять* имѣетъ только двухъ дѣлителей, отличныхъ отъ него самого и единицы, именно 2 и 5; число двѣнадцать имѣетъ четыре дѣлителя, именно 2, 3, 4 и 6. По этой причинѣ двѣнадцать было-бы болѣе удобнымъ основаніемъ для системы счисленія, чѣмъ десять. Это можно пояснить, приведя въ примѣръ англійскій шиллингъ; такъ какъ шиллингъ равняется *двѣнадцати* пенсамъ, то половина, треть, четверть и шестая часть шиллинга содержатъ каждая по цѣлому числу пенсовъ; а если-бы шиллингъ равнялся десяти пенсамъ, то лишь половина и пятая доля шиллинга могли-бы выражаться цѣлымъ числомъ пенсовъ. То-же самое можно сказать о выраженіи фута въ дюймахъ.

441. Можно замѣтить, что если-бы принять за основаніе системы счисленія *два*, то ариѳметическія дѣйствія въ извѣстномъ отношеніи могли-бы очень упроститься. Въ такой системѣ можетъ быть только двѣ *цифры* 0 и 1, такъ что всякое ариѳметическое дѣйствіе состояло бы лишь въ томъ, чтобы приложить 1, вычесть 1, помножить на 1 или раздѣлить на 1. Но простота подобныхъ дѣйствій встрѣчала бы себѣ противовѣсъ въ большомъ числѣ ихъ.

Въ слѣдующихъ двухъ статьяхъ мы дадимъ два примѣра, находящихся въ связи съ настоящимъ вопросомъ.

442. Найти, какой рядъ гирь въ 1, въ 2, въ 2^2, въ 2^4, ... фунтовъ нужно употреблять, чтобы взвѣсить N фунтовъ, пользуясь для этого каждой гирей не болѣе одного раза.

Очевидно, что этотъ вопросъ будетъ тотъ-же самый, какъ и слѣдующій: выразить число N въ системѣ съ основаніемъ два. Изъ ст. 429, слѣдуетъ, что такая задача всегда можетъ быть рѣшена.

443. Положимъ, что требуется опредѣлить, какія гири въ 1, 3, 3^2, 3^3... фунтовъ должно подобрать, чтобы взвѣсить N фунтовъ, употребляя каждую гирю не болѣе одного раза, но на *обѣихъ* чашкахъ вѣсовъ.

Раздѣлимъ N на 3; остатокъ можетъ быть или нуль, или одинъ, или два. Означимъ частное буквой N_1; тогда въ первомъ случаѣ мы имѣемъ $N=3N_1$, во второмъ $N=3N_1+1$ и въ третьемъ $N=3N_1+2$. Въ первомъ или во второмъ случаѣ будемъ дѣлить N_1 на 3; въ третьемъ-же случаѣ можемъ писать $N=3(N_1+1)-1$ и будемъ потомъ дѣлить N_1+1 на 3. Продолжая поступать такимъ образомъ, мы получимъ окончательный результатъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$N = q_n 3^n + q_{n-1} 3^{n-1} + \ldots + q_1 3 + q_0.$$

гдѣ каждое изъ количествъ $q_0, q_1, q_2, \ldots q_n$ можетъ быть или нулемъ или $+1$, или -1. Такимъ образомъ задача рѣшена.

444. *Если въ данной системѣ, основаніе которой есть* r, *раздѣлить сумму цифръ какого нибудь числа на* r—1, *или на какой нибудь множитель, входящій въ* r—1, *то получится тотъ-же остатокъ, какой получился-бы отъ дѣленія самого числа соотвѣтственно на* r—1 *или на одинъ изъ множителей, входящихъ въ* r—1.

Означимъ черезъ N цѣлое число, и пусть $p_0, p_1, p_2, \ldots p_n$ будутъ его цифры, начиная съ единицъ; тогда

$$N = p_0 + p_1 r + p_2 r^2 + \ldots + p_n r^n$$
$$= p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_n$$
$$+ p_1(r-1) + p_2(r^2-1) + \ldots + p_n(r^n-1);$$

слѣдовательно
$$\frac{N}{r-1} = \frac{p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{r-1}$$
$$+ p_1 + p_2(r+1) + \ldots + p_n \frac{r^n-1}{r-1}.$$

Но $\frac{r^n-1}{r-1}$ есть цѣлое число при всякомъ цѣломъ значеніи n; такимъ образомъ $\frac{N}{r-1} =$ нѣкоторому цѣлому числу $+ \frac{p_0 + p_1 + \ldots + p_n}{r-1}$.

Пусть теперь p будетъ одинъ изъ множителей числа $r-1$, т.-е. пусть $r-1 = pq$; тогда, умноживъ послѣдній выводъ на q, получимъ

$$\frac{N}{p} = \text{нѣкоторому цѣлому} + \frac{p_0 + p_1 + \ldots + p_n}{p}.$$

Это и доказываетъ наше предложеніе.

445. *Если въ какой нибудь системѣ, основаніе которой есть* r, *какое нибудь цѣлое число раздѣлить на* r+1, *и если разность между суммой цифръ нечетныхъ мѣстъ и суммой цифръ четныхъ мѣстъ также раздѣлить на* r+1, *то остатки или будутъ равны между собою, или сумма ихъ будетъ равна* r+1.

Употребляя то-же означеніе, какъ въ предыдущей статьѣ, мы будемъ имѣть

$$N = p_0 + p_1 r + p_2 r^2 + \ldots + p_n r^n$$
$$= p_0 - p_1 + p_2 - p_3 + \ldots + (-1)^n p_n$$
$$+ p_1(r+1) + p_2(r^2-1) + p_3(r^3+1) + \ldots + p_n\{r^n - (-1)^n\}.$$

Такимъ образомъ

$$\frac{N}{r+1} = \text{нѣкоторому цѣлому} + \frac{p_0 - p_1 + p_2 - \ldots + (-1)^n p_n}{r+1}.$$

Во-первыхъ, положимъ, что $p_0 - p_1 + p_2 - \ldots + (-1)^n p_n$ будетъ величиною *положительной*, и обозначимъ ее чрезъ D; тогда

$$\frac{N}{r+1} = \text{нѣкоторому цѣлому} + \frac{D}{r+1};$$

такимъ образомъ, когда N и D будемъ дѣлить на $r+1$, то остатки будутъ равны.

Во-вторыхъ, положимъ, что $p_0 - p_1 + p_2 - \ldots + (-1)^n p_n$ будетъ величиною *отрицательной*, и обозначимъ ее чрезъ $-D$; тогда

$$\frac{N}{r+1} = \text{нѣкоторому цѣлому} - \frac{D}{r+1}, \text{ то-есть}$$

$$\frac{N}{r+1} + \frac{D}{r+1} = \text{нѣкоторому цѣлому числу};$$

такимъ образомъ когда N и D мы будемъ дѣлить на $r+1$, то сумма остатковъ должна равняться $r+1$, если только одинъ изъ остатковъ не нуль, а слѣдовательно оба не нули.

Напримѣръ, положимъ, что $r=10$ и $N=263419$.

Здѣсь $9-1+4-3+6-2=13=D$,

и если N и D раздѣлить на 11, то они дадутъ остатокъ 2.

Положимъ еще, что $r=10$ и $N=615372$. Здѣсь

$$2-7+3-5+1-6=-12=-D;$$

и если N и D раздѣлить на 11, то получимъ въ остаткѣ соотвѣтственно 10 и 1.

446. На основаніи ст. 444 оказывается, что всякое число дѣлится на 9, если сумма его цифръ дѣлится на 9, и что когда какое нибудь число раздѣлено на 9, то остатокъ будетъ тотъ-же самый, какой получится, когда сумма его цифръ раздѣлится на 9. А такъ какъ 3 есть множитель 9, то всякое число дѣлится на 3, если сумма его цифръ дѣлится на 3, и когда какое нибудь число раздѣлено на 3, то остатокъ будетъ такой-же, какъ и при дѣленіи суммы его цифръ на 3.

Изъ ст. 445 слѣдуетъ, что какое нибудь число дѣлится на 11, когда разность между суммой цифръ нечетныхъ и суммой цифръ четныхъ мѣстъ дѣлится на 11.

447. Основываясь на свойствѣ числа 9, упомянутомъ въ предыдущей статьѣ, можно вывести правило для обнаруженія ошибки при умноженіи двухъ чиселъ.

Пусть $9a+x$ означаетъ множимое, а $9b+y$ множитель, слѣдовательно произведеніе будетъ $81ab+9bx+9ay+xy$. Тогда, если сумму цифръ во множимомъ раздѣлить на 9, то остатокъ будетъ x; если сумму цифръ во множителѣ раздѣлить на 9, то остатокъ будетъ y; и если сумму цифръ произведенія раздѣлить на 9, то остатокъ долженъ быть тотъ-же самый, какъ и отъ дѣленія xy на 9, если только при умноженіи не сдѣлано никакой ошибки.

Примѣры на системы счисленія.

Въ слѣдующихъ шестнадцати примѣрахъ перевести числа съ системъ, въ которыхъ они даны, на другія.

1. 123456 съ системы десятеричной на семеричную.
2. 1357531 съ системы десятеричной на пятеричную.
3. 357234 съ системы десятеричной на семеричную.
4. 333310 съ системы десятеричной на одиннадцатеричную.
5. 545 съ системы шестеричной на десятеричную.
6. 4444 съ системы пятеричной на десятеричную.
7. 3413 съ системы шестеричной на семеричную.
8. 40234 съ системы пятеричной на двѣнадцатеричную.
9. 64520 съ системы семеричной на одиннадцатеричную.
10. 15951 съ системы одиннадцатеричной на десятеричную.
11. 15.75 съ системы десятеричной на восьмеричную.
12. 31462.125 съ системы десятеричной на восьмеричную.
13. 221.248 съ системы десятеричной на пятеричную.
14. 444.44 съ системы пятеричной на десятеричную.
15. 1845.3125 съ системы десятеричной на двѣнадцатеричную.
16. 3065.263 съ системы восьмеричной на десятеричную.
17. Выразить по семеричной системѣ числа, выражающіяся въ десятеричной системѣ символами 231 и 452; умножить полученныя числа другъ на друга въ той-же семеричной системѣ и перевести произведеніе на десятеричную систему.
18. Раздѣлить 17832126 на 4685 въ девятеричной системѣ.
19. Извлечь квадратный корень изъ числа 33224 въ ~~семеричной~~ системѣ.
20. Извлечь квадратный корень изъ числа 12345321 въ шестеричной системѣ.
21. Извлечь квадратный корень изъ числа 3445.44 въ шестеричной системѣ и перевести результатъ на троичную систему.
22. Вычесть 20404020 изъ 103050301 въ восьмеричной системѣ и извлечь изъ результата квадратный корень.
23. Извлечь квадратный корень изъ 1100000100001, выраженнаго по двоичной системѣ, въ той-же системѣ.
24. Извлечь квадратный корень изъ 67556A21 въ двѣнадцатеричной системѣ.

— 25. Выразить $\frac{117}{192}$ рядомъ системныхъ дробей при основаніи двѣнадцать.

— 26. Найти, въ какой системѣ девяносто-пять выражается чрезъ 137.

— 27. Найти, въ какой системѣ двѣ-тысячи-семьсотъ-четыре выражается символомъ 20304.

— 28. Найти, въ какой системѣ тысяча-триста-тридцать-одинъ выразится чрезъ 1000.

— 29. Найти, въ какой системѣ шестнадцать тысячъ выражается символомъ 1003000.

— 30. Въ десятеричной системѣ число выражается чрезъ $36^{5}/_{6}$, а въ нѣкоторой другой системѣ чрезъ 55,5; найти основаніе послѣдней системы.

— 31. Найти, въ какой системѣ тысяча-шесть-сотъ-шестьдесятъ-четыре десятитысячныхъ долей единицы выражаются посредствомъ 0,0404.

— 32. Показать, что 12345654321 дѣлится на 12321 во всякой системѣ съ основаніемъ болѣе шести.

— 33. Показать, что 144 будетъ точнымъ квадратомъ во всякой системѣ съ основаніемъ больше четырехъ.

— 34. Показать, что 1331 есть точный кубъ во всякой системѣ съ основаніемъ больше трехъ.

— 35. Найти, какія изъ гирь въ 1, 2, 4, 8, ... 2^n фунтовъ нужно выбрать, чтобъ взвѣсить 1719 фунтовъ.

— 36. Найти, какія изъ гирь въ 1, 3, 3^2, ... фунтовъ нужно выбрать, чтобъ взвѣсить 1027 фунтовъ, чтобы на вѣсахъ было не болѣе одной гири каждаго рода на той или другой чашкѣ.

— 37. Найти, какія изъ тѣхъ-же гирь надо взять, чтобы взвѣсить 716 фунтовъ.

— 38. Найти, какія изъ тѣхъ-же гирь надо взять, чтобъ взвѣсить 475 фунтовъ.

— 39. Найти, производя дѣйствія по 12-ричной системѣ, высоту параллелепипеда, объемъ котораго 94 куб. фута 235 $_{(10)}$ куб. дюймовъ и основаніе котораго 24 квадр. фута 5 $_{(10)}$ квадр. дюймовъ.

40. Выразить 2 фута $10^{1}/_{4}$ дюймовъ линейныхъ и 5 футовъ $79^{1}/_{6}$ дюймовъ квадратныхъ въ двѣнадцатеричной системѣ въ видѣ двѣнадцатыхъ частей фута, а такъ какъ второе число будетъ представлять площадь прямоугольника, то, принявъ одну его сторону равной первому числу, найти другую дѣленіемъ по двѣнадцатеричной системѣ.

41. Если p_0, p_1, p_2, ... будутъ цифры нѣкотораго числа, начиная съ единицъ, то доказать, что это число раздѣлится на восемь, если $p_0 + 2p_1 + 4p_2$ дѣлится на восемь.

42. Доказать, что разность двухъ чиселъ, представленныхъ однѣми и тѣми-же цифрами, дѣлится на девять.

43. Найти наибольшее и наименьшее числа при данномъ числѣ цифръ во всякой данной системѣ.

44. Доказать, что если въ какой нибудь системѣ сумма двухъ чиселъ будетъ кратнымъ основанія этой системы, то 1) цифра, которою будутъ оканчиваться квадраты этихъ чиселъ, будетъ одна и та-же, и 2) эта цифра, сложенная съ цифрою, на которую оканчивается произведеніе данныхъ чиселъ, будетъ равна основанію системы.

45. Извѣстное число, представленное по двоичной системѣ, оканчивается тремя нулями, предъ которыми стоитъ цифра, отличная отъ нуля; а представленное по системѣ троичной или пятеричной, оканчивается нулемъ, предъ которымъ стоитъ цифра, отличная отъ нуля; во всякой-же другой системѣ, за исключеніемъ двѣнадцати системъ, послѣдняя его цифра отлична отъ нуля. Какія это двѣнадцать системъ и какое это число?

ГЛАВА XXX.

Ариѳметическая прогрессія.

448. Если величины возрастаютъ или уменьшаются такъ, что между ними остается постоянная разность, то говорятъ, что онѣ составляютъ ариѳметическую прогрессію.

Такъ, слѣдующіе ряды величинъ составляютъ ариѳметическія прогрессіи:

$1, 3, 5, 7, 9, \ldots.$

$40, 36, 32, 28, 24, \ldots.$

$a, a+b, a+2b, a+3b, \ldots.$

$a, a-b, a-2b\ a-3b, \ldots.$

Въ первомъ примѣрѣ общая постоянная разность есть 2, во второмъ она -4, въ третьемъ b и въ четвертомъ $-b$.

449. Пусть a означаетъ первый членъ ариѳметической прогрессіи, b разность; тогда второй членъ будетъ $a+b$, третій членъ $a+2b$, четвертый $a+3b$, и такъ далѣе. Такимъ образомъ n-ый членъ будетъ $a+(n-1)b$.

450. *Найти сумму даннаго числа величинъ, составляющихъ ариѳметическую прогрессію, предполагая, что первый членъ и разность даны.*

Означимъ первый членъ буквой a, и пусть b представляетъ постоянную разность, n—число членовъ, s—сумму членовъ и l—послѣдній членъ. Тогда

$$s=a+(a+b)+(a+2b)+\ldots+l.$$

Написавъ этотъ-же рядъ въ обратномъ порядкѣ, получимъ также:

$$s=l+(l-b)+(l-2b)+\ldots+a.$$

Слѣдовательно, сложивъ ихъ, получимъ

$$2s=(l+a)+(l+a)+(l+a)+\ldots \text{ всего } n \text{ членовъ}$$
$$=n(l+a);$$

откуда находимъ $$s=\frac{n}{2}(l+a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

А также $$l=a+(n-1)b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2);$$

слѣдовательно $$s=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Уравненіе (3) даетъ значеніе s, выраженное посредствомъ величинъ, которыя предполагаются извѣстными Уравненіе (1) также даетъ удобное выраженіе для s и представляетъ собою слѣдующее правило: *Сумма какого нибудь числа членовъ ариѳметической прогрессіи равняется произведенію числа членовъ на полусумму перваго и послѣдняго членовъ.*

451. *Въ ариѳметической прогрессіи сумма какихъ нибудь двухъ членовъ, одинаково отстоящихъ отъ начала и конца ея, равна суммѣ перваго и послѣдняго членовъ.*

Справедливость этого можно было видѣть при предыдущемъ доказательствѣ, но то-же можно доказать формально слѣдующимъ образомъ: Пусть a будетъ первый членъ, b общая разность, l послѣдній членъ; тогда r-ый членъ отъ начала будетъ $a+(r-1)b$, а r-ый членъ отъ конца будетъ $l-(r-1)b$, и слѣдовательно сумма этихъ членовъ будетъ $l+a$.

452. *Вставить данное число среднихъ ариѳметическихъ между двумя данными членами.*

Пусть a и c будутъ два данныя члена, а n число вставляемыхъ членовъ. Тогда смыслъ задачи будетъ таковъ, что мы должны найти $n+2$ члена ариѳметической прогрессіи, въ которой a есть первый, а c послѣдній членъ. Пусть b означаетъ общую разность; тогда $c=a+(n+1)b$; слѣдовательно $b=\frac{c-a}{n+1}$. Когда-же b извѣстно, то извѣстно будетъ и n искомыхъ членовъ

$$a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ \ldots a+nb.$$

453. Въ ст. 450 мы имѣли дѣло съ пятью величинами, именно съ a, b, l, n, s, связанными между собою уравненіями (1) и (2), или (2)

и (3), выведенными тамъ. Читатель замѣтитъ, что если какія нибудь три изъ этихъ пяти величинъ будутъ даны, то двѣ другія могутъ быть найдены; это составитъ собою нѣсколько полезныхъ упражненій. Въ видѣ примѣра мы дадимъ одно изъ нихъ.

454. *Даны: сумма нѣкоторой ариѳметической прогрессіи, первый членъ ея и разность; найти число членовъ.*

Здѣсь $$s=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\};$$

слѣдовательно $$2s=n^2b+(2a-b)n.$$

Рѣшая это квадратное уравненіе, получимъ

$$n=\frac{b-2a\pm\sqrt{\{(2a-b)^2+8sb\}}}{2b}.$$

455. Мы видимъ, что въ предыдущей статьѣ найдется два значенія для n; въ нѣкоторыхъ случаяхъ оба значенія могутъ быть допущены, какъ это видно изъ слѣдующаго примѣра. Положимъ $a=11$, $b=-2$, $s=27$; мы получимъ $n=3$ или 9. Ариѳметическая прогрессія будетъ

11, 9, 7, 5, 3, 1, —1, —3, —5, и проч.

и очевидно, что сумма первыхъ трехъ членовъ та-же самая, какъ и сумма первыхъ девяти членовъ.

456. Положимъ еще, что $a=4$, $b=2$, $s=18$; мы получимъ $n=3$ или —6. Сумма трехъ членовъ, начинающихся съ 4, есть 4+6+8 или 18. Если мы поставимъ еще члены, *предшествующіе* 4, то получимъ рядъ

$$-2+0+2+4+6+8,$$

и сумма этихъ шести членовъ тоже равна 18. Изъ этого примѣра мы можемъ заключить, что когда для числа членовъ получается *цѣлое отрицательное* значеніе, а также и цѣлое положительное, то оказывается справедливымъ слѣдующее правило: начиная съ послѣдняго члена ряда, полученнаго соотвѣтственно положительному значенію, надо отсчитать назадъ столько членовъ, сколько указываетъ отрицательное значеніе—результатъ будетъ равняться данной суммѣ. Справедливость такой догадки можно доказать слѣдующимъ образомъ.

Квадратное уравненіе относительно n, полученное въ ст. 454, есть

$$2s=n^2b+(2a-b)n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Предположимъ, что существуетъ такой рядъ, въ которомъ первый членъ есть $b-a$, разность b, число членовъ m и сумма s; тогда

$$2s=m^2b+(2b-2a-b)m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Корни уравненій (1) и (2) равны по величинѣ, но противоположны по знаку (ст. 340); такъ что, если корни уравненія (1) означимъ бук-

вами n_1 и $-n_2$, то корни (2) будутъ $-n_1$ и n_2. Слѣдовательно n_2 членовъ ряда, начинающагося съ $b-a$ и имѣющихъ общую разность b, составятъ данную сумму s. Послѣдній членъ ряда, начинающійся съ a и простирающійся до n_1 членовъ, будетъ $a+(n_1-1)b$; слѣдовательно намъ нужно доказать, что если, начиная съ этого члена, отсчитаемъ назадъ n_2 членовъ, то придемъ къ члену $b-a$. Это сводится къ доказательству, что

$$a+(n_1-1)b-(n_2-1)b=b-a;$$

то-есть, что

$$a+(n_1-n_2)b=b-a.$$

Но

$$n_1-n_2=-\frac{2a-b}{b}, \text{ (ст. 335);}$$

слѣдовательно

$$a+(n_1-n_2)b=a-(2a-b)=b-a.$$

457. Въ связи съ *цѣлымъ отрицательнымъ* значеніемъ n можно обратить вниманіе на другое еще обстоятельство.

Пусть $-n_1$ будетъ цѣлое отрицательное значеніе n, удовлетворяющее уравненію

$$s=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\};$$

тогда

$$s=-\frac{n_1}{2}\{2a+n_1b-b\}.$$

Слѣдовательно

$$-s=\frac{n_1}{2}\{2(a-b)+(n_1-1)(-b)\}.$$

Это показываетъ, что если мы отсчитаемъ *назадъ* n_1 членовъ, начиная съ $a-b$, то полученная сумма будетъ равна $-s$.

Напримѣръ, если возьмемъ случай ст 456, то отсчитавъ назадъ шесть членовъ, начиная съ 2, мы получимъ

$$2+0-2-4-6-8,$$

то-есть -18.

458. Впрочемъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ только одно изъ значеній n, найденныхъ въ ст. 454, будетъ цѣлымъ числомъ. Положимъ $a=11$, $b=-3$, $s=24$; мы получимъ $n=3$ или $5\frac{1}{3}$. Послѣднее значеніе заставляетъ насъ предугадывать, что изъ двухъ чиселъ 5 и 6 одно будетъ соотвѣтствовать суммѣ *большей* чѣмъ 24, а другое—суммѣ *меньшей* чѣмъ 24. Дѣйствительно, сумма 5 членовъ будетъ 25, а сумма 6 членовъ 21.

По поводу дробнаго значенія n мы можемъ указать еще на слѣдующее обстоятельство:

Положимъ, что $\frac{p}{q}$ есть дробное значеніе n, удовлетворяющее уравненію

$$s=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\};$$

тогда $$s=\frac{p}{2q}\left\{2a+\left(\frac{p}{q}-1\right)b\right\}=\frac{p}{2}\left\{\frac{2a}{q}+\frac{pb}{q^2}-\frac{b}{q}\right\}$$

$$=\frac{p}{2}\left\{\frac{2a}{q}-\frac{b}{q}+\frac{b}{q^2}+(p-1)\frac{b}{q^2}\right\}=\frac{p}{2}\left\{2\left(\frac{a}{q}-\frac{b}{2q}+\frac{b}{2q^2}\right)+(p-1)\frac{b}{q^2}\right\}.$$

Это показываетъ, что s равно суммѣ p членовъ ариѳметической прогрессіи, въ которой первый членъ есть $\frac{a}{q}-\frac{b}{2q}+\frac{b}{2q^2}$, а разность будетъ $\frac{b}{q^2}$.

Въ данномъ выше примѣрѣ $\frac{p}{q}=5\frac{1}{3}=\frac{16}{3}$; такъ что $p=16$ и $q=3$. А потому

$$\frac{a}{q}-\frac{b}{2q}+\frac{b}{2q^2}=\frac{11}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=4,\quad \frac{b}{q^2}=-\frac{1}{3};$$

такимъ образомъ 24 есть сумма 16 членовъ ариѳметической прогрессіи, въ которой первый членъ есть 4, а разность $-\frac{1}{3}$.

459. Заслуживаютъ вниманія выводы, получаемые въ слѣдующихъ простыхъ задачахъ:

Найти сумму n *членовъ ряда* 1, 2, 3, 4, ...

Здѣсь n-ый членъ есть n; такимъ образомъ, по ст. 450,

$$s=\frac{n}{2}(n+1).$$

Найти сумму n *членовъ ряда* 1, 3, 5, 7...

Здѣсь $a=1$, $b=2$; итакъ, по ст. 450,

$$s=\frac{n}{2}\{2+2(n-1)\}=\frac{n}{2}\times 2n=n^2.$$

Прибавимъ къ этому еще два подобныхъ-же вопроса, приводящихъ къ важнымъ результатамъ, хотя они и не очень тѣсно связаны съ настоящимъ предметомъ.

460. *Найти сумму квадратовъ первыхъ* n *натуральныхъ чиселъ.*

Означимъ буквой s искомую сумму; тогда

$$s=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2,$$

и мы докажемъ, что $$s=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Мы имѣемъ

$$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1,$$
$$(n-1)^3-(n-2)^3=3(n-1)^2-3(n-1)+1,$$
$$(n-2)^3-(n-3)^3=3(n-2)^2-3(n-2)+1,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$3^3 - 2^3 = 3.3^2 - 3.3 + 1$$
$$2^3 - 1^3 = 3.2^2 - 3.2 + 1$$
$$1^3 - 0^3 = 3.1^2 - 3.1 + 1.$$

Отсюда, сложивъ эти равенства, находимъ

$$n^3 = 3\{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\} - 3\{1 + 2 + 3 + \ldots + n\} + n,$$

то-есть
$$n^3 = 3s - \frac{3n(n+1)}{2} + n.$$

Слѣдовательно
$$3s = n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

и значитъ
$$s = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3}.$$

461. *Найти сумму кубовъ первыхъ* n *натуральныхъ чиселъ.*

Означимъ буквой s искомую сумму; тогда

$$s = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3,$$

и мы докажемъ, что
$$s = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$$

Мы имѣемъ

$$n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1,$$
$$(n-1)^4 - (n-2)^4 = 4(n-1)^3 - 6(n-1)^2 + 4(n-1) - 1,$$
$$(n-2)^4 - (n-3)^4 = 4(n-2)^3 - 6(n-2)^2 + 4(n-2) - 1,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$3^4 - 2^4 = 4.3^3 - 6.3^2 + 4.3 - 1$$
$$2^4 - 1^4 = 4.2^3 - 6.2^2 + 4.2 - 1$$
$$1^4 - 0^4 = 4.1^3 - 6.1^2 + 4.1 - 1.$$

Отсюда сложеніемъ находимъ

$$n^4 = 4\{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3\} - 6\{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\}$$
$$+ 4\{1 + 2 + 3 + \ldots + n\} - n,$$

то-есть
$$n^4 = 4s - n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) - n.$$

Слѣдовательно
$$4s = n^4 + 2n^3 + n^2,$$

и
$$s = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$$

Такимъ образомъ, на основаніи ст. 459, мы получимъ слѣдующій выводъ: *сумма кубовъ первыхъ* n *натуральныхъ чиселъ равна квадрату суммы этихъ чиселъ.*

Примѣры ариѳметической прогрессіи.

1. Найти сумму 20 членовъ 2, 6, 10, 14, ...

2. Найти сумму 32 членовъ $4, \frac{15}{4}, \frac{7}{2}, \frac{13}{4}$.

3. Найти сумму 24 членовъ $\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -2, \ldots$

4. Найти сумму 20 членовъ $5, \frac{13}{5}, \frac{11}{3}, \ldots$

5. Найти сумму 10 членовъ $1^3/_5, 1^1/_5, \frac{4}{5}, \ldots$

6. Найти сумму 12 членовъ $1, 1^3/_4, 2^1/_2, \ldots$

7. Найти сумму 21 члена $\frac{5}{7}, \frac{2}{3}, \frac{13}{21}, \ldots$

8. Найти сумму 50 членовъ $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \ldots$

9. Найти сумму 30 членовъ 116, 108, 100, ...

10. Найти сумму n членовъ 9, 11, 13, 15, ...

11. Найти сумму n членовъ $1, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \ldots$

12. Найти такую ариѳмет. прогр., чтобы сумма первыхъ пяти членовъ составляла одну четверть суммы слѣдующихъ пяти членовъ и чтобы первый членъ ея былъ единица.

13. Если первый членъ ряда равенъ 2, а пятый равенъ 7, то найти, сколько членовъ нужно взять, чтобы сумма могла быть 63.

14. Дано $a=16$, $b=4$, $s=88$; найти n.

15. Если сумма m членовъ нѣкоторой ариѳм. прогр. къ суммѣ n ея членовъ находится въ постоянномъ отношеніи m^2 къ n^2, а первый членъ ея единица, то найти n-ый членъ.

16. Сумма извѣстаго числа членовъ ряда $21+19+17+\ldots$ равняется 120; найти послѣдній членъ и число членовъ ряда.

17. Найти разность, зная, что первый членъ есть 1, послѣдній 50, а сумма 204.

18. Вставить 6 среднихъ ариѳметическихъ между 1 и 29.

19. Если взять $2n+1$ членовъ ряда 1, 3, 5, 7, 9, ..., то сумма членовъ, взятыхъ чрезъ одинъ: 1, 5, 9, ... будетъ относиться къ суммѣ остальныхъ членовъ: 3, 7, 11, ... какъ $n+1$ къ n.

20. Найти сумму первыхъ n чиселъ вида $4r+1$.

21. Найти, сколько членовъ ряда $1+3+5+7\ldots$ составятъ число 1234321.

22. Найти, сколько членовъ ряда $16+24+32+40+\ldots$ составятъ число 1840.

23. На землѣ лежитъ n камней; разстояніе между первымъ и вторымъ одинъ аршинъ, между вторымъ и третьимъ три аршина, между третьимъ и четвертымъ пять аршинъ, и такъ далѣе. Сколько нужно людей, чтобы собрать всѣ камни въ корзину, стоящую у перваго камня, если каждый принесетъ по одному камню?

24. Члены 14-й, 134-й и послѣдній въ ариѳм. прогр. соотвѣтственно равны 66, 666 и 6666; найти первый членъ и число членовъ.

25. Найти рядъ среднихъ ариѳметическихъ между 1 и 21, такихъ, чтобы сумма ихъ относилась къ суммѣ двухъ наибольшихъ изъ нихъ, какъ 11 къ 4.

26. Сумма членовъ ариѳм. прогрессіи равна $28^1/_2$, первый членъ ея -12, а общая разность $^3/_2$. Найти число членовъ.

27. Найти, сколько членовъ ряда 3, 4, 5 ... должно взять, чтобы составить 25.

28. Найти, сколько членовъ ряда 5, 4, 3, ... должно взять, чтобы составить 14.

29. Показать, что можно найти извѣстное число членовъ ариѳм. прогрессіи, алгебраическая сумма которыхъ равна нулю, если только удвоенный первый членъ дѣлится на разность, а восходящій или нисходящій рядъ, смотря по тому, что считать за первый членъ, будетъ отрицательнымъ, или положительнымъ.

30. Если m-ый членъ ариѳм прогр. будетъ n, а n-ый членъ m, то сколько членовъ составятъ сумму $\frac{1}{2}(m+n)(m+n-1)$ и какой будетъ послѣдній изъ нихъ?

31. Если $s=72$; $a=24$, $b=-4$, то найти n.

32. Если $s=pn+qn^2$, какое-бы ни было значеніе n, то найти m-ый членъ.

33. Если S_a представляетъ сумму n натуральныхъ чиселъ, начиная съ a, то доказать, что $S_{3a+n-1}=3S_a$.

34. Доказать, что квадраты величинъ x^2-2x-1, x^2+1 и x^2+2x-1 составляютъ ариѳметическую прогрессію.

35. Разность ариѳм. прогрессіи равна разности квадратовъ перваго и послѣдняго членовъ, раздѣленной на удвоенную сумму всѣхъ членовъ безъ перваго и послѣдняго.

36. Сумма m членовъ ариѳм. прогрессіи равна n, а сумма n членовъ съ тѣмъ-же первымъ членомъ и съ тою-же разностью равна m,

Показать, что сумма $m+n$ членовъ есть $-(m+n)$ и что сумма $m-n$ членовъ равна $(m-n)\left(1+\frac{2n}{m}\right)$.

37. Найти число среднихъ ариѳметическихъ между 1 и 19, если второй изъ среднихъ относится къ первому какъ 1 къ 6.

38. Сколько членовъ натуральнаго ряда чиселъ, начиная съ 4 дадутъ въ суммѣ 5350?

39. Въ ряду, состоящемъ изъ нечетнаго числа членовъ, сумма членовъ нечетныхъ (перваго, третьяго и т. д.) равна 44, а сумма четныхъ членовъ (второго, четвертаго и т. д.) равна 33. Найти средній членъ и число членовъ.

40. Если a^2, b^2, c^2 составляютъ ариѳметическую прогрессію, тогда $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ то-же составятъ ариѳметическую прогрессію.

41. Найти сумму n членовъ ряда, въ которомъ r-ый членъ есть $2r-1$.

42. Найти сумму n членовъ $1-3+5-7+\ldots$

43. Найти сумму n членовъ ряда $1-2+3-4+\ldots$

44. Даны p-ый членъ P и q-ый членъ Q въ арим. прогрессіи; выразить сумму n членовъ посредствомъ P, Q, p, q, n.

45. Члены p-ый, q-ый и r-ый ариѳметической прогрессіи соотвѣтственно равны x, y, z; доказать, что если x, y, z будутъ цѣлыми и положительными, то существуетъ ариѳм. прогрессія, въ которой x-ый, y-ый, z-ый члены соотвѣтственно равны p, q, r; и что произведеніе разностей обѣихъ прогрессій равно единицѣ.

46. Внутренніе углы прямолинейной фигуры составляютъ ариѳмет. прогрессію: наименьшій уголъ 120°, разность 5°. Найти число сторонъ.

47. Найти сумму n членовъ $1.2+2.3+3.4+4.5+\ldots$

48. Если второй членъ ариѳм. прогрессіи будетъ среднимъ пропорціональнымъ между первымъ и четвертымъ, то показать, что шестой членъ будетъ среднимъ пропорціональнымъ между четвертымъ и девятымъ.

49. Если $\varphi(n)$ будетъ сумма n членовъ ариѳм. прогрессіи, то найти $\varphi(n)$ въ зависимости отъ n и первыхъ двухъ членовъ.

Показать такъ-же, что $\varphi(n+3)-3\varphi(n+2)+3\varphi(n+1)-\varphi(n)=0$.

50. Найти сумму n членовъ ряда, въ которомъ m-ый членъ $=5-\frac{m}{2}$.

51. Разложить единицу на четыре части, составляющія ариѳметическую прогрессію, въ которой сумма кубовъ была-бы $\frac{1}{10}$.

52. Слуга согласился служить первый мѣсяцъ за извѣстную плату съ условіемъ, чтобы она увеличивалась на четвертакъ въ каждый слѣдующій мѣсяцъ, пока не достигнетъ 15 р. въ мѣсяцъ. По прошествіи перваго изъ мѣсяцевъ, за которые онъ сталъ получать по 15 рублей, онъ нашелъ, что за время его службы онъ получалъ среднимъ числомъ по 12 рублей въ мѣсяцъ. Сколько мѣсяцевъ слуга прослужилъ?

53. A, выѣхавъ изъ извѣстнаго мѣста, проѣзжаетъ по 5 англійскихъ миль въ часъ. B выѣзжаетъ чрезъ $4\frac{1}{2}$ часа послѣ A и ѣдетъ въ томъ-же направленіи со скоростью 3 миль въ первый часъ, $3\frac{1}{2}$ миль во второй часъ, 4 миль въ третій часъ, и такъ далѣе. Найти, чрезъ сколько часовъ B догонитъ A?

54. Нѣсколько человѣкъ наняты для извѣстной работы, которая заняла-бы m часовъ, если-бы они начали ее одновременно; но вмѣсто этого они принимались за нее черезъ равные промежутки и продолжали такъ работать, пока не окончили ее всю. Такъ какъ плата была пропорціональна работѣ, произведенной каждымъ, то первый, принявшійся за работу получилъ въ r разъ больше, чѣмъ послѣдній. Найти, какое время заняла работа?

55. Число, выражающееся тремя цифрами, равно 26-кратной суммѣ его цифръ; при этомъ цифры составляютъ ариѳметическую прогрессію. Если прибавить къ этому числу 396, то цифры его будутъ въ обратномъ порядкѣ. Найти это число.

56. Показать, что сумма всякихъ $2n+1$ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ дѣлится на $2n+1$.

ГЛАВА XXXI.

Геометрическая прогрессія.

462. Говорятъ, что количества составляютъ геометрическую прогрессію, когда каждое изъ нихъ равно произведенію предыдущаго на нѣкоторый постоянный множитель. Постоянный множитель называется *знаменателемъ прогрессіи* или для краткости просто *знаменателемъ*. Такъ слѣдующіе ряды членовъ составляютъ геометрическую прогрессію.

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots$$

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \frac{1}{81},\ \ldots$$

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\ \ldots$$

Въ первомъ примѣрѣ знаменатель 2, во второмъ $\frac{1}{3}$ и въ третьемъ r.

463. Пусть a означаетъ первый членъ геометрической прогрессіи и r—ея знаменатель; тогда второй членъ будетъ ar, третій ar^2, четвертый ar^3, и такъ далѣе. Такимъ образомъ n-ый членъ будетъ ar^{n-1}.

464. *Найти сумму даннаго числа величинъ, составляющихъ геометрическую прогрессію, если извѣстны первый членъ и знаменатель прогрессіи.*

Пусть a означаетъ первый членъ, r знаменатель, n число членовъ, и s сумму членовъ. Тогда

$$s = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1};$$

слѣдовательно $$sr = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n.$$

Отсюда, посредствомъ вычитанія, получаемъ

$$sr - s = ar^n - a;$$

слѣдовательно $$s = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Если l означаетъ послѣдній членъ, то мы имѣемъ

$$l = ar^{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

а слѣдовательно $$s = \frac{rl - a}{r - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Уравненіе (1) даетъ значеніе s посредствомъ величинъ, предполагающихся извѣстными. Уравненіе (3) представляетъ иногда удобный видъ.

465. Значеніе s мы можемъ писать такъ:

$$s = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Положимъ теперь, что r меньше единицы; тогда, чѣмъ больше будетъ n, тѣмъ менѣе будетъ r^n, и беря n достаточно большимъ, мы можемъ сдѣлать r^n какъ угодно малымъ. Если такимъ образомъ n будетъ взято столь большимъ, что величиною r^n въ сравненіи съ единицей можно будетъ пренебречь, то значеніе s приведется къ $\frac{a}{1 - r}$. Этотъ выводъ мы можемъ выразить такимъ образомъ: *При достаточно большомъ* n *сумма* n *членовъ геометрической прогрессіи будетъ отличаться какъ угодно мало отъ* $\frac{a}{1 - r}$. То-же предложеніе иногда сокращенно выражаютъ такъ: *сумма безконечнаго числа членовъ убывающей геометр. прогрессіи равна* $\frac{a}{1 - r}$. Но нужно помнить, что это не болѣе, какъ сокращенное выраженіе предыдущаго предложенія.

Предыдущія замѣчанія предполагаютъ, что r меньше единицы. На будущее время и въ текстѣ, и въ примѣрахъ, когда мы будемъ гово-

рить *о безконечной* геометрической прогрессіи, мы будемъ всегда предполагать, что r меньше единицы.

Примѣнимъ предыдущія замѣчанія къ какому нибудь примѣру. Разсмотримъ рядъ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots$; здѣсь $a=2$, $r=\frac{1}{2}$; такимъ образомъ сумма n членовъ будетъ $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$, то-есть $2-\frac{1}{2^{n-1}}$. Но если взять n достаточно большимъ, то 2^{n-1} можетъ быть сдѣлано какъ угодно большимъ, а слѣдовательно $\frac{1}{2^{n-1}}$ столь малымъ, какъ угодно. Поэтому можно сказать, что *беря* n *достаточно большимъ, мы можемъ достигнуть того, что сумма* n *членовъ ряда будетъ отличаться отъ* 2 *на какую угодно малую величину.* Это сокращенно можно выразить такъ: *сумма безконечнаго числа членовъ этого ряда равна* 2.

466. *Въ геометрической прогрессіи, продолженной до безконечности, каждый членъ находится въ постоянномъ отношеніи къ суммѣ всѣхъ членовъ, слѣдующихъ за нимъ, если предположить, что знаменатель меньше единицы.*

Пусть рядъ будетъ $a+ar+ar^2+ar^3+\ldots$; тогда n-ый членъ его будетъ a^{n-1}; сумма всѣхъ членовъ, слѣдующихъ за нимъ, будетъ

$$ar^n(1+r+r^2+\ldots)=\frac{ar^n}{1-r}.$$

Отношеніе n-аго члена къ суммѣ слѣдующихъ за нимъ будетъ

$$ar^{n-1} : \frac{ar^n}{1-r},$$

то-есть $\frac{1-r}{r}$. А это есть постоянная величина, каково-бы ни было n.

Если мы желаемъ опредѣлить r такъ, чтобы это отношеніе могло имѣть данную величину p, мы должны положить $\frac{1-r}{r}=p$; откуда будетъ слѣдовать, что $r=\frac{1}{1+p}$.

467. Періодическія десятичныя дроби представляютъ собою примѣръ безконечныхъ геометрическихъ прогрессій. Такъ, напримѣръ, 0.2343434... означаетъ собою рядъ

$$\frac{2}{10}+\frac{34}{10^3}+\frac{34}{10^5}+\frac{34}{10^7}+\ldots$$

Здѣсь члены, слѣдующіе за $\frac{2}{10}$, составляютъ геометрическую прогрессію, въ которой первый членъ $\frac{34}{10^3}$, а знаменатель $\frac{1}{10^2}$. Слѣдовательно

мы можемъ сказать, что сумма безконечнаго числа членовъ этого ряда равна $\frac{34}{10^3} : \left\{1 - \frac{1}{10^2}\right\}$, то-есть $\frac{34}{990}$. Поэтому значеніе всей десятичной дроби будетъ $\frac{2}{10} + \frac{34}{990}$. Выведемъ теперь общее правило для подобныхъ примѣровъ.

468. *Найти величину періодической десятичной дроби.*

Пусть P означаетъ неповторяющіяся цифры и положимъ, что ихъ будетъ p; пусть Q означаетъ повторяющіяся цифры и пусть ихъ будетъ q. Пусть s представляетъ значеніе десятичной періодической дроби; тогда

$$s = 0,PQQQ\ldots$$
$$10^p s = P,QQQ\ldots$$
$$10^{p+q} s = PQ,QQQ\ldots$$

вычитая, получимъ

$$(10^{p+q} - 10^p)s = PQ - P.$$

Но $10^{p+q} - 10^p = (10^q - 1)10^p$; а $10^q - 1$, если его выразить цифрами обыкновеннымъ образомъ, будетъ изображаться цифрой 9, повторенной q разъ. Отсюда мы выводимъ обыкновенное правило для обращенія періодической десятичной дроби въ простую: Нужно вычесть цѣлое число, представляемое періодическою частью дроби, изъ цѣлаго числа, представляемаго непріодическою частью съ первымъ періодомъ, и раздѣлить разность на число, изображенное столькими цифрами девять, сколько цифръ въ періодической части, сопровождаемыми столькими нулями, сколько цифръ въ непріодической части.

469. *Вставить данное число среднихъ геометрическихъ между двумя данными членами.*

Пусть a и c будутъ два данные члена, и n число членовъ, которые нужно вставить. Тогда сущность задачи будетъ заключаться въ томъ, чтобы найти $n+2$ члена геометрической прогрессіи съ первымъ членомъ a и послѣднимъ c. Пусть r будетъ знаменатель прогрессіи, тогда $c = ar^{n+1}$, а потому $r = \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$. Отсюда находимъ r, и искомые члены будутъ

$$ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \ldots\ ar^n.$$

470. Въ статьѣ 464 мы имѣли дѣло съ пятью величинами, именно a, r, l, n, s, связанными взаимно данными тамъ уравненіями (1) и (2), или (2) и (3). Поэтому мы могли-бы предложить найти какія нибудь двѣ изъ этихъ пяти величинъ, когда даны три другія; но легко видѣть, что нѣкоторые изъ случаевъ такой задачи окажутся слишкомъ трудными для рѣшенія. Слѣдующіе-же четыре случая не представляютъ

никакой трудности: 1) даны a, r, n; 2) даны a, n, l; 3) даны r, n, l; 4) даны r, n, s.

471. Но положимъ, что будутъ даны a, s, n, а слѣдовательно нужно будетъ найти r и l. Тогда r пришлось-бы находить изъ уравненія

$$s(r-1)=a(r^n-1);$$

мы можемъ раздѣлить обѣ его части на $r-1$, и тогда получимъ уравненіе $n-1$ степени относительно неизвѣстной величины r, которое слѣдовательно не можетъ быть рѣшено по какому нибудь изъ данныхъ до сихъ поръ способовъ, если n будетъ больше 3. Подобныя-же замѣчанія относятся къ случаю, когда даны l, s, n, и когда слѣдовательно нужно найти a и r.

472. Остаются четыре случая задачи, именно тѣ четыре, въ которыхъ одна изъ искомыхъ величинъ есть n. Положимъ, что даны a, r, l, а слѣдовательно нужно найти s и n. Здѣсь n пришлось-бы найти изъ уравненія $l=ar^{n-1}$, въ которое неизвѣстная величина n входитъ показателемъ; до сихъ поръ еще ничего не было сказано о рѣшеніи такихъ уравненій.

473. *Найти сумму* n *членовъ слѣдующаго ряда*:

$$a,\ (a+b)r,\ (a+2b)r^2,\ (a+3b)r^3,\ \ldots$$

Пусть s означаетъ эту сумму; тогда

$$s=a+(a+b)r+(a+2b)r^2+\ldots+(a+\overline{n-1}b)r^{n-1},$$
$$rs=\quad ar+(a+\ b)r^2+\ldots+(a+\overline{n-2}b)r^{n-1}$$
$$+(a+\overline{n-1}b)r^n.$$

Вычтя одно изъ другого, найдемъ

$$s(1-r)=a+br+br^2+\ldots+br^{n-1}-\{a+(n-1)b\}r^n$$
$$=a+\frac{br(1-r^{n-1})}{1-r}-\{a+(n-1)b\}r^n,$$

а слѣдовательно

$$s=\frac{a-\{a+(n-1)b\}r^n}{1-r}+\frac{br(1-r^{n-1})}{(1-r)^2}.$$

Примѣры геометрической прогрессіи.

1. Найти сумму шести членовъ $\frac{8}{5}+\frac{8}{3}+\frac{40}{9}+\ldots$

2. Найти сумму десяти членовъ $2-2^2+2^3-2^4+\ldots$

3. Найти сумму n членовъ $3+2+\frac{4}{3}+\ldots$

4. Найти сумму n членовъ $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\ldots$

5. Найти сумму безконечнаго числа членовъ $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\ldots$

6. Найти безконечную сумму $\frac{4}{3}+1+\frac{3}{4}+\ldots$

7. Найти безконечную сумму $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$

8. Найти безконечную сумму $3+2+\frac{4}{3}+\ldots$

9. Найти безконечную сумму $4+\frac{12}{5}+\frac{36}{25}+\ldots$

10. Найти безконечную сумму $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots$

11. Найти бекзонечную сумму $5-\frac{1}{2}+\frac{1}{20}-\frac{1}{200}+\ldots$

12. Найти безконечную сумму $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$

13. Найти безконечную сумму $\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+\frac{8}{27}-\ldots$

14. Найти безконечную сумму $\frac{1}{5}-\frac{1}{25}+\frac{1}{125}-\ldots$

15. Найти безконечную сумму $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ldots$

16. Найти безконечную сумму $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots$

17. Найти безконечную сумму $\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\ldots$

18. Найти сумму n членовъ $r+2r^2+3r^3+4r^4+\ldots$

19. Найти сумму n членовъ $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\ldots$

20. Найти сумму n членовъ $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\ldots$

21. Найти сумму n членовъ $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\ldots$

22. Найти сумму всякаго числа членовъ геометр. прогрессіи, въ которой даны первый и третій члены.

23. Если знаменатель прогрессіи равенъ —3, то найти знаменатель ряда, который получится, если взять каждый четвертый членъ первоначальнаго ряда.

24. Сумма денегъ въ 700 рублей раздѣлена между четырьмя лицами, доли которыхъ составляютъ геометрическую прогрессію, а разность между наибольшей и наименьшей долями относится къ разности между средними долями какъ 37 къ 12. Найти соотвѣтственныя доли.

25. Найти сумму n членовъ ряда, котораго m-ый членъ $(-1^m)a^{4m}$.

26. Если P будетъ сумма ряда $1+r^p+r^{2p}+r^{3p}+\ldots$ *до безконечн.* а Q—сумма ряда $1+r^q+r^{2q}+r^{3q}+\ldots$ *до безконечности*, то доказать, что $P^q(Q-1)^p=Q^p(P-1)^q$.

27. Показать, что $\sqrt{(0.444\ldots)}=0.666\ldots$

28. Нѣкто, сберегающій ежегодно на половину больше того, сколько онъ сберегъ въ предыдущій годъ, по истеченіи семи лѣтъ скопляетъ 658 р. 88 к. Сколько онъ сберегъ въ первый годъ?

29. Показать, что произведеніе двухъ членовъ геометр. прогрессіи, равно отстоящихъ отъ даннаго члена, всегда будетъ одно и то-же.

30. Показать, что если въ геометрической прогрессіи каждый членъ вычесть изъ слѣдующаго за нимъ, то послѣдовательныя разности составятъ также геометрическую прогрессію.

31. Квадратъ средней ариѳметической изъ двухъ величинъ равенъ средней ариѳметической изъ среднихъ ариѳметической и геометрической квадратовъ этихъ двухъ величинъ.

32. Найти безконечную геометр. прогрессію, въ которой каждый членъ въ десять разъ больше суммы всѣхъ слѣдующихъ за нимъ членовъ.

33. Если S_n представляетъ сумму n членовъ данной геометрической прогрессіи, то найти сумму $S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n$.

34. Если найти n среднихъ геометрическихъ между двумя величинами a и c, то ихъ произведеніе будетъ $(ac)^{\frac{n}{2}}$.

35. Пусть s означаетъ сумму n членовъ ряда a, ar, ar^2, .. пусть также s' означаетъ сумму n членовъ ряда a, ar^{-1}, ar^{-2}, ... и наконецъ пусть l означаетъ послѣдній членъ перваго ряда, тогда будемъ имѣть $as=ls'$.

36. Если a, b, c, d составляютъ геометрическую прогрессію, то $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$.

37. Если a, b, c, d составляютъ геометрическую прогрессію, то $(a-d)^2=(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2$.

38. Сумма первыхъ трехъ членовъ геометр. прогрессіи равна 21, а сумма первыхъ четырехъ членовъ равна 45; найти этотъ рядъ.

39. Найти сумму n членовъ $\left(r-\frac{1}{r}\right)^2+\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)^2+\left(r^3-\frac{1}{r^3}\right)^2+\ldots$

40. Найти сумму n членовъ $5+55+555+\ldots$

41. Доказать, что двѣ величины, изъ которыхъ A средняя ариѳметическая, а G средняя геометрическая, даются формулой

$$A\pm\sqrt{\{(A+G)(A-G)\}}.$$

42. Имѣются четыре числа, изъ которыхъ первыя три находятся въ геометрической, а послѣднія три въ ариѳметической прогрессіи; сумма перваго и послѣдняго равна 14, а сумма второго и третьяго равна 12. Найти эти числа.

43. Три числа, сумма которыхъ равна 15, составляютъ ариѳметическую прогрессію, но если къ нимъ соотвѣтственно прибавить 1, 4 и 19, то полученныя суммы составятъ геометрическую прогрессію. Опредѣлить эти числа.

44. Если a, b, c составляютъ ариѳметическую прогрессію, то доказать, что

$$\frac{2}{9}(a+b+c)^3=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b);$$

если-же они составляютъ геометрическую прогрессію, то доказать, что

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3.$$

45. Найти сумму безконечнаго ряда

$$ar+(a+ab)r^2+(a+ab+ab^2)r^3+\ldots,$$

гдѣ r и br каждое меньше единицы.

ГЛАВА XXXII.

Гармоническая прогрессія.

474. Говорятъ, что величины a, b, c, составляютъ гармоническую прогрессію, когда $a:c=a-b:b-c$.

Всякое число величинъ составятъ гармоническую прогрессію, когда каждыя три послѣдовательныя изъ нихъ составляютъ такую прогрессію.

475. *Величины, обратныя съ величинами, составляющими гармоническую прогрессію, представляютъ ариѳметическую прогрессію.*

Пусть a, b, c составляютъ гармоническую прогрессію;

тогда $$a : c = a - b : b - c;$$

слѣдовательно $$a(b-c) = c(a-b).$$

Раздѣлимъ на abc, тогда будетъ

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a},$$

что и доказываетъ предложеніе.

476. Опредѣленіе, данное въ ст. 474, выражается словами иногда еще такъ: *Три величины составляютъ гармоническую прогрессію, когда первая относится къ третьей, какъ разность первой и второй относится къ разности второй и третьей.* Но нужно замѣтить въ такомъ случаѣ, что разности надо брать *въ томъ-же самомъ порядкѣ*, то-есть, вычитая вторую величину изъ первой и третью изъ второй, или, вычитая первую изъ второй и вторую изъ третьей. И было-бы невѣрно, если-бы вычитать первую изъ второй и третью изъ второй. Опредѣленіе съ помощью символовъ представляетъ преимущества по краткости и точности сравнительно со словеснымъ опредѣленіемъ.

Иногда за опредѣленіе гармонической прогрессіи берутъ свойство ея, доказанное въ ст. 475, выражающееся такъ: *величины составляютъ гармоническую прогрессію, если ихъ обратныя составляютъ прогрессію ариѳметическую.*

Терминъ *гармоническая* прогрессія произошелъ отъ обстоятельства, касающагося музыкальныхъ тоновъ. Возьмемъ рядъ струнъ изъ одного вещества, длины которыхъ пропорціональны числамъ 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, и предположимъ, что эти струны натянуты одинаково. Тогда, если какія нибудь двѣ изъ нихъ будутъ звучать одновременно, то звукъ окажется пріятнымъ для слуха или *гармоничнымъ*.

Здѣсь нѣтъ формулы для суммы какого нибудь числа величинъ, составляющихъ гармоническую прогрессію; но свойство, доказанное въ предыдущей статьѣ, послужитъ намъ для рѣшенія нѣкоторыхъ вопросовъ, относящихся къ гармонической прогрессіи.

477. *Вставить данное число среднихъ гармоническихъ между двумя данными членами.*

Пусть a и c будутъ два данные члена, а n число вставляемыхъ членовъ. Тогда задача будетъ состоять въ томъ, чтобы найти $n+2$ члена гармонической прогрессіи, первый членъ которой a, а послѣдній c. Слѣдовательно задачу эту можно свести къ слѣдующей: *вставить*

n *среднихъ ариѳметическихъ между* $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{c}$. Пусть b означаетъ разность; тогда

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+(n+1)b,$$

слѣдовательно $$b=\frac{a-c}{(n+1)ac}.$$

Ариѳметическая прогрессія будетъ

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{a}+b,\ \frac{1}{a}+2b,\ \ldots\ \frac{1}{a}+nb,\ \frac{1}{c},$$

то-есть

$$\frac{1}{a},\ \frac{c(n+1)+a-c}{ac(n+1)},\ \frac{c(n+1)+2(a-c)}{ac(n+1)},\ \ldots\ \frac{c(n+1)+n(a-c)}{ac(n+1)},\ \frac{1}{c}.$$

Слѣдовательно, гармоническая прогрессія будетъ

$$a,\ \frac{ac(n+1)}{c(n+1)+a-c},\ \frac{ac(n+1)}{c(n+1)+2(a-c)},\ \ldots\ \frac{ac(n+1)}{c(n+1)+n(a-c)},\ c.$$

478. Пусть a и c будутъ какія нибудь двѣ величины; пусть A будетъ ихъ средняя ариѳметическая, G ихъ средняя геометрическая и H ихъ средняя гармоническая; тогда

$A-a=c-A$; слѣдоват. $A=\frac{1}{2}(a+c)$.

$a : G=G : c$; слѣдоват. $G=\sqrt{ac}$.

$$a : c=a-H : H-c;\ \text{слѣдоват.}\ H=\frac{2ac}{a+c}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что $G^2=AH$, а потому

$$A : G=G : H.$$

Такимъ образомъ G по своей величинѣ заключается между A и H, причемъ A больше H, потому что

$$A-H=\frac{1}{2}(a+c)-\frac{2ac}{a+c}=\frac{(a-c)^2}{2(a+c)},$$

то-есть $A-H$ положительная величина.

479. Мы можемъ замѣтить, что три величины a, b, c будутъ составлять ариѳметическую, геометрическую или гармоническую прогрессію, смотря по тому, будетъ ли

$$\frac{a-b}{b-c}\ \text{равняться}\ \frac{a}{a},\ \text{или}\ \frac{a}{b},\ \text{или}\ \frac{a}{c}:$$

Дѣйствительно, въ первомъ случаѣ $\frac{a-b}{b-c}=1$, а потому $b=\frac{1}{2}(a+c)$.

Во второмъ случаѣ $b(a-b)=a(b-c)$, а потому $b=ac$. Третій случай очевиденъ по самому опредѣленію гармонической прогрессіи.

Примѣры гармонической прогрессіи.

1. Продолжить рядъ $3+\frac{6}{5}+\frac{3}{4}$ еще для двухъ членовъ.

2. Вставить 18 среднихъ гармоническихъ между 1 и $\frac{1}{20}$.

3. Найти n-ый членъ гармонич. прогрессіи, въ которой первый и второй члены соотвѣтственно равны a и b.

4. Найти $(p+q)$-й членъ гармонич. прогрессіи, въ которой P есть p-й членъ, а Q есть q-й членъ.

5. Найти, какую величину нужно отнять отъ каждой изъ данныхъ трехъ величинъ, чтобы разности могли составить гармоническую прогрессію.

6. Три величины составляютъ гармоническую прогрессію, а если вычесть изъ каждой изъ нихъ половину средняго члена, то три разности составятъ геометрич. прогрессію.

7. Показать, что b^2 будетъ больше, равно или меньше ac, смотря по тому, будутъ-ли a, b, c составлять ариѳметическую, геометрическую или гармоническую прогрессію.

8. Среднее ариѳметическое изъ двухъ чиселъ равно 3, а среднее гармоническое равно $\frac{8}{3}$; найти эти числа.

9. Среднее геометрическое двухъ чиселъ есть также среднее геометрическое между среднимъ ариѳметическимъ двухъ чиселъ и ихъ среднимъ гармоническимъ. Среднее ариѳметическое *безъ* средняго гармоническаго равно квадрату разности этихъ двухъ чиселъ, раздѣленному на ихъ удвоенную сумму.

10. Если z есть средняя гармоническая между a и b, то

$$\frac{1}{z-a}+\frac{1}{z-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

11. Три числа составляютъ гармоническую прогрессію, причемъ наибольшее изъ нихъ есть произведеніе двухъ другихъ, а если одно изъ нихъ приложить къ каждому изъ нихъ, то наибольшее будетъ суммою двухъ другихъ. Найти эти числа.

12. Сумма двухъ смежныхъ членовъ гармонич. прогрессіи равна $\frac{29}{104}$, а ихъ произведеніе равно $\frac{1}{52}$. Найти этотъ рядъ.

13. Если между двумя числами вставить два среднихъ ариѳметическихъ A_1 и A_2 и два среднихъ гармоническихъ H_1 и H_2, а затѣмъ вставить между A_1 и A_2 одинъ средній гармоническій, а между H_1 и H_2 одинъ средній ариѳметическій, то среднее геометрическое между этими послѣдними равно среднему геометрическому между первоначальными величинами.

14. Среднее ариѳметическое двухъ величинъ x и y есть A; среднее геометрическое G, среднее гармоническое H. Если $A-G=a$ и $A-H=b$, то найти x и y, выраженныя посредствомъ a и b.

15. Если a, b, c составляютъ ариѳметич. прогрессію, α, β, γ гармоническую и $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ геометрическую, то

$$\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{a}{c}+\frac{c}{a}.$$

16. Если a, b, c составляютъ гармонич. прогрессію, то показать, что

$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{4}{c-a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{a}.$$

17. Если a, b, c составляютъ гармоническую прогрессію, то показать, что и $\frac{a}{b+c}$, $\frac{b}{c+a}$, $\frac{c}{a+b}$ будутъ составлять гармоническую прогрессію.

18. Если между двумя величинами a и b вставить n среднихъ ариѳметическихъ и такое-же число среднихъ гармоническихъ, и составить рядъ изъ n членовъ посредствомъ дѣленія каждаго средняго ариѳметическаго на соотвѣтствующее среднее гармоническое, то сумма того ряда равна

$$n\left\{1+\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{(a-b)^2}{6ab}\right\}.$$

19. Нѣкоторое число вида $3a^2-b^2$, гдѣ a больше b, можетъ быть разложено на три другія, составляющія гармоническую прогрессію, сумма квадратовъ которыхъ будетъ равна $3a^4+b^4$.

20. Первая изъ ряда n величинъ, составляющихъ гармоническую прогрессію, есть единица, а сумма произведеній каждыхъ $(n-1)$ членовъ относится къ произведенію всѣхъ членовъ, какъ $2n$ къ 1. Найти прогрессію.

ГЛАВА XXXIII.

Математическая индукція.

480. Въ слѣдующихъ частяхъ этой книги намъ придется пользоваться способомъ доказательства, называемымъ *математическою индукціей*, или *наведеніемъ*. Мы объяснимъ теперь этотъ способъ.

481. Положимъ, что мы дѣлаемъ такое утвержденіе: сумма n членовъ ряда 1, 3, 5, 7... есть n^2. *Мы видимъ*, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ это справедливо; такъ напримѣръ, сумма двухъ членовъ ѳсть

1+3 или 4, т.-е. 2^2; сумма трехъ членовъ есть 1+3+5, то-есть 9 или 3^2; но мы желаемъ доказать, что эта теорема справедлива вообще.

Положимъ, что мы знаемъ справедливость ея для извѣстнаго числа n, т. е. допустимъ, что для этого значенія n мы имѣемъ

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2;$$

прибавимъ къ обѣимъ частямъ по $2n+1$; тогда

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2.$$

Такимъ образомъ, если сумма n членовъ ряда$=n^2$, то сумма $n+1$ члена будетъ $(n+1)^2$. Другими словами, если теорема справедлива, когда мы беремъ извѣстное, какое бы то ни было, число членовъ, то она останется справедливой и тогда, когда мы увеличимъ это число на единицу. Но посредствомъ испытанія мы видѣли, что она справедлива для трехъ членовъ, поэтому она справедлива и для четырехъ членовъ, а когда такъ, то справедлива и для пяти членовъ, и такъ далѣе. Отсюда заключаемъ, что теорема эта справедлива вообще.

482. Возьмемъ теперь другой примѣръ: предложимъ себѣ доказать справедливость слѣдующей формулы:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Мы легко можемъ удостовѣриться посредствомъ испытанія, что формула эта справедлива въ простыхъ случаяхъ; напримѣръ, когда $n=1$, 2 или 3; но мы можемъ доказать ея справедливость вообще.

Допустимъ, что намъ извѣстна справедливость этой теоремы для нѣкотораго значенія n; прибавимъ къ обѣимъ частямъ по $(n+1)^2$; тогда

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2.$$

Но
$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=(n+1)\left\{\frac{n(2n+1)}{6}+n+1\right\}$$
$$=\frac{n+1}{6}\{2n^2+7n+6\}$$
$$=\frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3)=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6},\text{ гдѣ } m=n+1.$$

Такимъ образомъ мы получаемъ ту-же самую формулу для суммы $n+1$ члена ряда 1^2, 2^2, 3^2, ... какая по допущенію справедлива для n членовъ. Другими словами, если формула эта справедлива, когда мы беремъ извѣстное число членовъ, каково-бы это число ни было, то она остается справедливой и тогда, когда это число увеличивается единицею. Но формула *справедлива*, когда взято 3 члена, поэтому она будетъ справедлива и тогда, когда мы возьмемъ 4 члена, а слѣдовательно будетъ справедлива и тогда, когда возьмемъ 5 членовъ, и такъ далѣе. Слѣдовательно формула эта справедлива вообще.

483. Эти двѣ теоремы, доказанныя нами путемъ *индукціи*, могутъ быть доказаны и иначе. Первая теорема есть примѣръ ариѳметической прогрессіи, а вторая доказана нами въ ст. 460. И многія другія теоремы съ удобствомъ допускаютъ доказательство посредствомъ способа наведенія. Напримѣръ теорема ст. 461.

Теоремы, доказанныя въ ст. 69 относительно дѣлимости $x^n \pm a^n$ на $x \pm a$, можно доказать также при помощи наведенія. Дѣйствительно,

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + \frac{a(x^{n-1} - a^{n-1})}{x - a};$$

отсюда слѣдуетъ, что $x^n - a^n$ дѣлится на $x - a$, когда $x^{n-1} - a^{n-1}$ дѣлится на $x - a$. Но мы видимъ, что $x - a$ дѣлится на $x - a$, слѣдовательно и $x^2 - a^2$ дѣлится на $x - a$, а слѣдовательно и $x^3 - a^3$ дѣлится на $x - a$, и такъ далѣе. Отсюда слѣдуетъ, что $x^n - a^n$ всегда дѣлится на $x - a$, если n положительное цѣлое число. Подобнымъ-же образомъ можно доказать и другіе случаи. Въ видѣ другого примѣра учащійся можетъ разсмотрѣть теоремы статьи 225.

484. Способъ математическаго наведенія можно опредѣлить такъ: Мы доказываемъ, что если извѣстная теорема вѣрна въ одномъ случаѣ, каковъ-бы этотъ случай ни былъ, то она справедлива такъ-же и въ другомъ случаѣ, который мы назовемъ *ближайшимъ*; посредствомъ испытанія мы доказываемъ, что эта теорема вѣрна въ извѣстномъ случаѣ; отсюда слѣдуетъ, что она вѣрна въ ближайшемъ случаѣ, а отсюда—что она вѣрна въ ближайшемъ къ этому случаѣ, и такъ далѣе. Слѣдовательно, она должна быть вѣрна въ каждомъ случаѣ, слѣдующемъ за только-что разсмотрѣннымъ.

485. Возможно, что этотъ способъ доказательства покажется для читателя менѣе удовлетворительнымъ, чѣмъ большинство предыдущихъ прямыхъ доказательствъ; можетъ-быть ему покажется, что онъ скорѣе принужденъ принять доказанныя такимъ образомъ предложенія на вѣру, чѣмъ убѣдиться, на какомъ основаніи они справедливы. Но такъ какъ въ извѣстныхъ случаяхъ это—единственный способъ доказательства, какимъ можно воспользоваться, то читатель долженъ привыкнуть къ нему и не пропускать его, если онъ встрѣтится, пока не будетъ наконецъ удовлетворенъ его основательностью.

486. Замѣтимъ здѣсь, что читатель, изучающій естеств. философію, найдетъ, что слово *индукція* употребляется тамъ въ другомъ смыслѣ; это слово усвояется тамъ допущенію или предположенію, что извѣстный законъ, найденный справедливымъ въ извѣстныхъ изслѣдованныхъ случаяхъ, справедливъ вообще. Но здѣсь мы не можемъ быть увѣрены, что законъ справедливъ для какихъ нибудь случаевъ, исключая тѣхъ, какіе мы изслѣдовали, и никогда не можемъ придти къ заключенію, что онъ *необходимо* вѣренъ. Индукція, какъ она понимается въ естествен-

ныхъ наукахъ, въ сущности никогда не можетъ быть безусловно доказательной и очень далека отъ этого; между тѣмъ какъ способъ *математической индукціи* столь-же строгъ, какъ и другіе математическіе пріемы доказательства.

Разные примѣры.

1. Перевести число 221.342 съ десятеричной системы счисленія на пятеричную.

2. Если основаніе системы счисленія будетъ $4m+2$, то квадратъ всякаго числа, послѣдняя цифра котораго будетъ $2m+1$ или $2m+2$, будетъ оканчиваться тою-же цифрою.

3. Одна и та-же цифра написана одинъ, два, три, ...n разъ, такъ что получилось n чиселъ — однозначное, двухзначное ... n-значное. Если означимъ чрезъ a первое, чрезъ b послѣднее изъ чиселъ и чрезъ r основаніе системы, то сумма всѣхъ чиселъ будетъ $\frac{rb-na}{r-1}$.

4. Если m и n будутъ какія нибудь два числа, g ихъ среднее геометрическое, a_1 и h_1 среднее ариѳметическое и среднее гармоническое между m и g, а a_2 и h_2 среднее ариѳметическое и среднее гармоническое между g и n, то доказать, что $a_1h_2=g^2=a_2h_1$.

5. Если между b и a вставлено n среднихъ ариѳметическихъ, а между a и b вставлено n среднихъ гармоническихъ, то сумма ряда, составленнаго изъ произведеній соотвѣтственныхъ множителей двухъ рядовъ, равна $(n+2)ab$.

6. Если между двумя положительными величинами a и b вставлено n среднихъ гармоническихъ, то показать, что отношеніе разности между первымъ и послѣднимъ къ разности между a и b меньше, чѣмъ отношеніе $n-1$ къ $n+1$.

7. A выѣзжаетъ изъ извѣстнаго мѣста и въ первый день проѣзжаетъ одну версту, во второй день двѣ версты, въ третій — три версты, въ четвертый — четыре версты, и такъ далѣе. B выѣзжаетъ изъ того-же мѣста пятью днями позднѣе, чѣмъ A и ѣдетъ по той-же дорогѣ со скоростью 12 верстъ въ день. Сколько верстъ проѣдетъ A, прежде чѣмъ догонитъ его B?

8. Въ сосудѣ содержалось 256 штофовъ вина; изъ него была отлита часть вина и замѣнена водой и это было сдѣлано во второй, третій и четвертый разъ, такъ что въ сосудѣ осталось вина только 81 штофъ. По скольку штофовъ отливали каждый разъ?

9. A и B бьются объ закладъ, причемъ размѣръ ихъ ставокъ составляетъ 90 рублей, а сумма, поставленная каждымъ, обратно пропорціональна количеству денегъ у того и другого. Если выиграетъ A,

то онъ будетъ тогда имѣть въ пять разъ больше, чѣмъ останется у B; если-же выиграетъ B, то онъ будетъ имѣть вдвое больше, чѣмъ останется у A. Сколько денегъ у каждаго?

10. Если $(a+b+c)(a+b+d)=(c+d+a)(c+d+b)$, то доказать, что каждое изъ этихъ количествъ равно

$$\frac{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}{(a+b-c-d)^2}.$$

11. Если корни уравненія $ax^2+2bx+c=0$ будутъ возможны и различны между собою, то корни уравненія

$$(a+c)(ax^2+2bx+c)=2(ac-b^2)(x^2+1)$$

будутъ невозможны; и наоборотъ.

12. Если $a+b+c=0$ и $x+y+z+w=0$, то два уравненія $\sqrt{(ax)}+\sqrt{(by)}+\sqrt{(cz)}=0$ и $\sqrt{(bx)}-\sqrt{(ay)}+\sqrt{(cw)}=0$ возможно будетъ вывести одно изъ другого.

ГЛАВА XXXIV.

Перестановки и сочетанія.

487. Различнаго рода послѣдовательности, въ какихъ могутъ быть размѣщены извѣстные предметы, называются ихъ *размѣщеніями* или *перестановками*.

Такъ, изъ буквъ a, b, c, беря ихъ по двѣ, мы можемъ составить слѣдующія перестановки ab, ba, ac, ca, bc, cb.

488. *Сочетаніями* называются такія соединенія предметовъ, какія можно составить изъ нихъ, не обращая вниманія на порядокъ, въ которомъ они слѣдуютъ.

Такъ, изъ буквъ a, b, c, беря ихъ по двѣ, мы можемъ составить сочетанія ab, ac, bc; такъ что ab и ba, составляющія двѣ различныя *перестановки*, представляютъ одно и то-же *сочетаніе*.

489. Нужно замѣтить, что въ разныхъ книгахъ встрѣчается нѣкоторое различіе въ опредѣленіи различныхъ соединеній; то, что мы назвали *перестановками*, нѣкоторые писатели называютъ *размѣщеніями*, а терминъ *перестановки* употребляютъ лишь въ томъ случаѣ, когда берутся каждый разъ *всѣ* элементы; такъ, когда изъ четырехъ буквъ дѣлаются соединенія по двѣ, или по три, то это называютъ *размѣщеніями*; когда-же берутся всѣ четыре буквы каждый разъ, то это называютъ *перестановками*.

*

490. *Найти число перестановокъ изъ* n *элементовъ, взятыхъ по* r.

Положимъ, что это будутъ n буквъ a, b, c, d, ...; найдемъ сперва число перестановокъ по двѣ буквы. Поставимъ букву a предъ каждой изъ остальныхъ; тогда мы получимъ $n-1$ перестановокъ, начинающихся съ буквы a. Затѣмъ поставимъ b предъ каждою изъ остальныхъ буквъ; тогда мы получимъ $n-1$ перестановокъ, начинающихся съ буквы b. Подобнымъ-же образомъ будетъ $n-1$ перестановокъ, начинающихся съ буквы c, и такъ далѣе. Итакъ, изъ n буквъ, взятыхъ по двѣ каждый разъ, составится $n(n-1)$ перестановокъ.

Найдемъ теперь число перестановокъ изъ n буквъ, беря ихъ каждый разъ по три. Мы уже показали, что изъ n буквъ можно составить $n(n-1)$ перестановокъ по двѣ буквы въ каждой; слѣдовательно изъ $n-1$ буквъ b, c, d, .. мы можемъ составить $(n-1)(n-2)$ перестановокъ по двѣ буквы. Поставимъ теперь a предъ каждой изъ послѣднихъ перестановокъ; тогда мы получимъ $(n-1)(n-2)$ перестановокъ, по три буквы въ каждой, причемъ на первомъ мѣстѣ стоитъ буква a. Подобно этому получимъ $(n-1)(n-2)$ перестановокъ изъ трехъ буквъ, начинающихся съ буквы b; точно также найдемъ $(n-1)(n-2)$ перестановокъ, начинающихся съ буквы c; и такъ далѣе. Такимъ образомъ, все число перестановокъ изъ n буквъ, по три въ каждой перестановкѣ, будетъ $n(n-1)(n-2)$.

На основаніи разобранныхъ случаевъ можно *догадываться*, что число перестановокъ изъ n буквъ по r будетъ

$$n(n-1)(n-2)....(n-r+1),$$

и намъ остается доказать, что это дѣйствительно такъ. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что число перестановокъ изъ n буквъ, взятыхъ по $r-1$, будетъ

$$n(n-1)(n-2)....\{n-(r-1)+1\},$$

и докажемъ, что подобное-же выраженіе дастъ число перестановокъ изъ тѣхъ же буквъ, взятыхъ по r. Дѣйствительно, изъ $n-1$ буквъ b, c, d, ... мы можемъ составить

$$(n-1)(n-2)....\{n-1-(r-1)+1\}$$

перестановокъ, въ каждой по $r-1$ буквъ; поставимъ предъ каждой изъ нихъ букву a; мы получимъ столько-же перестановокъ—каждая изъ r буквъ—начинающихся съ буквы a. Подобнымъ образомъ мы найдемъ столько-же перестановокъ, начинающихся съ буквы b, столько-же—начинающихся съ буквы c, и такъ далѣе. Такимъ образомъ все число перестановокъ изъ n буквъ, взятыхъ по r будетъ

$$n(n-1)(n-2)....(n-r+1).$$

Итакъ, если формула справедлива, когда берется по $r-1$ буквъ, то она остается таковою-же и тогда, когда берется по r буквъ; но было

доказано, что она справедлива, когда берется по три буквы, поэтому она будетъ справедлива, когда будемъ брать по четыре буквы, а слѣдовательно будетъ справедливой и тогда, когда будемъ брать по пяти буквъ; и такъ далѣе. Такимъ образомъ формула эта справедлива вообще.

491. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что число перестановокъ изъ n элементовъ, когда они каждый разъ берутся всѣ, будетъ

$$n(n-1)(n-2)...3.2.1$$

Для краткости выраженіе $n(n-1)(n-2)....2.1$ часто замѣняется знакоположеніемъ $\underline{|n}$; такимъ образомъ $\underline{|n}$ означаетъ произведеніе натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n включительно. Символъ $\underline{|n}$ можно читать: *факторіалъ n*.

492. Формула для числа перестановокъ изъ n элементовъ, взятыхъ по r, можетъ быть получена еще другимъ образомъ.

Пусть P означаетъ число перестановокъ изъ n буквъ, взятыхъ по $r-1$. Составить перестановки изъ n буквъ, взятыхъ по r, можно слѣдующимъ образомъ: Возьмемъ какую нибудь одну изъ P перестановокъ и присоединимъ къ концу ея какую нибудь одну изъ тѣхъ $n-r+1$ буквъ, которыя въ ней не заключаются. Такимъ образомъ все число перестановокъ изъ n буквъ, взятыхъ по r, будетъ $(n-r+1)P$.

Но число перестановокъ изъ n буквъ, взятыхъ по одной, будетъ n; слѣдовательно число перестановокъ изъ тѣхъ-же буквъ, взятыхъ по двѣ будетъ $n(n-1)$, а слѣдовательно число—взятыхъ по три будетъ $n(n-1)(n-2)$; и такъ далѣе.

493. Всякое сочетаніе изъ r элементовъ произведетъ $\underline{|r}$ перестановокъ, потому что, по ст. 491, r элементовъ, составляющихъ данное сочетаніе, могутъ быть размѣщены $\underline{|r}$ различными способами.

494. *Найти число сочетаній изъ* n *элементовъ, берущихся каждый разъ по* r.

Число сочетаній изъ n элементовъ по r будетъ

$$\frac{n(n-1)(n-2)....(n-r+1)}{\underline{|r}}.$$

Дѣйствительно, число перестановокъ изъ n элементовъ, взятыхъ по r, по ст. 490, будетъ

$$n(n-1)(n-2)....(n-r+1),$$

а каждое сочетаніе дастъ $\underline{|r}$ перестановокъ по ст. 493; слѣдовательно, число сочетаній должно быть

$$\frac{n(n-1)(n-2)... (n-r+1)}{\underline{|r}}.$$

Если помножимъ числителя и знаменателя этого выраженія на $\underline{|n-r}$, то оно обратится въ $\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r}}$.

495. *Число сочетаній изъ* n *элементовъ, взятыхъ по* r, *то-же самое, что и число ихъ, взятыхъ по* n—r.

Число сочетаній изъ n элементовъ, взятыхъ по $n-r$, будетъ

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\{n-(n-r)+1\}}{\underline{|n-r}};$$

то-есть

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(r+1)}{\underline{|n-r}}.$$

Умножимъ числителя и знаменателя на $\underline{|r}$; тогда получимъ $\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r}}$, что, по ст. 494, представляетъ число сочетаній изъ n элементовъ, взятыхъ по r.

Доказанное такимъ образомъ предложеніе будетъ совершенно очевиднымъ, если мы замѣтимъ, что при каждомъ сочетаніи r элементовъ, которые мы выбираемъ изъ n, остается невзятымъ сочетаніе $n-r$ элементовъ. Слѣдовательно, каждое сочетаніе r элементовъ соотвѣтствуетъ сочетанію $n-r$ элементовъ, содержащему въ себѣ остальные элементы. Такія сочетанія называются *дополнительными*.

496. *Найти, для какого значенія* r *число сочетаній изъ* n *элементовъ по* r *будетъ наибольшимъ.*

Пусть $(n)_r$ означаетъ число сочетаній изъ n элементовъ, взятыхъ по r, $(n)_{r-1}$ — число сочетаній изъ n элементовъ, взятыхъ по $r-1$; тогда

$$(n)_r = \frac{n-r+1}{r}(n)_{r-1}.$$

Множитель $\dfrac{n-r+1}{r}$ можно писать такъ $\dfrac{n+1}{r}-1$, что показываетъ, что онъ уменьшается по мѣрѣ возрастанія r. Если будемъ давать r послѣдовательныя значенія 1, 2, 3 ..., то число сочетаній будетъ постоянно возрастать, пока $\dfrac{n+1}{r}-1$ будетъ оставаться больше единицы.

Положимъ во-первыхъ, что n четное и равно $=2m$; тогда $\dfrac{2m+1}{r}-1$ будетъ оставаться больше единицы до $r=m$ включительно, а когда $r=m+1$, то этотъ множитель будетъ меньше единицы. Слѣдовательно

наибольшее число сочетаній получится тогда, когда предметы будутъ сочетаться каждый разъ по m, то-есть по $\frac{n}{2}$.

Теперь положимъ, что n нечетное и $=2m+1$; тогда $\frac{2m+1+1}{r}-1$ сдѣлается равно единицѣ, когда $r=m+1$. Слѣдовательно наибольшее число сочетаній получается, когда они берутся или по m, или по $m+1$, такъ какъ въ обоихъ случаяхъ получается одинаковый результатъ, то-есть когда они берутся по $\frac{n-1}{2}$ или по $\frac{n+1}{2}$.

497. *Найти число перестановокъ изъ* n *элементовъ, когда они берутся всѣ и когда не всѣ они различны.*

Пусть мы имѣемъ n буквъ, и предположимъ, что въ числѣ ихъ будетъ p равныхъ a, q равныхъ b, r равныхъ c; остальныя-же пусть будутъ различны между собою. Тогда число перестановокъ изъ нихъ, когда онѣ берутся всѣ, будетъ

$$\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{p}\,\lfloor\underline{q}\,\lfloor\underline{r}}.$$

Дѣйствительно, обозначимъ буквою N искомое число перестановокъ. Если въ одной какой нибудь изъ перестановокъ мы замѣнимъ p буквъ a другими p буквами, отличными отъ остальныхъ, тогда, не измѣняя положенія ни одной изъ остальныхъ буквъ, мы могли-бы изъ каждой отдѣльной перестановки произвести $\lfloor\underline{p}$ различныхъ перестановокъ; такимъ образомъ если буквы a, числомъ p, замѣнятся другими различными p буквами, то все число перестановокъ тогда было-бы $N\times\lfloor\underline{p}$. Подобнымъ образомъ, если буквы b, числомъ q, замѣнены-бы были q новыми буквами, отличными отъ каждой изъ остальныхъ, то все число перестановокъ, которое мы теперь получили-бы, должно-бы было равняться $N\times\lfloor\underline{p}\times\lfloor\underline{q}$; и если r буквъ равныхъ c также перемѣнятся, то все число перестановокъ будетъ $N\times\lfloor\underline{p}\times\lfloor\underline{q}\times\lfloor\underline{r}$. Но это число должно быть равно числу перестановокъ изъ n различныхъ между собою элементовъ, когда они берутся каждый разъ всѣ, то-есть числу $\lfloor\underline{n}$.

Итакъ $$N\times\lfloor\underline{p}\times\lfloor\underline{q}\times\lfloor\underline{r}=\lfloor\underline{n};$$

слѣдовательно $$N=\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{p}\,\lfloor\underline{q}\,\lfloor\underline{r}}.$$

Подобно этому можетъ быть разобранъ и всякій другой случай.

498. Для полученія вывода предыдущей статьи существуетъ другой способъ, очень важный и поучительный для учащагося. Мы объяснимъ его для простоты на одномъ частномъ примѣрѣ, но онъ имѣетъ

совершенно общее значеніе. Положимъ, что намъ дано 10 буквъ, изъ которыхъ двѣ равны a, три равны b и пять равны c; требуется найти число перестановокъ изъ этихъ 10 буквъ, когда онѣ берутся всѣ.

Мы можемъ разсуждать такъ, что у насъ есть 10 мѣстъ, которыя мы должны занять 10-ью буквами. Выберемъ какія нибудь 2 мѣста изъ нихъ и поставимъ на каждое букву a. Это можно сдѣлать $\frac{10.9}{1.2}$ разными способами. Выберемъ теперь 3 изъ остальныхъ 8 мѣстъ и поставимъ на каждое изъ нихъ букву b; это можно сдѣлать $\frac{8.7.6}{1.2.3}$ разными способами. Поставимъ послѣ этого c на каждое изъ остальныхъ 5 мѣстъ; это можетъ быть сдѣлано только однимъ способомъ; и $1 = \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}$. Теперь произведеніе полученныхъ такимъ образомъ результатовъ должно очевидно дать все число перестановокъ, а слѣдовательно число это будетъ $\frac{\lfloor\underline{10}}{\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{3}\,\lfloor\underline{5}}$.

499. Если имѣется n элементовъ, которые не всѣ различны и мы ищемъ число перемѣщеній или сочетаній изъ нихъ, взятыхъ по r, то такое дѣйствіе будетъ очень сложнымъ; поясним этотъ способъ въ слѣдующемъ случаѣ.

Имѣется n *элементовъ, изъ числа которыхъ* p *одинаковы, а остальные неодинаковы; требуется найти число сочетаній изъ нихъ по* r.

Положимъ, что r меньше $n-p$ и пусть $n-p=q$. Разсмотримъ во-первыхъ число сочетаній, которое можно составить, не пользуясь ни однимъ изъ p одинаковыхъ элементовъ; это будетъ число сочетаній изъ q элементовъ по r, то-есть $\frac{\lfloor\underline{q}}{\lfloor\underline{r}\,\lfloor\underline{q-r}}$. Теперь возьмемъ *одинъ* изъ p элементовъ и $r-1$ изъ q элементовъ; число способовъ, которыми могутъ быть составлены эти сочетанія, будетъ то-же самое, какъ и число сочетаній изъ q элементовъ, берущихся въ разъ по $r-1$, то-есть $\frac{\lfloor\underline{q}}{\lfloor\underline{r-1}\,\lfloor\underline{q-r+1}}$. Теперь возьмемъ *два* изъ p элементовъ и сочетаемъ ихъ съ $r-2$ изъ q элементовъ; это можно сдѣлать $\frac{\lfloor\underline{q}}{\lfloor\underline{r-2}\,\lfloor\underline{q-r+2}}$ способами. Продолжая такимъ образомъ и складывая затѣмъ число всѣхъ полученныхъ такимъ путемъ сочетаній, мы найдемъ все число сочетаній.

Но если r не меньше q, то намъ нужно-бы было разсмотрѣть сперва тотъ случай, въ которомъ выбираются $r-q$ элементовъ изъ p равныхъ, и q элементовъ изъ q неравныхъ; это можетъ быть сдѣлано од-

нимъ только путемъ. Теперь выберемъ $r-q+1$ элементовъ изъ p и $q-1$ изъ q элементовъ; это можно сдѣлать q способами. И такъ далѣе.

Если ищется число *перестановокъ*, то нужно замѣтить лишь только то, что каждое сочетаніе изъ r элементовъ, въ которыхъ s одинаковы, а остальные неодинаковы, дастъ по ст. 497, $\frac{|r}{|s}$ перестановокъ, и такимъ образомъ можно будетъ получить все число перестановокъ.

500. Слѣдующимъ способомъ можно найти формулу для числа сочетаній изъ n элементовъ по r, не пользуясь формулой для числа перестановокъ.

Пусть $(n)_r$ означаетъ число сочетаній изъ n элементовъ, взятыхъ по r. Положимъ, что это будутъ n буквъ a, b, c, d, ...; между сочетаніями ихъ по r, число такихъ, которыя содержатъ букву a, очевидно будетъ равно числу сочетаній изъ остальныхъ $n-1$ буквъ, взятыхъ по $r-1$, то-есть изобразится чрезъ $(n-1)_{r-1}$. Число сочетаній, содержащихъ букву b, также будетъ $(n-1)_{r-1}$, и такъ будетъ для каждой изъ буквъ. Но если мы составимъ сперва всѣ сочетанія, содержащія букву a, затѣмъ — всѣ сочетанія, содержащія букву b, и такъ далѣе, то каждое отдѣльное сочетаніе будетъ встрѣчаться r разъ. Дѣйствительно, если $r=3$, напримѣръ, то сочетаніе abc будетъ встрѣчаться и въ числѣ содержащихъ a, и въ числѣ содержащихъ b, и въ числѣ содержащихъ c. Слѣдовательно мы найдемъ, что

$$(n)_r=\frac{n}{r}(n-1)_{r-1}.$$

Въ этой формулѣ перемѣнимъ n и r сперва на $n-1$ и $r-1$ соотвѣтственно, затѣмъ соотвѣтственно на $n-2$ и $r-2$, и такъ далѣе; такимъ образомъ

$$(n-1)_{r-1}=\frac{n-1}{r-1}(n-2)_{r-2},$$

$$(n-2)_{r-2}=\frac{n-2}{r-2}(n-3)_{r-3},$$

. . . . . .

$$(n-r+2)_2=\frac{n-r+2}{2}(n-r+1)_1.$$

Перемножимъ эти равенства и сократимъ равные множители; тогда получимъ

$$(n)_r=\frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)(n-r+1)}{|r}.$$

потому что $(n-r+1)_1=n-r+1$.

501. *Найти все число перестановокъ изъ* n *элементовъ, когда каждый изъ нихъ можетъ встрѣчаться однажды, дважды, трижды ... до* r *разъ.*

Пусть мы имѣемъ n буквъ a, b, c, ... Во-первыхъ будемъ брать ихъ по одной; это дастъ число n. Затѣмъ будемъ брать ихъ по двѣ; при этомъ a можетъ стоять передъ a или передъ какой нибудь изъ остальныхъ буквъ; подобно этому и буква b можетъ стоять предъ b или передъ какой нибудь изъ остальныхъ буквъ; и такъ далѣе. Такимъ образомъ получится n^2 различныхъ перестановокъ буквъ, взятыхъ по двѣ. Подобнымъ-же образомъ, ставя послѣдовательно a, b, c ... предъ каждою перестановкою изъ n буквъ, взятыхъ по двѣ, мы получимъ n^3 перестановокъ буквъ, взятыхъ по три. Итакъ, все число перестановокъ, когда будемъ брать по r буквъ каждый разъ, будетъ n^r.

502. Такъ какъ число сочетаній изъ n элементовъ, взятыхъ по r, должно быть числомъ *цѣлымъ*, то выраженіе

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{\lfloor r}$$

должно представлять нѣкоторое цѣлое число. Итакъ мы видимъ, что произведеніе всякихъ r послѣдовательныхъ чиселъ должно дѣлиться на $\lfloor r$. Мы дадимъ болѣе прямое доказательство этого въ *теоріи чиселъ*.

Примѣры перестановокъ и сочетаній.

1. Сколько различныхъ перестановокъ можно сдѣлать изъ буквъ слова *Caraccas*, беря всѣ буквы вразъ?

2. То-же, изъ буквъ слова *Heliopolis?*

3. То-же, изъ буквъ слова *Ecclesiastical?*

4. То-же, изъ буквъ слова *Mississippi?*

5. Если число перемѣщеній изъ n элементовъ, взятыхъ по 4, равно двѣнадцати-кратному числу перемѣщеній изъ n элементовъ, взятыхъ по 2, то найти n.

6. Сколькими способами могутъ выпасть 2 шестерки, 3 пятерки и 5 троекъ на 10 игральныхъ костяхъ?

7. У торговца двадцать грушъ; на четыре копѣйки онъ даетъ три груши; сколькими разными способами можно выбрать груши, если купить ихъ на двадцать четыре копѣйки? Сколько разъ при этомъ можетъ попасться одна какая нибудь изъ нихъ?

8. Изъ 96 человѣкъ солдатъ нужно выбрать караулъ въ 10 человѣкъ; найти, сколькими способами это можно сдѣлать, чтобы 1) въ это число непремѣнно попалъ извѣстный солдатъ, 2) чтобы тотъ же солдатъ не попалъ въ это число.

9. Сколькими способами можно выбрать 12 человѣкъ изъ общества въ 60 человѣкъ?

10. Если число сочетаній изъ n элементовъ по $r-r'$ равно числу сочетаній изъ n элементовъ по $r+r'$, то найти r.

11. Сколькими способами шесть человѣкъ могутъ занять мѣста за круглымъ столомъ?

12. Сколькими различными способами n человѣкъ могутъ составить изъ себя кругъ?

13. Сколько различныхъ чиселъ можно составить изъ цифръ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, чтобы каждая изъ этихъ цифръ встрѣчалась въ каждомъ изъ этихъ чиселъ только по одному разу? Сколько при томъ-же условіи можно составить чиселъ изъ цифръ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0?

14. Изъ 12 консерваторовъ и 16 прогрессистовъ сколько можно составить различныхъ комитетовъ, чтобы въ каждый попало по 3 консерватора и по 4 прогрессиста?

15. Если n лицамъ нужно раздать x предметовъ, то показать, что n^x будетъ представлять все число разныхъ способовъ, какими можно ихъ раздать.

16. Положимъ, что число сочетаній изъ n предметовъ, взятыхъ по r, равно числу сочетаній, взятыхъ по $r+1$ и что каждое изъ этихъ равныхъ чиселъ относится къ числу сочетаній изъ n предметовъ, взятыхъ по $r-1$, какъ 5 къ 4; найти значеніе n и r.

17. Даны m предметовъ одного рода и n предметовъ другого рода; найти число перестановокъ, которыя можно составить, беря для каждой по r первыхъ и по s вторыхъ предметовъ?

18. Найти, сколько различныхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ удовлетворяютъ условіямъ, чтобы каждое ребро равнялось какой нибудь одной изъ n данныхъ прямыхъ линій различной длины и чтобы никакая изъ граней параллелепипеда не была квадратомъ.

19. Отношеніе числа сочетаній изъ $4n$ элементовъ, взятыхъ по $2n$, къ числу сочетаній изъ $2n$ элементовъ, взятыхъ по n, равняется

$$\frac{1.3.5\ldots(4n-1)}{\{1.3.5\ldots(2n-1)\}^2}.$$

20. Изъ 17 согласныхъ и 5 гласныхъ буквъ сколько можно составить словъ, содержащихъ каждое по двѣ согласныхъ и по одной гласной?

21. Изъ 10 согласныхъ и изъ 4 гласныхъ буквъ сколько можно составить словъ, содержащихъ каждое по 3 согласныхъ и по 2 гласныхъ.

22. Найти число словъ, которыя можно составить изъ 7 буквъ, беря ихъ всѣ, чтобы въ каждомъ словѣ данныя три буквы всегда стояли рядомъ.

23. Сколько сигналовъ можно подать 10 флагами, представляющими 10 чиселъ, чтобы каждый сигналъ представлялъ число и подавался-бы не болѣе какъ 4 флагами?

24. Сколько можно составить словъ, содержащихъ двѣ согласныхъ и одну гласную, изъ 6 согласныхъ и 3 гласныхъ, чтобы гласныя приходились всегда въ срединѣ слова?

25. Сколько словъ по 6 буквъ можно составить изъ 3 гласныхъ и 3 согласныхъ, чтобы гласныя всегда были на четныхъ мѣстахъ?

26. Команда лодки состоитъ изъ 8 человѣкъ, изъ которыхъ трое могутъ грести только на одной сторонѣ, а двое—только на другой. Найти число смѣнъ, которыя можно образовать изъ команды.

27. Оптическій телеграфъ имѣетъ m вѣтвей, изъ которыхъ каждая можетъ принять n различныхъ положеній; найти все число сигналовъ, которое можетъ быть подано этимъ телеграфомъ, предполагая, что для каждаго сигнала употребляются всѣ его вѣтви.

28. Колода картъ состоитъ изъ 52 картъ съ различными изображеніями; сколькими различными способами можно размѣстить эти карты въ четыре ряда, по 13 картъ въ каждомъ?

29. Сколько треугольниковъ можно составить, соединяя вершины десятиугольника, такъ чтобы каждый треугольникъ имѣлъ своими вершинами три изъ вершинъ десятиугольника?

30. На плоскости находится n точекъ, и никакія три изъ нихъ не лежатъ на прямой линіи, за исключеніемъ p точекъ, которыя всѣ приходятся на одной прямой. Найти число *прямыхъ линій*, которыя произойдутъ отъ соединенія этихъ точекъ.

31. Найти число *треугольниковъ*, какое можно составить, соединяя точки въ предыдущей задачѣ.

32. Въ пространствѣ имѣется n точекъ, изъ которыхъ p находятся въ одной плоскости, но нѣтъ никакой другой плоскости, которая-бы содержала болѣе трехъ точекъ. Сколько можетъ быть послѣдняго рода плоскостей?

33. Если n точекъ на плоскости соединить всѣми возможными способами посредствомъ прямыхъ линій неопредѣленной длины, и если никакія двѣ прямыя не будутъ ни совпадающими, ни параллельными и никакія три не будутъ проходить чрезъ одну и ту-же точку (за исключеніемъ n первоначальныхъ точекъ), то число точекъ пересѣченія, исключая n точекъ, будетъ

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}.$$

34. Существуетъ пятнадцать яхтъ-клубовъ; два изъ нихъ имѣютъ по три лодкѣ на рѣкѣ, пять другихъ—по двѣ лодки, а остальные—по

одной; найти выраженіе для числа способовъ, которыми можно составить списокъ этимъ 24 лодкамъ по порядку, чтобы вторая лодка клуба не могла стоять въ спискѣ выше первой.

35. На полкѣ стоитъ 20 книгъ, изъ которыхъ 4 въ одномъ томѣ, а другія состоятъ соотвѣтственно подъ рядъ изъ 8, 5 и 3 томовъ; найти, сколькими способами эти книги можно размѣстить на полкѣ, чтобы рядъ томовъ каждой книги былъ въ надлежащемъ порядкѣ.

36. Найти число перестановокъ буквъ въ англійскомъ словѣ *examination*, если брать по четыре буквы.

37. Найти число сочетаній буквъ, заключающихся въ англійскомъ словѣ *proportion*, если брать по 6 буквъ.

38. Имѣется $n-1$ рядовъ, содержащихъ соотвѣтственно 2α, 3α, ... $n\alpha$ элементовъ; показать, что число сочетаній, которыя можно составить, беря α изъ перваго ряда, 2α — изъ второго, и такъ далѣе для каждаго сочетанія, будетъ

$$\frac{\lfloor n\alpha}{\{\lfloor \alpha\}^n}.$$

39. Найти сумму всѣхъ чиселъ, которыя можно составить изъ всѣхъ цифръ 1, 2, 3, 4, 5 въ десятеричной системѣ.

40. Сумма всѣхъ чиселъ, выражающихся однѣми и тѣми-же цифрами, дѣлится на сумму этихъ цифръ.

ГЛАВА XXXV.

Теорема Ньютона для цѣлаго и положительнаго показателя.

503. Мы уже видѣли, что $(x+a)^2 = x^2+2xa+a^2$ и что $(x+a)^3 = x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$; предметъ настоящей главы состоитъ въ томъ, чтобы найти выраженіе, равное $(x+a)^n$, гдѣ n какое нибудь цѣлое положительное число.

504. Посредствомъ обыкновеннаго умноженія мы получаемъ

$$(x+a_1)(x+a_2) = x^2+(a_1+a_2)x+a_1a_2,$$

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3) = x^3+(a_1+a_2+a_3)x^2 + (a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)x+a_1a_2a_3,$$

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4) = x^4+(a_1+a_2+a_3+a_4)x^3 + (a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4)x^2 + (a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4)x+a_1a_2a_3a_4.$$

Теперь мы видимъ, что въ полученныхъ выводахъ заключаются слѣдующіе законы:

I. Число членовъ правой части однимъ больше числа двучленныхъ множителей, перемножающихся между собою.

II. Показатель у x въ первомъ членѣ равняется числу двучленныхъ множителей, а въ каждомъ изъ слѣдующихъ членовъ показатель этотъ на единицу меньше, чѣмъ въ предыдущемъ.

III. Коэффиціентъ перваго члена есть единица; коэффиціентъ втораго члена равняется суммѣ вторыхъ членовъ двучленныхъ множителей коэффиціентъ третьяго члена равняется суммѣ произведеній вторыхъ членовъ двучленныхъ множителей, взятыхъ по два; коэффиціентъ четвертаго члена равенъ суммѣ произведеній вторыхъ членовъ двучленныхъ множителей, взятыхъ по три, и такъ далѣе; послѣдній членъ есть произведеніе всѣхъ вторыхъ членовъ двучленныхъ множителей.

Докажемъ теперь, что эти законы остаются справедливыми всегда, каково-бы ни было число двучленовъ, перемножающихся между собою. Допустимъ, что законы эти справедливы, когда перемножаются $n-1$ двучленовъ, т.е. допустимъ, что

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_{n-1}) = x^{n-1}+p_1x^{n-2}+p_2x^{n-3}+p_3x^{n-4}+\ldots$$
$$+p_{n-1},$$

гдѣ p_1 = суммѣ членовъ $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$,

p_2 = суммѣ произведеній этихъ членовъ по два,

p_3 = суммѣ произведеній этихъ членовъ по три,

. . . . . .

p_{n-1} = произведенію всѣхъ этихъ членовъ.

Помножимъ обѣ части этого тожества на новый множитель $x+a_n$; тогда получимъ

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n) = x^n+(p_1+a_n)x^{n-1}+(p_2+p_1a_n)x^{n-2}$$
$$+(p_3+p_2a_n)x^{n-3}+\ldots.+p_{n-1}a_n.$$

Но $p_1+a_n = a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n$

= суммѣ всѣхъ членовъ $a_1, a_2, \ldots a_n$,

$p_2+p_1a_n = p_2+a_n(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})$

= суммѣ произведеній всѣхъ членовъ $a_1, a_2, \ldots a_n$, взятыхъ по два.

$p_3+p_2a_n = p_3+a_n(a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3+\ldots.)$

= суммѣ произведеній всѣхъ членовъ $a_1, a_3, \ldots a_n$, взятыхъ по три;

. . . . . .

$p_{n-1}a_n$ = произведенію всѣхъ членовъ $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$.

Слѣдовательно, если упомянутые законы справедливы для $(n-1)$ двучленовъ, перемноженныхъ между собою, то они справедливы и тогда, когда перемножаются n двучленовъ. Но было доказано, что они справедливы при перемноженіи четырехъ двучленовъ, поэтому они справедливы и при перемноженіи пяти двучленовъ, и такъ далѣе; такимъ образомъ они справедливы вообще.

Мы будемъ писать результатъ перемноженія n двучленныхъ множителей, для краткости, такъ

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)=x^n+q_1x^{n-1}+q_2x^{n-2}+q_3x^{n-3}+\ldots+q_n.$$

Число членовъ въ q_1 очевидно n; число членовъ въ q_2 равняется числу сочетаній изъ n буквъ a_1, a_2, ... a_n, взятыхъ по двѣ, то-есть $\frac{n(n-1)}{1.2}$; число членовъ въ q_3 равняется числу сочетаній изъ n буквъ a_1, a_2, ... a_n, взятыхъ по три, то-есть равно $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$; и такъ далѣе. Теперь положимъ, что a_1, a_2, a_3, ... a_n каждое равняется a; тогда q_1 обратится въ na, q_2 обратится въ $\frac{n(n-1)}{1.2}a^2$ и такъ далѣе. Такимъ образомъ мы получимъ

$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3x^{n-3}+$$
$$\ldots.+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}x^2+na^{n-1}x+a^n.$$

Формула эта была открыта Ньютономъ и носитъ названіе *биноміальной теоремы*, *Ньютоновой теоремы* или *Ньютонова бинома*. Правая часть равенства называется разложеніемъ $(x+a)^n$, и когда мы будемъ замѣнять этою строкою выраженіе $(x+a)^n$, то будемъ говорить, что послѣднее выраженіе *разложено* въ рядъ или въ строку.

505. Напримѣръ, возьмемъ $(x+a)^5$; здѣсь $n=5$.

$$\frac{n(n-1)}{1.2}=\frac{5.4}{1.2}=10,\quad \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}=\frac{5.4.3}{1.2.3}=10,$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}=\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}=5.$$

Такимъ образомъ

$$(x+a)^5=x^5+5x^4a+10x^3a^2+10x^2a^3+5xa^4+a^5.$$

Положимъ еще, что требуется найти разложеніе $(c^2+yz)^5$; намъ придется только писать c^2 вмѣсто x, и yz вмѣсто a въ предыдущемъ тожествѣ; такимъ образомъ

$$(c^2+yz)^5=(c^2)^5+5(c^2)^4yz+10(c^2)^3(yz)^2+10(c^2)^2(yz)^3+5c^2(yz)^4+(yz)^5$$
$$=c^{10}+5c^8yz+10c^6y^2z^2+10c^4y^3z^3+5c^2y^4z^4+y^5z^5.$$

Подобнымъ-же образомъ

$$(c^2+2y^2)^5=(c^2)^5+5(c^2)^4 2y^2+10(c^2)^3(2y^2)^2+10(c^2)^2(2y^2)^3$$
$$+5c^2(2y^2)^4+(2y^2)^5$$
$$=c^{10}+10c^8y^2+40c^6y^4+80c^4y^6+80c^2y^8+32y^{10}.$$

506. Биномiальная теорема такъ важна, что читателю слѣдуетъ обратить особенное вниманiе на доказательство ея. Справедливость трехъ законовъ замѣчена была нами при перемноженiи небольшого числа двучленовъ, и мы строго доказали при помощи наведенiя, что законы эти будутъ справедливы, каково бы ни было число двучленныхъ множителей, перемножающихся между собою.

Индуктивное доказательство основывается главнымъ образомъ на слѣдующемъ началѣ: положимъ, что мы составили всѣ сочетанiя изъ $n-1$ буквъ по r и потомъ вводимъ еще новую букву; сочетанiя изъ n буквъ по r состоятъ изъ сочетанiй изъ $n-1$ буквъ по r вмѣстѣ съ сочетанiями, полученными отъ совокупленiя новой буквы со всѣми сочетанiями прежнихъ буквъ по $r-1$. Это начало послѣдовательно прилагается къ случаямъ, когда $r=1$, $r=2$, $r=3$, ... до $r=n-1$.

Но даже и помимо индуктивнаго способа, всеобщая справедливость этихъ законовъ становится очевидной изъ слѣдующаго разсужденiя. Положимъ, что намъ нужно перемножить n двучленныхъ множителей $x+a_1$, $x+a_2$, ... $x+a_n$; когда умноженiе произведено, то каждый членъ въ результатѣ есть произведенiе, составленное такъ, что въ него входитъ *по одной буквѣ отъ каждаго изъ двучленныхъ множителей*. Такимъ образомъ, если мы ищемъ членъ, заключающiй x^{n-2}, то мы должны перемножить вторыя буквы въ какихъ нибудь двухъ двучленахъ и первыя буквы въ остальныхъ $n-2$ двучленахъ; слѣдовательно коэффицiентъ при x^{n-2} долженъ состоять изъ суммы произведенiй каждыхъ двухъ буквъ въ ряду a_1, a_2, a_3, ... a_n; и число такихъ произведенiй будетъ то-же самое, какъ число сочетанiй изъ n буквъ по двѣ. Подобнымъ-же образомъ мы опредѣлимъ коэффицiентъ всякой другой степени x, какъ напримѣръ x^{n-4}.

Биномiальная теорема можетъ быть доказана еще слѣдующимъ образомъ: Путемъ испытанiя мы можемъ провѣрить справедливость этой теоремы для небольшихъ значенiй n, каковы 2, 3, 4; допустимъ по-этому, что

$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3x^{n-3}+\ldots;$$

помножимъ обѣ части на $x+a$; тогда получимъ

$$(x+a)^{n+1}=x^{n+1}+nax^n+\frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-1}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3x^{n-2}+\ldots$$
$$+ax^n+na^2x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a^3x^{n-2}+\ldots.$$

Отсюда, соединяя вмѣстѣ подобные члены, мы получимъ

$$(x+a)^{n+1}=x^{n+1}+(n+1)ax^n+\frac{(n+1)n}{1.2}a^2x^{n-1}$$
$$+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}a^3x^{n-2}+\ldots;$$

то-есть мы получаемъ для $(x+a)^{n+1}$ рядъ такого-же вида, какъ и для $(x+a)^n$, только въ немъ вмѣсто n стоитъ $n+1$. Это показываетъ, что если биномiальная теорема справедлива для какого нибудь показателя, то она будетъ справедлива и тогда, когда показатель увеличится на единицу. Но теорема вѣрна, когда показатель равенъ 4; поэтому она справедлива, когда показатель будетъ 5, а слѣдовательно она справедлива, когда показатель будетъ 6, и такъ далѣе. Такимъ образомъ теорема эта справедлива для всякаго цѣлаго положительнаго показателя.

507. Въ разложенiи $(x+a)^n$ положимъ $x=1$; тогда

$$(1+a)^n=1+na+\frac{n(n-1)}{1.2}a^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3+\ldots.+a^n;$$

такъ какъ это разложенiе справедливо, какое-бы ни было a, то мы можемъ писать x вмѣсто a; тогда

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\ldots.+x^n.$$

Коэффицiентъ второго члена въ разложенiи двучлена $(1+x)^n$ есть n; коэффицiентъ третьяго члена есть $\frac{n(n-1)}{1.2}$; и вообще коэффицiентъ $(r+1)^{\text{-го}}$ члена, равняясь числу сочетанiй изъ n элементовъ по r, будетъ, по ст. 494, равенъ $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{\lfloor r}$; умноживъ числителя и знаменателя на $\lfloor n-r$, мы обратимъ его въ $\frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r}$.

508. *Въ разложенiи* $(1+x)^n$ *коэффицiентъ* r*-аго члена отъ начала равенъ коэффицiенту* r*-аго члена отъ конца.*

Коэффицiентъ при r-номъ членѣ отъ начала равняется

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)}{\lfloor r-1};$$

по умноженiи числителя и знаменателя на $\lfloor n-r+1$ онъ обратится въ

$$\frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \lfloor n-r+1}.$$

Членъ, занимающiй r-ное мѣсто отъ конца, будетъ $(n-r+2)$-мъ членомъ отъ начала, такъ что его коэффицiентъ будетъ

$$\frac{n(n-1)\ldots\{n-(n-r+2)+2\}}{\lfloor\underline{n-r+1}} = \frac{n(n-1)\ldots r}{\lfloor\underline{n-r+1}} \text{ или } \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r-1}\ \lfloor\underline{n-r+1}}.$$

509. Изъ предыдущей статьи видно, что коэффиціентъ при r-омъ членѣ можетъ быть написанъ такъ $\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r-1}\ \lfloor\underline{n-r+1}}$. Если мы примѣнимъ это къ послѣднему члену, для котораго $r=n+1$, то это выраженіе приметъ видъ $\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n}\ \lfloor\underline{0}}$. Символу $\lfloor\underline{0}$ до сихъ поръ мы еще не усвоили никакого смысла; если согласимся разсматривать его разнозначущимъ съ 1, то общее выраженіе останется справедливымъ и для послѣдняго члена.

510. *Найти наибольшій коэффиціентъ въ разложеніи* $(1+x)^n$.

Это уже было изслѣдовано въ главѣ о перестановкахъ и сочетаніяхъ (ст. 496); тамъ было показано, что когда n четное, то наибольшій коэффиціентъ найдется, если въ выраженіе $\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r}\ \lfloor\underline{n-r}}$ вмѣсто r подставить $\frac{n}{2}$; когда-же n нечетное, то наибольшій коэффиціентъ найдется, если подставить въ то-же выраженіе $\frac{n-1}{2}$ или $\frac{n+1}{2}$ вмѣсто r, такъ какъ результатъ въ обоихъ случаяхъ будетъ одинаковъ.

511. *Найти наибольшій членъ въ разложеніи* $(x+a)^n$.

Въ этомъ разложеніи r-ый членъ будетъ

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{\lfloor\underline{r-1}} x^{n-r+1} a^{r-1};$$

слѣдующій $(r+1)$-й членъ можетъ быть полученъ изъ r-аго умноженіемъ послѣдняго на $\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{a}{x}$, то-есть на $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{a}{x}$.

Множитель этотъ уменьшается съ возрастаніемъ r и выраженіе $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{a}{x}$ остается больше единицы, лишь пока $\frac{n+1}{r}-1$ будетъ больше $\frac{x}{a}$, то-есть только пока $\frac{n+1}{r}$ больше чѣмъ $\frac{x}{a}+1$, или пока r меньше чѣмъ $\frac{n+1}{\frac{x}{a}+1}$.

Если $\frac{n+1}{\frac{x}{a}+1}$ будетъ цѣлымъ числомъ, то, означивъ это цѣлое число

буквой p, мы найдемъ, что тогда p-й членъ разложенія *равняется* $(p+1)$-му члену, и эти члены будутъ больше всѣхъ другихъ; но если $\frac{n+1}{\frac{x}{a}+1}$ *не будетъ* цѣлымъ числомъ, тогда наибольшимъ членомъ будетъ $(q+1)$-й членъ, гдѣ q представляетъ цѣлую часть неправильной дроби $\frac{n+1}{\frac{x}{a}+1}$.

512. Такъ какъ въ теоремѣ о разложеніи $(x+a)^n$ величина a можетъ имѣть всякое значеніе, то мы можемъ, если угодно, предположить что она отрицательна; тогда, поставивъ $-c$ вмѣсто a, мы получимъ

$$(x-c)^n = x^n - ncx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}c^2x^{n-2} - \ldots + n(-c)^{n-1}x + (-c)^n.$$

Не трудно замѣтить, что разложеніе какого нибудь двучлена всегда можетъ быть приведено къ случаю, въ которомъ одна изъ двухъ величинъ есть единица. Дѣйствительно

$$(x+a)^n = x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n = x^n(1+y)^n, \text{ если } y = \frac{a}{x};$$

поэтому мы можемъ разложить $(1+y)^n$ и умножить затѣмъ каждый членъ разложенія на x^n; такимъ образомъ и получимъ разложеніе даннаго двучлена $(x+a)^n$.

513. *Найти сумму коэффиціентовъ при членахъ разложенія* $(1+x)^n$.

Теорема $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \ldots + nx^{n-1} + x^n$

вѣрна для всякаго значенія x; положимъ $x=1$; тогда получимъ

$$2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{1.2} + \ldots + n + 1,$$

то-есть, сумма коэффиціентовъ равна 2^n.

514. *Сумма коэффиціентовъ при нечетныхъ членахъ разложенія* $(1+x)^n$ *равна суммѣ коэффиціентовъ при четныхъ членахъ.*

Въ разложеніи $(1+x)^n$ положимъ $x=-1$; тогда будетъ

$$0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots$$

= суммѣ нечетныхъ коэффиціентовъ безъ суммы четныхъ.

Итакъ эти суммы равны, а слѣдовательно, на основаніи предыдущей статьи, каждая изъ нихъ должна быть $= \frac{2^n}{2}$, то-есть 2^{n-1}.

*

515. Выводъ, полученный въ ст. 513, даетъ одну теорему, относящуюся къ сочетаніямъ. Дѣйствительно, положимъ, что мы имѣемъ n предметовъ; тогда мы можемъ ихъ брать по одному n разными способами, можемъ брать по два $\frac{n(n-1)}{1.2}$ разными способами, можемъ брать по три $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ способами, и такъ далѣе. Слѣдовательно по ст. 513 все число способовъ, какими мы можемъ брать n предметовъ будетъ 2^n-1. Эта теорема была получена прежними писателями по Алгебрѣ раньше, чѣмъ стала извѣстной биноміальная теорема Ньютона; доказательство ея представляетъ простой примѣръ приложенія математическаго наведенія, и онъ заслуживаетъ вниманія. Мы должны доказать, что если прибавить единицу ко всему числу способовъ, какими можно брать n предметовъ, то получится 2^n. Положимъ, что мы имѣемъ четыре буквы a, b, c, d; составимъ изъ нихъ всѣ возможныя сочетанія и прибавимъ къ нимъ единицу. Тогда будемъ имѣть

1,
a, b, c, d,
ab, ac, ad, bc, bd, cd,
abc, abd, acd, bcd,
$abcd$.

Здѣсь все число символовъ равняется 16, то-есть 2^4. Прибавимъ теперь еще букву e; соотвѣтствующій рядъ символовъ будетъ состоять изъ символовъ уже данныхъ и изъ тѣхъ, которые можно получить изъ нихъ, присоединяя къ каждому изъ нихъ e. Слѣдовательно число ихъ должно удвоиться, то-есть будетъ 2^5. Этотъ способъ разсужденія является совершенно общимъ и показываетъ, что если теорема справедлива въ случаѣ n элементовъ, то она будетъ справедлива и въ случаѣ $n+1$ элементовъ.

Примѣры разложенія по теоремѣ Ньютона.

1. Написать 3-й членъ разложенія $(a+b)^{15}$.
2. Написать 49-й членъ разложенія $(a-x)^{50}$.
3. Написать 5-й членъ разложенія $(a^2-b^2)^{12}$.
4. Написать 2001-й членъ разложенія $\left(a^{\frac{3}{10}}+x^{\frac{3}{10}}\right)^{2002}$.
5. Написать всѣ члены разложенія $(5-4x)^4$.
6. Написать 5-й членъ разложенія $\left(3x^{\frac{1}{2}}-4y^{\frac{1}{2}}\right)^9$.
7. Написать 6-й членъ разложенія $\left(2a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{2}}\right)^{10}$.

8. Написать всѣ члены разложенія $\left(5-\frac{x}{6}\right)^6$.

9. Написать средній членъ разложенія $(a+x)^{10}$.

10. Написать оба средніе члены разложенія $(a+x)^9$.

11. Разложить $\{a+\sqrt{(a^2-1)}\}^6+\{a-\sqrt{(a^2-1}\}^6$ по степенямъ a.

12. Написать коэффиціентъ при y въ разложеніи $\left(y^2+\frac{c^3}{y}\right)^5$.

13. Если A есть сумма нечетныхъ членовъ, а B сумма четныхъ членовъ въ разложеніи $(x+a)^n$, то доказать, что

$$A^2-B^2=(x^2-a^2)^n.$$

14. Доказать, что разность между коэффиціентами при x^{r+1} и при x^r въ разложеніи $(1+x)^{n+1}$ равна разности между коэффиціентами x^{r+1} и x^{r-1} въ разложеніи $(1+x)^n$.

15. Доказать, что средній членъ въ разложеніи $(1+x)^{2n}$ равняется

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{\lfloor\underline{n}}2^n x^n.$$

16. Найти разложеніе бинома, въ которомъ четыре послѣдовательные члены будутъ 2916, 4860, 4320, 2160.

17. Доказать, что въ разложеніи $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ коэффиціентъ при x^r будетъ $\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{\frac{1}{2}(n-r)}\ \lfloor\underline{\frac{1}{2}(n+r)}}$.

18. Написать коэффиціентъ при x^{2r+1} въ разложеніи $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n+1}$.

19. Найти r-ый членъ отъ начала, r-ый членъ отъ конца и средній членъ разложенія $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$.

20. Если t_0, t_1, t_2, t_3,... представляютъ члены разложенія $(a+x)^n$, то показать, что

$$(t_0-t_2+t_4-\ldots)^2+(t_1-t_3+t_5-\ldots)^2=(a^2+x^2)^n.$$

ГЛАВА XXXVI.

Теорема Ньютона для всякаго показателя.

516. Мы видѣли, что въ случаѣ n цѣлаго и положительнаго

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\ldots$$

Перейдемъ теперь къ доказательству, что это соотношеніе остается справедливымъ, когда n будетъ имѣть какое-бы то ни было положительное или отрицательное, цѣлое или дробное значеніе, то-есть докажемъ справедливость теоремы Ньютона при *всякомъ* показателѣ. Мы сдѣлаемъ нѣкоторыя замѣчанія объ этомъ доказательствѣ, давши сперва его въ въ общеупотребительномъ видѣ.

517. Положимъ, что m и n будутъ *цѣлыя положительныя* числа; тогда мы будемъ имѣть

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)\,m-2)}{\lfloor\underline{3}}x^3+\ldots \quad (1)$$

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor\underline{3}}x^3+\ldots \quad (2)$$

Но $$(1+x)^m \times (1+x^n) = (1+x)^{m+n};$$

слѣдовательно произведеніе рядовъ, составляющихъ правыя части тожествъ (1) и (2), должно равняться $(1+x)^{m+n}$, то-есть

$$1+(m+n)x+\frac{(m+n)(m+n-1)}{1.2}x^2+\frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{\lfloor\underline{3}}x^3+\ldots$$

$$= \left\{1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{\lfloor\underline{3}}x^3+\ldots\right\}$$

$$\times \left\{1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor\underline{3}}x^3+\ldots\right\} \quad (3)$$

Равенство (3) доказано при предположеніи, что m и n цѣлыя и положительныя числа; но произведеніе двухъ рядовъ, находящихся въ правой части равенства (3), должно быть *того-же вида*, каковы-бы ни были m и n; поэтому мы заключаемъ, что уравненіе (3) должно быть справедливымъ каковы-бы m и n ни были. Введемъ теперь обозначеніе, которое позволитъ намъ выражать свойство (3) короче. Обозначимъ рядъ

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\ldots$$

чрезъ $f(m)$, каково-бы ни было m; тогда $f(n)$ будетъ обозначать то, во что обратится рядъ, когда вмѣсто m поставится n; а $f(m+n)$ будетъ обозначать точно также то, во что обратится этотъ рядъ при подстановкѣ $m+n$ вмѣсто m. Когда m будетъ какое-нибудь положительное цѣлое число, то $f(m)=(1+x)^m$, а такъ-же $f(0)=1$. Такимъ образомъ равенство (3) можно писать такъ:

$$f(m+n)=f(m)\times f(n). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Подобнымъ-же образомъ

$$f(m+n+p)=f(m+n)\times f(p)=f(m)\times f(n)\times f(p).$$

Продолжая такимъ образомъ, мы можемъ показать, что

$$f(m+n+p+q+\ldots.)=f(m)\times f(n)\times f(p)\times f(q)\times \ldots. \quad (5)$$

Пусть теперь $m=n=p=q=\ldots=\frac{s}{r}$, гдѣ s и r положительныя цѣлыя числа, и положимъ, что число членовъ будетъ r; тогда равенство (5) обратится въ

$$f(s)=\left\{f\left(\frac{s}{r}\right)\right\}^r;$$

откуда слѣдуетъ $$\{f(s)\}^{\frac{1}{r}}=f\left(\frac{s}{r}\right).$$

Но такъ какъ s—цѣлое положительное число, то $f(s)=(1+x)^s$,

а потому $$\{f(s)\}^{\frac{1}{r}}=(1+x)^{\frac{s}{r}};$$

а слѣдовательно $$(1+x)^{\frac{s}{r}}=f\left(\frac{s}{r}\right)=1+\frac{s}{r}x+\frac{\frac{s}{r}\left(\frac{s}{r}-1\right)}{1.2}x^2+\ldots$$

Этимъ доказывается теорема Ньютона *для всякаго положительнаго показателя.*

Поставимъ теперь въ равенство (4)—n вмѣсто m; тогда

$$f(-n)\times f(n)=f(0)=1;$$

слѣдовательно $$\frac{1}{f(n)}=f(-n).$$

Но если n будетъ какое нибудь положительное число, то $f(n)=(1+x)^n$; откуда

$$\frac{1}{(1+x)^n}=f(-n),$$

то-есть $$(1+x)^{-n}=1+(-n)x+\frac{(-n)(-n-1)}{1.2}x^2+\ldots.$$

Это доказываетъ Ньютонову теорему для всякаго *отрицательнаго* показателя.

518. Доказательство теоремы Ньютона для всякаго показателя, содержащееся въ предыдущей статьѣ, дано было въ первый разъ Эйлеромъ; хотя оно трудно и несовсѣмъ удовлетворительно, но оно представляетъ хорошее упражненіе для читателя. Сдѣлаемъ относительно его нѣсколько замѣчаній.

Первое, на что мы обратимъ вниманіе, это—способъ доказательства того, что $f(m+n)=f(m)\times f(n)$. Читатель для упражненія долженъ написать три или четыре члена ряда для $f(m)$ и столько-же членовъ ряда для $f(n)$ и перемножить ихъ между собою. Если произведеніе расположить по степенямъ x, то не трудно убѣдиться, что чѣмъ больше брать членовъ, тѣмъ болѣе оно будетъ согласно съ рядомъ для $f(m+n)$. Но зная, что̀ представляютъ $f(m)$ и $f(n)$, когда m и n цѣлыя положительныя числа, мы заключаемъ, не производя уже хлопотливаго умноженія на самомъ дѣлѣ, что законъ, выражающійся равенствомъ $f(m+n)=f(m)\times f(n)$, долженъ быть справедливъ. Способъ доказательства этого закона въ простомъ случаѣ, когда m и n положительныя цѣлыя числа представляетъ значительный и важный алгебраическій пріемъ.

Но путь, которымъ мы приходимъ къ заключенію, что $f(m+n)=f(m)\times f(n)$, *каковы бы ни были* m и n еще важнѣе. Принципъ этого единственно слѣдующій: *видъ* какого нибудь алгебраическаго произведенія будетъ одинъ и тотъ-же, будутъ-ли его множители цѣлыми, дробными, положительными или отрицательными числами; такъ напримѣръ

$$(a+b)(a+c)=a^2+(b+c)a+bc$$

остается справедливымъ, каковы-бы ни были a, b и c. Отсюда мы заключаемъ, что $f(m)\times f(n)$ будетъ имѣть тотъ-же видъ во всѣхъ случаяхъ, будутъ-ли m и n положительными и цѣлыми, или нѣтъ.

Читатель можетъ также обратить вниманіе на доказательство этого вывода, данное въ главѣ XXIV нашей *Теоріи уравненій*.

519. Но наибольшая трудность состоитъ здѣсь въ томъ, какой смыслъ нужно приписать знаку $=$ въ положеніи, что

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\ldots\ldots \quad (1)$$

Положимъ напримѣръ, что $n=-1$, тогда предыдущее выраженіе обратится въ

$$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\ldots\ldots \quad (2)$$

Но мы знаемъ, что сумма r членовъ ряда $1-x+x^2-x^3+\ldots$ есть $\frac{1-(-x)^r}{1+x}$; слѣдовательно, когда x численно будетъ *меньше* единицы, то беря достаточное число членовъ ряда, мы можемъ получить результатъ, отличающійся отъ $\frac{1}{1+x}$ *сколько угодно мало*, и въ этомъ случаѣ

понимать выражаемое въ формулѣ (2) утвержденіе именно такимъ образомъ. Но когда x будетъ по численной величинѣ *большие* единицы, то, беря большое число членовъ ряда $1-x+x^2-x^3+\ldots$, мы не получимъ подобнаго численнаго приближенія къ значенію $\frac{1}{1+x}$.

Въ главѣ о сходимости рядовъ, мы увидимъ, что когда x численнно меньше единицы, то мы можемъ составить себѣ опредѣленное понятіе о рядѣ, представляемомъ правою частью выраженія (1), каково бы ни было n. Въ этомъ случаѣ въ положеніи

$$f(m+n)=f(m)\times f(n)$$

не встрѣчается никакого затрудненія, такъ какъ тогда каждая изъ трехъ строкъ, заключающихся въ этомъ выраженіи, ариѳметически доступна пониманію. Но когда x численно будетъ *больше* единицы, то мы не можемъ дать никакого ариѳметическаго смысла ни ряду, ни высказываемому положенію; все, что можно тогда сказать, состоитъ въ томъ, что если мы составимъ произведеніе первыхъ r членовъ $f(m)$ и первыхъ r членовъ $f(n)$, то первые r членовъ произведенія будутъ согласоваться съ первыми r членами въ $f(m+n)$; но это еще не даетъ намъ права писать $f(m+n)=f(m)\times f(n)$. Случай, когда x численно равенъ единицѣ потребовалъ-бы особаго изслѣдованія, которое не можетъ быть дано здѣсь. Смотр. ст. 777.

Изъ всего сказаннаго мы можемъ заключить, что биноміальная теорема даетъ для разложенія $(1+x)^n$ такой рядъ, который ариѳметически понятенъ и вѣренъ, когда x будетъ численно меньше единицы; но въ какомъ смыслѣ вѣренъ этотъ выводъ, когда x численно больше единицы, еще не было объяснено элементарнымъ образомъ. Впрочемъ вопросъ о разложеніи выраженій въ ряды составляетъ собственно часть Дифференціальнаго Вычисленія, къ которому читатель и долженъ обратиться для болѣе полнаго обсужденія этихъ трудностей.

520. *Найти численно наибольшій членъ въ разложеніи* $(1+x)^n$.

Будемъ считать x положительнымъ.

I. Положимъ, что n будетъ положительное цѣлое число.

Мы можемъ составить $(r+1)$-й членъ посредствомъ умноженія r-аго члена на $\frac{n-r+1}{r}x$, то-есть на $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)x$, причемъ этотъ множитель уменьшается съ возрастаніемъ r. Положимъ

$$\left(\frac{n+1}{p}-1\right)x=1, \text{ откуда } p=\frac{n+1}{x+1}x.$$

Если p будетъ цѣлое, то два члена разложенія будутъ равны, именно члены p-ый и $(p+1)$-й, и они будутъ больше всѣхъ другихъ членовъ. Если-же p не будетъ цѣлымъ, то положимъ, что цѣлая часть его будетъ q, и тогда $(q+1)$-й членъ будетъ наибольшимъ.

II. Положимъ, что n—положительное, но не цѣлое число.

Какъ и прежде, $(r+1)$-й членъ можно получить изъ r-аго умноженіемъ послѣдняго на $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)x$.

Поэтому, если x больше единицы, то наибольшаго члена не будетъ; дѣйствительно, посредствомъ увеличенія r предыдущій множитель можетъ быть сдѣланъ столь близкимъ къ—x, сколько угодно; то-есть каждый членъ, предшествующій какому нибудь данному члену или слѣдующій за нимъ, можетъ быть сдѣланъ по *численной величинѣ* какъ угодно близкимъ къ x-кратному предшествующему члену, и такимъ образомъ члены будутъ возрастатать безпредѣльно.

Но если x будетъ не больше единицы, тогда *будетъ существовать* наибольшій членъ; дѣйствительно, если $p=\frac{n+1}{x+1}x$, то пока r остается меньше p, множитель будетъ больше единицы, и члены возрастаютъ; но когда r будетъ больше p, множитель будетъ меньше единицы и пока остается положительнымъ, продолжаетъ уменьшаться по мѣрѣ возрастанія r; когда множитель становится отрицательнымъ, онъ все таки остается численно меньше единицы; такъ что каждый членъ послѣ того какъ r перейдетъ чрезъ значеніе p, будетъ численно меньше предыдущаго. Слѣдовательно, какъ и въ первомъ случаѣ, если p будетъ цѣлое число, то p-ый членъ будетъ равенъ $(p+1)$-му, и они будутъ больше, чѣмъ всѣ другіе члены; если-же p не будетъ цѣлымъ числомъ, то положимъ, что q будетъ цѣлая часть p и тогда $(q+1)$-й членъ будетъ наибольшій.

III. Положимъ, что n будетъ величина отрицательная.

Пусть $m=-n$, такъ что m—величина положительная. Численное значеніе $(r+1)$-го члена можетъ быть получено умноженіемъ r-аго члена на $\left(\frac{m+r-1}{r}\right)x$, то есть на $\left(\frac{m-1}{r}+1\right)x$.

Если x больше единицы, то мы можемъ доказать, какъ во второмъ случаѣ, что тогда не будетъ наибольшаго члена.

Если x меньше единицы, то положимъ, что

$$\left(\frac{m-1}{p}+1\right)x=1, \text{ слѣдовательно } p=\frac{m-1}{1-x}x.$$

Если p положительное цѣлое число, то p-й членъ равенъ будетъ $(p+1)$-му члену и оба они будутъ больше всѣхъ другихъ членовъ. Если p положительное, но не цѣлое число, то положимъ, что q будетъ цѣлая часть p и тогда $(q+1)$-й членъ будетъ наибольшимъ. Если p отрицательное число, то m меньше единицы; въ этомъ случаѣ каждый членъ меньше предыдущаго, и первый членъ, то-есть единица, будетъ наибольшимъ.

Если x равенъ единицѣ, то когда m больше единицы, члены постоянно возрастаютъ, и тогда нѣтъ наибольшаго члена; когда m равно единицѣ, то всѣ члены будутъ равны, а когда m меньше единицы, члены постоянно уменьшаются, такъ что первый членъ будетъ наибольшимъ.

Мы вездѣ предполагали, что x положительная величина; если x будетъ отрицательнымъ, то положимъ $y = -x$, такъ что y будетъ положительнымъ; тогда найдемъ численно наибольшій членъ разложенія $(1+y)^n$, который будетъ также численно наибольшимъ членомъ разложенія $(1+x)^n$.

521. Первый членъ разложенія $(1+x)^n$ есть единица, а всякій другой членъ будетъ извѣстенъ, такъ какъ $(r+1)^{\text{-й}}$ членъ равенъ

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{\lfloor\underline{r}}x^r.$$

Это выраженіе называется *общимъ членомъ*, потому что полагая r послѣдовательно равнымъ 1, 2, 3, ..., мы получимъ изъ него послѣдовательно 2-й, 3-й, 4-й .. члены; то есть мы можемъ получить изъ него всякій членъ послѣ перваго. Выраженіе для общаго члена можетъ быть видоизмѣнено въ частныхъ случаяхъ и иногда упрощено, какъ мы увидимъ это изъ слѣдующихъ примѣровъ:

$(1+x)^{-m}$. Здѣсь $n=-m$; общій членъ будетъ

$$\frac{(-m)(-m-1)(-m-2)\ldots(-m-r+1)}{\lfloor\underline{r}}x^r,$$

и его можно написать такъ:

$$\frac{m(m+1)\ldots(m+r-1)}{\lfloor\underline{r}}(-1)^r x^r.$$

$(1+x)^{\frac{1}{2}}$. Здѣсь $n=\frac{1}{2}$; числитель коэффиціента при x^r будетъ

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)..\left(\frac{1}{2}-r+1\right);$$

если r не меньше 2, то это можно написать такъ

$$\frac{1.3.5.7\ldots(2r-3)}{2^r}(-1)^{r-1};$$

здѣсь въ разложеніи $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ первый членъ есть 1, второй $\frac{1}{2}x$, а *всякій слѣдующій* можетъ быть найденъ, если принять за $(r+1)$-й членъ выраженіе

$$\frac{1.3.5.7\ldots.(2r-3)}{2^r\lfloor\underline{r}}(-1)^{r-1}x^r.$$

$(1+x)^{-2}$. Это частный случай разложенія $(1+x)^{-m}$. Коэффиціентъ при x^r будетъ

$$\frac{2.3.4....(2+r-1)}{\lfloor r}(-1)^r, \text{ то-есть } (r+1)(-1)^r.$$

$(1-x)^{-2}$. На основаніи предыдущаго примѣра $(r+1)^{\text{-й}}$ членъ будетъ $(r+1)(-1)^r(-x)^r$, то-есть $(r+1)x^r$.

$(1+x)^{-3}$. Это частный случай $(1+x)^{-m}$. Коэффиціентъ у x^r есть

$$\frac{3.4.5...(3+r-1)}{\lfloor r}(-1)^r, \text{ то-есть } \frac{(r+1)(r+2)}{2}(-1)^r.$$

$(1-x)^{-3}$. На основаніи предыдущаго примѣра $(r+1)^{\text{-й}}$ членъ будетъ $\frac{(r+1)(r+2)}{2}(-1)^r(-x)^r$, то-есть $\frac{(r+1)(r+2)}{2}x^r$.

Если x и n будутъ положительными, то мы найдемъ, что члены разложенія $(1+x)^{-n}$ будутъ поперемѣнно положительными и отрицательными, а члены разложенія $(1-x)^{-n}$ будутъ всѣ положительными. Если x и n положительны, а n не будетъ цѣлымъ числомъ, то мы найдемъ, что всѣ члены разложенія $(1+x)^n$ начнутся съ положительныхъ величинъ, а потомъ могутъ быть поперемѣнно положительными и отрицательными; въ разложеніи-же $(1-x)^n$ члены начнутся поперемѣнно съ положительныхъ и отрицательныхъ, а потомъ могутъ въ извѣстныхъ случаяхъ всѣ быть одного и того-же знака.

522. Какое нибудь многочленное выраженіе можетъ быть возвышено въ извѣстную степень съ помощью повторенія пріема для возвышенія двучленнаго выраженія; такъ, напримѣръ

$$\{a+b+c\}^3 = \{a+(b+c)\}^3 = a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3;$$

если потомъ мы разложимъ $(b+c)^2$ и $(b+c)^3$ и полученныя выраженія поставимъ соотвѣтственно на мѣста этихъ количествъ, то получимъ разложеніе для $\{a+b+c\}^3$.

Подобно этому

$$\{a+b+c+d\}^3 = \{a+(b+c+d)\}^3 = a^3+3a^2(b+c+d)+3a(b+c+d)^2+(b+c+d)^3;$$

это разложеніе можетъ быть закончено, если мы найдемъ разложеніе $(b+c+d)^2$ и $(b+c+d)^3$, какъ это было показано на предыдущемъ примѣрѣ. Или можно поступать такъ

$$\{a+b+c+d\}^3 = \{(a+b)+(c+d)\}^3 = (a+b)^3+3(a+b)^2(c+d)+3(a+b)(c+d)^2+(c+d)^3,$$

это разложеніе закончится, если мы разложимъ $(a+b)^3$, $(a+b)^2$, $(c+d)^3$ и $(c+d)^2$ и произведемъ показанное перемноженіе.

523. *Найти число однородныхъ произведеній* r*-ой степени, какія можно составить изъ* n *буквъ* a, b, c, d. ... *и ихъ степеней.*

Обыкновеннымъ дѣленіемъ или по теоремѣ Ньютона находимъ

$$\frac{1}{1-ax}=1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\ldots$$

$$\frac{1}{1-bx}=1+bx+b^2x^2+b^3x^3+\ldots$$

$$\frac{1}{1-cx}=1+cx+c^2x^2+c^3x^3+\ldots$$

. . . . . .

Такимъ образомъ

$$\frac{1}{a-ax}\cdot\frac{1}{1-bx}\cdot\frac{1}{1-cx}\ldots=\{1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\ldots\}$$
$$\times\{1+bx+b^2x^2+b^3x^3+\ldots.\}\times\{1+cx+c^2x^2+c^3x^3+\ldots.\}\ldots$$

Положимъ, что это$=1+S_1x+S_2x^2+S_3x^3+\ldots..,$

гдѣ
$$S_1=a+b+c\ldots,$$
$$S_2=a^2+ab+b^2+ac+\ldots$$
$$S_3=a^3+a^2b+abc+b^3+\ldots$$

. . . . . .

то-есть S_1 равняется суммѣ величинъ a, b, c ...; S_2 суммѣ всѣхъ произведеній второго измѣренія, какія могутъ быть составлены изъ a, b, c .... и ихъ степеней; S_3 равняется суммѣ всѣхъ произведеній третьяго измѣренія, какія можно составить; и такъ далѣе. Чтобы найти *число* произведеній въ какомъ нибудь изъ этихъ рядовъ, мы полагаемъ каждую изъ буквъ a, b, c ... равной единицѣ; такимъ образомъ

$\frac{1}{1-ax}\cdot\frac{1}{1-bx}\cdot\frac{1}{1-cx}\ldots.$ будетъ $\frac{1}{(1-x)^n}$ или $(1-x)^{-n}$.

Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ S_r есть коэффиціентъ при x^r въ разложеніи $(1-x)^{-n}$, то-есть $=\frac{n(n+1)\ldots.(n+r-1)}{\underline{|r}}$.

Слѣдовательно это и будетъ число однородныхъ произведеній r-аго измѣренія, которыя можно составить и ъ a, b, c, ... и ихъ степеней.

524. *Найти число членовъ въ разложеніи даннаго многочлена при цѣломъ и положительномъ показателѣ.*

Число членовъ разложенія $(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_r)^n$ то-же самое, какъ число однородныхъ произведеній n-аго измѣренія, которыя могутъ быть составлены изъ a_1, a_2, a_3, .. a_r и ихъ степеней. Слѣдовательно, по предыдущей статьѣ, оно будетъ

$$\frac{r(r+1)(r+2)\ldots.(r+n-1)}{\underline{|n}}.$$

525. Биномiальная теорема можетъ быть приложена къ приближенному извлеченiю корней изъ чиселъ. Пусть N будетъ число, изъ котораго требуется найти корень n-ой степени, и предположимъ, что $N=a^n+b$;

тогда $$N^{\frac{1}{n}}=(a^n+b)^{\frac{1}{n}}=a\left(1+\frac{b}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}=a(1+x)^{\frac{1}{n}},$$

гдѣ $x=\frac{b}{a^n}$. Если теперь x будетъ малая дробь, то члены въ разложенiи $(1+x)^{\frac{1}{n}}$ быстро будутъ уменьшаться, и мы можемъ получить приближенное значенiе $(1+x)^{\frac{1}{n}}$, а слѣдовательно и $N^{\frac{1}{n}}$, взявъ лишь немногiе изъ этихъ членовъ. Поэтому будетъ выгодно взять a такъ, чтобы a^n отличалось отъ N по возможности меньше, и чтобы такимъ образомъ b было какъ можно меньше. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ лучше полагать $N=a^n-b$.

526. Заключимъ эту главу шестью примѣрами, которые пояснятъ употребленiе теоремы Ньютона.

1) Отношенiе $(a+x)^n$ къ a^n близко равно отношенiю $a+nx$ къ a, если nx въ сравненiи съ a величина небольшая. Это справедливо, будетъ-ли x положительнымъ или отрицательнымъ, и для значенiй n цѣлыхъ и дробныхъ, положительныхъ и отрицательныхъ. См. ст. 383.

2) Разложить $\frac{a+bx}{p+qx}$ въ рядъ по восходящимъ степенямъ x.

$$\frac{a+bx}{a+qx}=\frac{a+bx}{p\left(1+\frac{qx}{p}\right)}=\frac{1}{p}(a+bx)\left(1+\frac{qx}{p}\right)^{-1};$$

разложимъ $\left(1+\frac{qx}{p}\right)^{-1}$ по биномiальной теоремѣ; тогда будемъ имѣть

$$\frac{a+bx}{p+qx}=\frac{1}{p}(a+bx)\left(1-\frac{qx}{p}+\frac{q^2x^2}{p^2}-\frac{q^3x^3}{p^3}+\ldots\right)$$

$$=\frac{a}{p}+\frac{x}{p}\left(b-\frac{aq}{p}\right)-\frac{qx^2}{p^2}\left(b-\frac{aq}{p}\right)+\ldots$$

Или мы можемъ поступить такимъ образомъ

$$\frac{a+bx}{p+qx}=\frac{a+\frac{aqx}{p}}{p+qx}+\frac{\left(b-\frac{aq}{p}\right)x}{p+qx}=\frac{a}{p}+\frac{x}{p}\left(b-\frac{aq}{p}\right)\left(1+\frac{qx}{p}\right)^{-1}$$

$$=\frac{a}{p}+\frac{x}{p}\left(b-\frac{aq}{p}\right)\left(1-\frac{qx}{p}+\frac{q^2x^2}{p^2}-\frac{q^3x^3}{p^3}+\ldots\right);$$

такимъ образомъ мы получимъ то-же, что и раньше.

Этотъ примѣръ часто встрѣчается въ математикѣ, въ особенности въ тѣхъ случаяхъ, когда x столь малая величина, что квадратомъ ея и

высшими степенями можно пренебречь; въ такомъ случаѣ *приближенно* будетъ

$$\frac{a+bx}{p+qx}=\frac{a}{p}+\frac{x}{p}\left(b-\frac{aq}{p}\right).$$

3) Требуется найти приближенныя значенія корней квадратнаго уравненія $ax^2+bx+c=0$, когда ac очень мало сравнительно съ b^2.

Корни уравненія выражаются чрезъ $\frac{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$.

По теоремѣ Ньютона $\sqrt{(b^2-4ac)}=b\left(1-\frac{4ac}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$=b\left\{1-\frac{1}{2}\frac{4ac}{b^2}-\frac{1}{8}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^2-\frac{1}{16}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^3-\ldots.\right\}.$$

Такимъ образомъ для корня при верхнемъ знакѣ получимъ

$$-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}-\frac{2a^2c^3}{b^5}-\ldots$$

а для корня при нижнемъ знакѣ получимъ

$$-\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{ac^2}{b^3}+\frac{2a^2c^3}{b^5}+\ldots$$

Если a очень малая величина, между тѣмъ какъ b и c не малы, то первый корень почти не отличается отъ $-\frac{c}{b}$, а послѣдній представляетъ очень большую величину. См. ст. 342.

Нужно замѣтить, что приближенное значеніе корня въ первомъ случаѣ будетъ то-же, какое мы получимъ слѣдующимъ образомъ: Напишемъ уравненіе такъ:

$$bx+c=-ax^2.$$

Для полученія приближеннаго результата пренебрежемъ членомъ ax^2, какъ малою величиною; тогда получимъ $x=-\frac{c}{b}$. Затѣмъ подставимъ это приближенное значеніе x въ членъ ax^2; тогда получимъ

$$bx+c=-\frac{ac^2}{b^2},$$

то-есть

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}.$$

Подставимъ опять это новое приближенное значеніе x въ членъ ax^2 и возьмемъ только члены, заключающіе a и a^2; тогда получимъ

$$bx+c=-\frac{ac^2}{b^2}-\frac{2a^2c^3}{b^4},$$

то-есть $$x=\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}-\frac{2a^2c^3}{b^5},$$

и такъ далѣе.

4) Доказать, что если n будетъ какое нибудь положительное цѣлое число, то *цѣлая* часть выраженія $(2+\sqrt{3})^n$ будетъ нѣкоторымъ *нечетнымъ* числомъ.

Смыслъ этого предложенія легко будетъ понять, если взять нѣкоторые частные случаи. Такъ $2+\sqrt{3}$ заключается по величинѣ между 3 и 4, такъ что цѣлая часть этого выраженія есть *нечетное* число 3; такъ-же окажется, что $(2+\sqrt{3})^2$ заключается между 13 и 14, такъ что цѣлая часть его есть нечетное число 13.

Положимъ, что I означаетъ цѣлую часть выраженія $(2+\sqrt{3})^n$, а $I+F$ будетъ полное значеніе его, такъ что F представляетъ дробь въ собственномъ смыслѣ. По биноміальной теоремѣ мы имѣемъ

$$I+F=2^n+n2^{n-1}3^{\frac{1}{2}}+\frac{n(n-1)}{1.2}2^{n-2}3^{\frac{2}{2}}+\ldots+3^{\frac{n}{2}} \quad . \quad . \quad (1)$$

Но $2-\sqrt{3}$ представляетъ очевидно правильную дробь, поэтому и $(2-\sqrt{3})^n$ точно также будетъ правильной дробью; означимъ ее чрезъ F'; тогда

$$F'=2^n-n2^{n-1}3^{\frac{1}{2}}+\frac{n(n-1)}{1.2}2^{n-2}3^{\frac{2}{2}}-\ldots+(-1)^n3^{\frac{n}{2}}. \quad . \quad (2)$$

Сложимъ теперь выраженія (1) и (2); тогда *ирраціональные* члены въ правой части исчезнутъ, и мы будемъ имѣть

$$I+F+F'=2\left\{2^n+\frac{n(n-1)}{1.2}2^{n-2}3^{\frac{2}{2}}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}2^{n-4}3^{\frac{4}{2}}+\ldots\right\}$$

=нѣкоторому *четному* цѣлому числу.

Но F и F' правильныя дроби; поэтому мы должны имѣть $F+F'=1$, а $I=$какому нибудь *нечетному* числу.

Такой-же выводъ получится и для $(a+\sqrt{b})^n$, если a будетъ ближайшее къ $\sqrt{b}$ цѣлое число и большее, чѣмъ послѣдній; такъ что $a-\sqrt{b}$ будетъ правильною дробью.

5) Требуется найти сумму коэффиціентовъ первыхъ $r+1$ членовъ разложенія $(1-x)^{-n}$. Мы имѣемъ

$$(1-x)^{-n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{1.2}x^2+\ldots+\frac{n(n+1)\ldots(n+r-1)}{\underline{|r}}x^r+\ldots$$

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\ldots$$

Слѣдовательно $(1-x)^{-(n+1)}$ равно произведенію двухъ рядовъ. Те-

перь, если мы перемножимъ эти ряды, то увидимъ, что *коэффиціентъ* при x^r въ произведеніи будетъ

$$1+n+\frac{n(n+1)}{1.2}+\ldots+\frac{n(n+1)\ldots(n+r-1)}{\lfloor r};$$

мы естественно можемъ *допустить*, что это выраженіе должно быть равно коэффиціенту при x^r въ разложеніи $(1-x)^{-(n+1)}$; то-есть выраженію

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}{\lfloor r},$$

итакъ требуемое суммированіе исполнено.

6) Биноміальная теорема можетъ быть приложена только-что показаннымъ способомъ къ доказательству многочисленныхъ алгебраическихъ тожествъ; мы дадимъ еще одинъ примѣръ.

Пусть $$\varphi(m, r)=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{\lfloor r}$$

и требуется доказать, что

$$\varphi(n, 0)\varphi(n, r)-\varphi(n, 1)\varphi(n-1, r-1)+\varphi(n, 2)\varphi(n-2, r-2)$$
$$-\varphi(n, 3)\varphi(n-3, r-3)+\ldots=0.$$

Данное здѣсь выраженіе есть разложеніе

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{\lfloor r}(1-1)^r,$$

которое очевидно должно быть нулемъ.

Примѣры приложенія теоремы Ньютона.

Разложить каждое изъ слѣдующихъ двѣнадцати выраженій до четвертаго члена включительно:

1. $(1+x)^{\frac{1}{2}}$. 2. $(1+x)^{\frac{1}{4}}$. 3. $(1+x)^{\frac{2}{3}}$.

4. $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$. 5. $(1+x)^{-\frac{1}{4}}$. 6. $(1+x)^{-\frac{2}{3}}$.

7. $(1-x)^{\frac{1}{5}}$. 8. $(1-2x)^{\frac{3}{4}}$. 9. $\sqrt{(a^2-x^2)}$.

10. $(3a-2x)^{\frac{2}{3}}$. 11 $(a^2-bx)^{-\frac{2}{5}}$. 12. $(1+5x)^{\frac{17}{5}}$.

Найти $(r+1)$-й членъ разложенія въ слѣдующихъ восьми выраженіяхъ:

13. $(1-x)^{-4}$. 14. $(1-x)^{-5}$. 15. $(1-x)^{\frac{1}{n}}$.

16. $(1-px)^{\frac{1}{p}}$. 17. $\frac{1}{\sqrt{(1+x)}}$. 18. $(1-x^2)^{-\frac{2}{3}}$.

19. $(1-2x)^{-\frac{7}{2}}$. 20. $\frac{1}{\sqrt[4]{(1-x)}}$.

Вычислить приближенно слѣдующіе четыре корня:

21. $\sqrt{(24)}$. 22. $\sqrt[3]{(999)}$. 23. $\sqrt[5]{(31)}$. 24. $\sqrt[5]{(99000)}$.

25. Если x—малая величина сравнительно съ единицей, то показать, что

$$\frac{\sqrt{(1+x)}+\sqrt[3]{\{(1-x)^2\}}}{1+x+\sqrt{(1+x)}}=1-\frac{5x}{6} \text{ (приблизительно).}$$

26. Показать, что число сочетаній изъ n элементовъ, когда они берутся по одному, по три, по пяти, ... превышаетъ число сочетаній, когда они берутся по два, по четыре, по шести, ... на единицу.

27. Показать, что число однородныхъ произведеній изъ n буквъ n-аго измѣренія равняется

$$\frac{\lfloor 2n-1}{\lfloor n \lfloor n-1}.$$

Найти наибольшій членъ въ слѣдующихъ четырехъ разложеніяхъ.

28. $(1+x)^n$, когда $x=\frac{2}{3}$ и $n=4$.

29. $(1-x)^{-n}$, при $x=\frac{1}{5}$ и $n=12$.

30. $(1+x)^{-n}$, при $x=\frac{5}{7}$ и $n=3$.

31. $(1-x)^{-n}$, при $x=\frac{7}{12}$ и $n=\frac{8}{3}$.

32. Найти наибольшій членъ въ разложеніи $\left(n-\frac{1}{n}\right)^{2n+1}$, гдѣ n цѣлое положительное число.

33. Найти число членовъ въ разложеніи выраженія

$$(a+b+c+d)^{10}.$$

34. Найти первый членъ съ отрицательнымъ коэффиціентомъ въ разложеніи $(1+\frac{1}{2}x)^{\frac{11}{3}}$.

35. Если p больше n, то коэффиціентъ x^p въ разложеніи $\frac{x^n}{(1-x)^{2n}}$

будетъ $\dfrac{p(p^2-1^2)(p^2-2^2)\ldots\{p^2-(n-1)^2\}}{\lfloor 2n-1}$.

36. Коэффиціентъ при x^{2n} въ разложеніи $\dfrac{(1-2x)^3}{(1-3x^2)^4}$ будетъ

$$3^{n-1}.\ \frac{(n+1)(n+2)(5n+3)}{2}.$$

37. Найти коэффиціентъ при x^n въ разложеніи $\dfrac{(1+x)^2}{(1-x)^4}$.

38. Разложить $\left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{2}}$ по восходящимъ степенямъ x. Написать коэффиціентъ при x^{2r} и при x^{2r+1}.

39. Показать, что n-ый коэффиціентъ въ разложеніи $(1-x)^{-n}$ всегда вдвое больше $(n-1)$-го.

40. Показать, что если t_r означаетъ средній членъ въ разложеніи $(1+x)^{2r}$, то $t_0+t_1+t_2+\ldots=(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$.

41. Написать сумму ряда

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}.\frac{3}{8}+\frac{1}{4}.\frac{3}{8}.\frac{5}{12}+\ldots.$$ *до безконечности.*

42. Найти сумму квадратовъ коэффиціентовъ въ разложеніи $(1+x)^n$, гдѣ n положительное цѣлое число.

43. Если $p_r=\dfrac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots 2r}$, то доказать, что

$$p_{2n+1}+p_1p_{2n}+p_2p_{2n-1}+\ldots.+p_{n-1}p_{n+2}+p_np_{n+1}=\frac{1}{2}.$$

44. Показать, что если m и n будутъ цѣлыя и положительныя числа, то коэффиціентъ x^m въ разложеніи $\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}$ равенъ коэффиціенту при x^n въ разложеніи $\dfrac{1}{(1-x)^{m+1}}$.

45. Найти коэффиціентъ при x^r въ разложеніи

$$(1+2x+3x^2+4x^3+\ldots \text{ до безконечности})^n.$$

ГЛАВА XXXVII.

Распространеніе теоремы Ньютона на многочлены.

527. Въ предыдущей главѣ мы дали нѣсколько примѣровъ разложенія многочленныхъ выраженій; теперь мы разсмотримъ этотъ вопросъ нѣсколько полнѣе. Предложимъ себѣ найти выраженіе *общаго члена* въ разложеніи $(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)^n$.

Число членовъ въ ряду a_0, a_1, a_2, ... можетъ быть какое угодно, и n можетъ быть положительнымъ или отрицательнымъ, цѣлымъ или дробнымъ числомъ.

Замѣнимъ $a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$ чрезъ b_1; тогда намъ нужно будетъ разложить $(a_0+b_1)^n$; общій членъ разложенія будетъ

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\mu+1)}{\lfloor\underline{\mu}}a_0^{n-\mu}b_1^{\mu},$$

гдѣ μ нѣкоторое цѣлое положительное число. Замѣнимъ $a_2x^2+a_3x^3+\ldots$ чрезъ b_2; тогда $b_1^{\mu}=(a_1x+b_2)^{\mu}$, и такъ какъ μ *цѣлое положительное* число, то общій членъ разложенія $(a_1x+b_2)^{\mu}$ можно будетъ означить или чрезъ

$$\frac{\lfloor\underline{\mu}}{\lfloor\underline{q}\ \lfloor\underline{\mu-q}}(a_1x)^{\mu-q}b_2^{q},\ \text{или чрезъ}\ \frac{\lfloor\underline{\mu}}{\lfloor\underline{q}\ \lfloor\underline{\mu-q}}(a_1x)^{q}b_2^{\mu-q};$$

мы примемъ послѣдній видъ, какъ болѣе удобный для нашей цѣли.

Сочетая это съ первымъ результатомъ, мы видимъ, что общій членъ предложеннаго выраженія можно написать такъ

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\mu+1)}{\lfloor\underline{q}\ \lfloor\underline{\mu-q}}a_0^{n-\mu}(a_1x)^{q}b_2^{\mu-q}.$$

Замѣнимъ снова $a_3x^3+a_4x^4+\ldots$ чрезъ b_3; тогда $b_2^{\mu-q}=(a_2x^2+b_3)^{\mu-q}$, и общій членъ разложенія этого выраженія будетъ

$$\frac{\lfloor\underline{\mu-q}}{\lfloor\underline{r}\ \lfloor\underline{\mu-q-r}}(a_2x^2)^{r}b_3^{\mu-q-r}.$$

Слѣдовательно общій членъ предложеннаго разложенія можетъ быть написанъ такъ

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\mu+1)}{\lfloor\underline{q}\ \lfloor\underline{r}\ \lfloor\underline{\mu-q-r}}a_0^{n-\mu}(a_1x)^{q}(a_2x^2)^{r}b_3^{\mu-q-r}.$$

Продолжая поступать такимъ образомъ далѣе, мы получимъ для искомаго общаго члена выраженіе

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\mu+1)}{\lfloor\underline{q}\ \lfloor\underline{r}\ \lfloor\underline{s}\ \lfloor\underline{t}\ \ldots}(a_0{}^{n-\mu}a_1{}^{q}a_2{}^{r}a_3{}^{s}a_4{}^{t}\ldots.x^{q+2r+3s+4t+\ldots}$$

гдѣ $$q+r+s+t\ldots=\mu.$$

Полагая $n-\mu=p$, мы можемъ писать этотъ общій членъ въ видѣ

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(p+1)}{\lfloor\underline{q}\ \lfloor\underline{r}\ \lfloor\underline{s}\ \lfloor\underline{t}\ \ldots}a_0{}^{p}a_1{}^{q}a_2{}^{r}a_3{}^{s}a_4{}^{t}\ldots x^{q+2r+3s+4t+\ldots}$$

гдѣ $$p+q+r+s+t+\ldots.=n.$$

Такимъ образомъ разложеніе предложеннаго многочлена состоитъ изъ ряда членовъ, для которыхъ только-что данный членъ будетъ общимъ типичнымъ членомъ.

Нужно замѣтить, что q, r, s, t, ... всегда цѣлые и положительные, но p можетъ быть цѣлымъ и положительнымъ только тогда, когда n будетъ цѣлое и иоложительное. Когда p есть цѣлое и положительное число, то, умноживъ числителя и знаменателя на $\lfloor\underline{p}$, мы можемъ написать множитель

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(p+1)}{\lfloor\underline{q}\ \lfloor\underline{r}\ \lfloor\underline{s}\ \lfloor\underline{t}\ \ldots.}$$

въ болѣе симметричномъ видѣ

$$\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{p}\ \lfloor\underline{q}\ \lfloor\underline{r}\ \lfloor\underline{s}\ \lfloor\underline{t}\ \ldots}.$$

Въ предыдущемъ выраженіи для общаго члена мы можемъ смотрѣть на множителя при $x^{q+2r+3s+4t+\ldots}$ какъ на *коэффиціентъ* его. Но въ нѣкоторыхъ случаяхъ слово *коэффиціентъ* прилагается къ множителю $\frac{n(n-1)\ldots(p+1)}{\lfloor\underline{q}\ \lfloor\underline{r}\ \lfloor\underline{s}\ \lfloor\underline{t}\ldots.}$; такъ обыкновенно и понимается это слово въ тѣхъ случаяхъ, когда x полагается равнымъ единицѣ, какъ въ примѣрахъ 25...32, данныхъ въ концѣ этой главы.

528. Положимъ, что ищется коэффиціентъ извѣстной степени x въ разложеніи $(a_o+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)^n$, напримѣръ, коэффиціентъ при x^m. Тогда мы имѣемъ

$$q+2r+3s+4t+\ldots\ldots=m,$$
$$p+\ q+\ r+\ s+t+\ldots=n.$$

Путемъ испытанія мы должны найти общія значенія q, r, s, t... удовлетворяющія первому изъ этихъ уравненій; тогда изъ второго уравненія найдется p. Искомый коэффиціентъ такимъ образомъ будетъ суммою соотвѣтствующихъ значеній выраженія

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(p+1)}{\lfloor\underline{q}\ \lfloor\underline{r}\ \lfloor\underline{s}\ \lfloor\underline{t}\ldots}a_0{}^{p}a_1{}^{q}a_2{}^{r}a_3{}^{s}a_4{}^{t}\ldots$$

Если n цѣлое положительное число, то p должно быть также поло-

жительнымъ, и мы можемъ употреблять выраженіе болѣе симметрическаго вида $$\frac{|\underline{n}}{|\underline{p}\,|\underline{q}\,|\underline{r}\,|\underline{s}\,|\underline{t}\ldots}a_0^{\,p}a_1^{\,q}a_2^{\,r}a_3^{\,s}a_4^{\,t}\ldots.$$

529. Для примѣра найдемъ коэффиціентъ при x^7 въ разложеніи выраженія $(1+2x+3x^2+4x^3)^4$.

Здѣсь $$q+2r+3s=7,$$ $$p+q+r+s=4.$$

Начнемъ съ наибольшаго изъ возможныхъ значеній для s; такое значеніе будетъ $s=2$, при которомъ мы будемъ имѣть $r=0$, $q=1$, $p=1$. Затѣмъ положимъ $s=1$; при этомъ значеніи мы можемъ имѣть $r=2$, $q=0$, $p=1$; также мы можемъ имѣть $r=1$, $q=2$, $p=0$. Затѣмъ положимъ $s=0$; при этомъ значеніи будемъ имѣть $r=3$, $q=1$, $p=0$. Это будутъ всѣ рѣшенія; они собраны въ приложенной табличкѣ. Здѣсь $a_0=1$, $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=4$. Такимъ образомъ искомый коэффиціентъ будетъ

p	q	r	s
1	1	0	2
1	0	2	1
0	2	1	1
0	1	3	0

$$\frac{|\underline{4}}{|\underline{2}}2^1.4^2+\frac{|\underline{4}}{|\underline{2}}3^2.4^1+\frac{|\underline{4}}{|\underline{2}}2^2.3^1.4^1+\frac{|\underline{4}}{|\underline{3}}2^1.3^3,$$

или $384+432+576+216$, то есть 1608.

Еще примѣръ. Найдемъ коэффиціентъ при x^3 въ разложеніи $$(1+2x+3x^2+4x^3+\ldots)^{\frac{1}{2}}.$$

Здѣсь $$q+2r+3s+\ldots.=3$$ $$p+q+r+s+\ldots.=\tfrac{1}{2}.$$

p	q	r	s
$-\frac{1}{2}$	0	0	1
$-\frac{3}{2}$	1	1	0
$-\frac{5}{2}$	3	0	0

Всѣ рѣшенія собраны въ приложенной табличкѣ, и искомый коэффиціентъ будетъ

$$\left(\frac{1}{2}\right)4^1+\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)2^1.3^1+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{|\underline{3}}2^3;$$

то-есть $$2-\frac{3}{2}+\frac{1}{2},\ \text{т. е. } 1.$$

Въ этомъ случаѣ, такъ какъ $$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots=(1-x)^{-2},$$

то предложенное выраженіе будетъ $\left\{(1-x)^{-2}\right\}^{\frac{1}{2}}$, то-есть $(1-x)^{-1}$. И $$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\ldots;$$

такимъ образомъ мы видимъ, что коэффиціентъ при x^3 долженъ быть

равенъ 1. Читатель можетъ поупражняться въ приложеніи теоремы о многочленѣ къ нахожденію коэффиціентовъ другихъ степеней x; напримѣръ, коэффиціентъ при x^4 окажется такимъ

$$\frac{5}{2}-2-\frac{9}{8}+\frac{9}{4}-\frac{5}{8}, \text{ то-есть } 1.$$

530. Значеніе коэффиціента въ разложеніи многочлена въ томъ случаѣ, когда показатель *цѣлое положительное* число, могло-бы быть получено и другимъ путемъ. Положимъ, напримѣръ, что намъ нужно разложить $(\alpha+\beta+\gamma)^{10}$. Когда произведемъ перемноженіе, то каждый членъ въ результатѣ окажется произведеніемъ, составленнымъ такъ, что въ него войдетъ по одной буквѣ отъ каждаго изъ десяти трехчленныхъ множителей. Такимъ образомъ, если мы ищемъ членъ, заключающій $\alpha^2\beta^3\gamma^5$, то мы должны взять α изъ какихъ нибудь *двухъ* изъ 10 трехчленныхъ множителей, β—изъ какихъ нибудь *трехъ* изъ остальныхъ 8 трехчленныхъ множителей и γ изъ остальныхъ 5 трехчленовъ. Число способовъ, которыми это можетъ быть сдѣлано, равняется $\frac{\lfloor\underline{10}}{\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{3}\,\lfloor\underline{5}}$ (ст. 498). Такимъ образомъ искомый членъ будетъ

$$\frac{\lfloor\underline{10}}{\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{3}\,\lfloor\underline{5}}\alpha^2\beta^3\gamma^5.$$

Отсюда слѣдуетъ, что если намъ нужно разложить $(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{10}$, то членъ, заключающій $\alpha^2\beta^3\gamma^5$, будетъ

$$\frac{\lfloor\underline{10}}{\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{3}\,\lfloor\underline{5}}\alpha^2(\beta x)^3(\gamma x^2)^5, \text{ то-есть } \frac{\lfloor\underline{10}}{\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{3}\,\lfloor\underline{5}}\alpha^2\beta^3\gamma^5x^{3+10}.$$

Подобно этому нужно поступать и во всякомъ другомъ случаѣ. Такимъ образомъ мы могли-бы доказывать теорему о разложеніи многочлена слѣдующимъ образомъ:

Начнемъ съ нахожденія вида коэффиціента$_2$ объясненнымъ сейчасъ на примѣрахъ путемъ, въ случаѣ, когда показатель цѣлое *положительное* число. Затѣмъ предположимъ, что намъ нужно найти общій членъ въ разложеніи $(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)^n$, когда n не будетъ цѣлымъ и положительнымъ. Поставимъ b вмѣсто $a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$; тогда намъ нужно будетъ разложить $(a_0+b)^n$; общій членъ этого разложенія будетъ

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\mu+1)}{\lfloor\underline{\mu}}a_0^{n-\mu}b^\mu;$$

и такъ какъ μ *цѣлое* и *положительное* число, то общій членъ выраженія $(a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)^\mu$ будетъ

$$\frac{\lfloor\underline{\mu}}{\lfloor\underline{q}\,\lfloor\underline{r}\,\lfloor\underline{s}\,\lfloor\underline{t}\ldots}a_1^{q}a_2^{r}a_3^{s}a_4^{t}\ldots x^{q+2r+3s+4t+\ldots}$$

А слѣдовательно искомый общій членъ будетъ

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\mu+1)}{\underline{|q}\ \underline{|r}\ \underline{|s}\ \underline{|t}\ldots}a_0^{n-\mu}a_1^{q}a_2^{r}a_3^{s}a_4^{t}\ldots.x^{q+2r+3s+4t+\ldots}.$$

Примѣры.

Найти коэффиціенты указанныхъ степеней x въ разложеніяхъ для слѣдующихъ 24 примѣровъ.

1. x^4 въ $(1+x+x^2)^3$.
2. x^5 въ $(1-x+x^2)^4$.
3. x^8 въ $(1-2x+3x^2-4x^3)^4$.
4. x^{14} въ $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3$.
5. x^6 въ $(2-3x-4x^2)^5$.
6. x^8 въ $(1-x+2x^2)^{12}$.
7. x^4 въ $(2-5x-7x^2)^5$.
8. x^8 въ $(1-2x^2+4x^4)^{-2}$.
9. x^4 въ $(1+x+x^2)^{-5}$.
10. x^5 въ $(1+2x-x^2)^{\frac{1}{2}}$.
11. x^8 въ $\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)^{-2}$.
12. x^4 въ $(1+2x-4x^2-2x^3)^{-\frac{1}{2}}$.
13. x^6 въ $(1-2x+x^4)^{\frac{1}{4}}$.
14. x^4 въ $(1+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{7}{2}})^5$.
15. x^4 въ $(1+x+x^2)^n$.
16. x^4 въ $(1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+\ldots)^7$.
17. x^m въ $(1+x+x^2+\ldots.)^2$.
18. x^8 въ $(1+2x+3x^2)^n$.
19. x^4 въ $(1+2x+3x^2+4x^3+\ldots)^{-\frac{1}{2}}$.
20. x^{12} въ $(1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)^5$.
21. x^5 въ $(a_0+a_1x+a_2x^2)^n$.
22. x^8 въ $(1-x^2+x^3-x^5)^4$.
23. x^2 въ $(1+ax+bx^2)^{-\frac{1}{2}}$.
24. x^3 въ $(1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)^m$.

25. Найти коэффиціентъ при abc^3 въ $(a+b+c)^5$.

26. Найти коэффиціентъ у $a^2b^3c^2$ въ разложеніи $(a-b-c)^7$.

27. Найти коэффиціентъ у $a^2b^4c^3$ въ разложеніи $(a+b+c+d)^9$.

28. Найти коэффиціентъ у $ab^2c^3d^4$ въ $(a-b+c-d)^{10}$.

29. Написать всѣ члены, заключающіе степени b и c до третьей степени включительно въ разложеніи $(a+b+c)^n$.

30. Написать всѣ члены, содержащіе d^{n-3} въ разложеніи $(a+b+c+d)^n$.

31. Найти наибольшій коэффиціентъ въ разложеніи $(a+b+c)^{10}$.

32. Найти наибольшій коэффиціентъ въ разложеніи $(a+b+c+d)^{14}$.

33. Показать, что наибольшій коэффиціентъ въ разложеніи $(a_1+a_2+\ldots+a_m)^n$ есть $\frac{\lfloor\underline{n}}{\{\lfloor\underline{q}\}^m(q+1)^r}$, гдѣ q есть частное, а r остатокъ отъ дѣленія n на m.

34. Показать, что въ разложеніи $(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)^2$ коэффиціентъ при x^{2p+1} равенъ $2(a_0a_{2p+1}+a_1a_{2p}+a_2a_{2p-1}+\ldots+a_pa_{p+1})$.

35. Разложить $(1-2bx+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ до x^4.

36. Разложить $(a+bx+cx^2)^{-1}$ до x^4.

37. Разложить $(1-x-x^2-x^3)^n$ до x^3.

38. Въ разложеніи $(1+x+x^2+\ldots+x^r)^n$, гдѣ n число положительное, показать, что

1) коэффиціенты членовъ, равно отстоящихъ отъ начала и конца, равны;

2) коэффиціентъ средняго члена или двухъ среднихъ членовъ, смотря по тому, будетъ-ли nr четное или нечетное, будетъ больше всякаго другого коэффиціента;

3) коэффиціенты постоянно возрастаютъ отъ перваго до наибольшаго.

39. Если a_0, a_1, a_2, a_3, ... будутъ по порядку коэффиціенты въ разложеніи $(1+x+x^2+\ldots.+x^r)^n$, то доказать, что

1) $a_0+a_1+a_2+\ldots.+a_{nr}=(r+1)^n$;

2) $a_1+2a_2+3a_3+\ldots+nra_{nr}=\frac{1}{2}nr(r+1)^n$.

40. Если a_0, a_1, a_2, a_3, ... будутъ коэффиціенты по порядку въ разложеніи $(1+x+x^2)^n$, то доказать, что

$$a_0{}^2-a_1{}^2+a_2{}^2-a_3{}^2+\ldots.+(-1)^{n-1}a^2{}_{n-1}+\tfrac{1}{2}(-1)^n a_n{}^2=\tfrac{1}{2}a_n.$$

ГЛАВА XXXVIII.

Логариѳмы.

531. Положимъ, что $a^x=n$; въ этомъ случаѣ x называется *логариѳмомъ числа* n *при основаніи* a; такимъ образомъ логариѳмомъ какого нибудь числа при данномъ основаніи называется показатель степени, въ которую нужно возвести это основаніе, чтобы оно сдѣлалось равнымъ данному числу.

Логариѳмъ числа n при основаніи a пишется $\log_a n$; такимъ образомъ $\log_a n=x$ выражаетъ то-же самое соотношеніе, что и $a^x=n$.

532. Напримѣръ $3^4=81$; поэтому 4 есть логариѳмъ 81 при основаніи 3.

Если мы желаемъ найти логариѳмы чиселъ 1, 2, 3, ... при данномъ основаніи, напримѣръ при основаніи 10, то должны рѣшить рядъ уравненій $10^x=1$, $10^x=2$, $10^x=3$, ... Въ слѣдующей главѣ мы покажемъ, что это можетъ быть сдѣлано *приближенно*; это значитъ, что, хотя мы не можемъ найти такого значенія x, которое *въ точности* удовлетворяло-бы, напримѣръ, уравненію $10^x=2$, но можемъ отыскать такое значеніе x, при которомъ 10^x будетъ отличаться отъ 2 на какую угодно малую величину.

Докажемъ теперь нѣкоторыя свойства логариѳмовъ.

533. *Логариѳмъ* 1 *равенъ* 0, *какое-бы ни было основаніе.*

Дѣйствительно, когда $x=0$, $a^x=1$.

534. *Логариѳмъ самаго основанія равенъ единицѣ.*

Дѣйствительно, когда $x=1$, $a^x=a$.

535. *Логариѳмъ произведенія равенъ суммѣ логариѳмовъ производителей.*

Дѣйствительно, пусть $x=\log_a m$, $y=\log_a n$;

слѣдовательно $m=a^x$, $n=a^y$;

откуда $mn=a^x a^y=a^{x+y}$;

и слѣдовательно $\log_a mn=x+y=\log_a m+\log_a n$.

536. *Логариѳмъ частнаго равенъ логариѳму дѣлимаго безъ логариѳма дѣлителя.*

Дѣйствительно, пусть $x=\log_a m$, $y=\log_a n$;

слѣдовательно $m=a^x$, $n=a^y$;

а слѣдовательно $\frac{m}{n}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$;

и потому $\log_a \frac{m}{n}=x-y=\log_a m-\log_a n$.

537. *Логариѳмъ всякой степени цѣлой или дробной отъ какого нибудь числа равенъ произведенію логариѳма этого числа на показатель степени.*

Дѣйствительно, пусть $m=a^x$; въ такомъ случаѣ $m^r=(a^x)^r=a^{xr}$, а потому $\log_a(m^r)=xr=r\log_a m$.

538. *Найти соотношеніе между логариѳмами одного и того-же числа при различныхъ основаніяхъ.*

Пусть $x=\log_a m,\ y=\log_b m;$

слѣдовательно $m=a^x;\quad m=b^y;$

а потому $a^x=b^y;$

слѣдовательно $a^{\frac{x}{y}}=b,$ а $b^{\frac{y}{x}}=a;$

а потому $\frac{x}{y}=\log_a b$ и $\frac{y}{x}=\log_b a.$

Отсюда $y=x\log_b a,$ или $=\frac{x}{\log_a b}.$

Слѣдовательно логариѳмъ какого нибудь числа при основаніи b можетъ быть найденъ умноженіемъ логариѳма этого числа при основаніи a на $\log_b a,$ или на $\frac{1}{\log_a b}.$

Замѣтимъ при этомъ, что $\log_b a\times\log_a b=1.$

539. Въ практическихъ вычисленіяхъ употребляется исключительно лишь основаніе 10; логариѳмы при этомъ основаніи называются *обыкновенными*. Въ слѣдующихъ двухъ главахъ мы укажемъ на нѣкоторыя особенности, дѣлающія выгоднымъ употребленіе основанія 10. Замѣтимъ еще, что цѣлая часть какого нибудь логариѳма называется *характеристикой*, а десятичная часть *мантиссой* (прибавка, добавленіе).

540. *Въ обыкновенной системѣ логариѳмовъ, если логариѳмъ какого нибудь числа извѣстенъ, мы можемъ непосредственно опредѣлить логариѳмъ того-же числа, умноженнаго или раздѣленнаго на какую нибудь степень* 10.

Дѣйствительно, $\log_{10}(N\times 10^n)=\log_{10}N+\log_{10}10^n=\log_{10}N+n$

$$\log_{10}\frac{N}{10^n}=\log_{10}N-\log_{10}10^n=\log_{10}N-n;$$

то-есть, если мы знаемъ логариѳмъ какого нибудь числа, то мы можемъ опредѣлить логариѳмъ всякаго другого числа, изображаемаго тѣми-же цифрами и различающагося только положеніемъ запятой, отдѣляющей десятичную часть отъ цѣлой.

541. *Въ обыкновенной системѣ логариѳмовъ характеристика логариѳма всякаго числа можетъ быть опредѣлена съ перваго взгляда.*

Дѣйствительно, положимъ, что число будетъ больше единицы, и заключается между 10^n и 10^{n+1}; тогда логариѳмъ его долженъ быть больше n и меньше $n+1$; поэтому характеристика логариѳма есть n.

Положимъ теперь, что число будетъ меньше единицы и заключается между $\frac{1}{10^n}$ и $\frac{1}{10^{n+1}}$, то-есть между 10^{-n} и $10^{-(n+1)}$; тогда его логариѳмъ будетъ нѣкоторое отрицательное количество, заключающееся между $-n$ и $-(n+1)$; слѣдовательно, если мы поставимъ условіемъ, чтобы *мантисса всегда была положительной*, то характеристика будетъ $-(n+1)$.

Дальнѣйшія указанія относительно практическаго употребленія логариѳмовъ можно найти въ сочиненіяхъ по тригонометріи и въ каждомъ введеніи къ таблицамъ логариѳмовъ.

Примѣры логариѳмовъ.

1. Найти логариѳмъ 144 при основаніи $2\sqrt{3}$.
2. Найти характеристику логариѳма 7 при основаніи 2.
3. Найти характеристику $\log_3 5$.
4. Найти $\log_5 3125$.
5. Дать характеристику $\log_{10} 1230$ и $\log_{10} 0.0123$.
6. Даны $\log 2 = 0.301030$ и $\log 3 = 0.477121$; найти логариѳмы 0.05 и 5.4.
7. Даны log2 и log3 (см. примѣръ 6); найти логариѳмъ 0.006.
8. Даны log2 и log3; найти логариѳмы 36, 27 и 16.
9. Даны $\log 648 = 2.81157501$, $\log 864 = 2.93651374$; найти log3 и log5.
10. Данъ log2; найти $\log\sqrt{(1.25)}$.
11. Данъ log 2, найти log 0.0025.
12. Данъ log 2, найти $\log\sqrt[3]{(0.0125)}$.
13. Даны log2 и log3, найти log1080 и $\log(0.0045)^9$.
14. Даны $\log_{10} 2 = 0.301030$ и $\log_{10} 7 = 0.845098$, найти логариѳмъ $\left(\frac{4}{343}\right)^{\frac{1}{2}}$ при основаніи 1000.
15. Найти число цифръ въ числѣ 2^{64}, зная логариѳмъ 2.
16. Даны log2 и l g $5.743491 = 0.7591760$; найти корень пятой степени изъ 0.0625.
17. Если P будетъ число цѣлыхъ, логариѳмы которыхъ имѣютъ характеристику p, и Q число цѣлыхъ, логариѳмы которыхъ обратны и имѣютъ характеристику $-q$, то показать, что $\log P - \log Q = p - q + 1$.

18. Если $y=10^{\frac{1}{1-\lg x}}$ и $z=10^{\frac{1}{1-\lg y}}$, то доказать, что $x=10^{\frac{1}{1-\lg z}}$.

19. Если a, b, c составляютъ геометрическую прогрессію, то $\log_a n$, $\log_b n$, $\log_c n$ будутъ составлять гармоническую прогрессію.

20. Если число лицъ, родившихся въ извѣстномъ году, равнялось $\frac{1}{45}$-й части всего населенія въ началѣ года, а число умершихъ составляло $\frac{1}{60}$-ю часть его, то найти, во сколько лѣтъ населеніе удвоится, предполагая что дано:

$$\log 2=0.301030,\ \log 180=2.255272,\ \log 181=2.257679.$$

ГЛАВА XXXIX.

Показательные и логариѳмическіе ряды.

542. *Разложить* a^x *въ рядъ по восходящимъ степенямъ* x, *то-есть разложить какое нибудь число въ рядъ по восходящимъ степенямъ его логариѳма при данномъ основаніи.*

$a^x=\{1+(a-1)\}^x$, и разлагая это по теоремѣ Ньютона мы получимъ

$$\{1+(a-1)\}^x=1+x(a-1)+\frac{x(x-1)}{1.2}(a-1)^2$$
$$+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}(a-1)^3+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}(a-1)^4+\ldots$$
$$=1+x\{a-1-\tfrac{1}{2}(a-1)^2+\tfrac{1}{3}(a-1)^3-\tfrac{1}{4}(a-1)^4+\ldots\}$$
$$+\text{ члены, заключающіе } x^2,\ x^3, \text{ и проч.}$$

Это показываетъ, что a^x *можетъ* быть разложено въ рядъ, начинающійся съ единицы и расположенный по восходящимъ степенямъ x; слѣдовательно мы можемъ предположить, что

$$a^x=1+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+\ldots,$$

гдѣ c_1, c_2, $c_3\ldots$ количества, не зависящія отъ x и остающіяся поэтому безъ измѣненія, но x можетъ измѣняться; и такъ

$$c_1=a-1-\tfrac{1}{2}(a-1)^2+\tfrac{1}{3}(a-1)^3-\tfrac{1}{4}(a-1)^4+\ldots$$

между тѣмъ какъ c_2, c_3, $\ldots$ пока еще неизвѣстны, и мы приступимъ къ нахожденію ихъ значеній. Измѣнивъ x на $x+y$, мы получимъ

$$a^{x+y}=1+c_1(x+y)+c_2(x+y)^2+c_3(x+y)^3+\ldots;$$

но $$a^{x+y}=a^x a^y=a^y(1+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots).$$

Такъ какъ оба выраженія для a^{x+y} тожественно равны, то мы можемъ *допустить*, что коэффиціенты при x въ обоихъ выраженіяхъ равны, и такимъ образомъ

$$c_1+2c_2y+3c_3y^2+4c_4y^3+\ldots=c_1a^y$$
$$=c_1\{1+c_1y+c_2y^2+c_3y^3+\ldots\}.$$

Въ этомъ тожествѣ мы можемъ *допустить*, что коэффиціенты соотвѣтствующихъ степеней при y равны; такимъ образомъ

$$2c_2=c_1^2, \text{ слѣдовательно } c_2=\frac{c_1^2}{2};$$

$$3c_3=c_1c_2, \text{ слѣдовательно } c_3=\frac{c_1c_2}{3}=\frac{c_1^3}{1.2.3};$$

$$4c_4=c_1c_3, \text{ слѣдовательно } c_4=\frac{c_1c_3}{4}=\frac{c_1^4}{1.2.3.4}.$$

. . . . . .

Итакъ $$a^x=1+c_1x+\frac{c_1^2x^2}{\underline{|2}}+\frac{c_1^3x^3}{\underline{|3}}+\frac{c_1^4x^4}{\underline{|4}}+\ldots.$$

Такъ какъ этотъ выводъ справедливъ для всякаго значенія x, то возьмемъ x такимъ, чтобы $c_1x=1$; тогда $x=\frac{1}{c_1}$, и

$$a^{\frac{1}{c_1}}=1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\ldots;$$

этотъ рядъ обыкновенно означаютъ буквою e; такимъ образомъ $a^{\frac{1}{c_1}}=e$, а потому $a=e^{c_1}$, и $c_1=\log_e a$; слѣдовательно

$$a^x=1+(\log_e a)x+\frac{(\log_e a)^2}{\underline{|2}}x^2+\frac{(\log_e a)^3}{\underline{|3}}x^3+\ldots$$

Этотъ выводъ или *рядъ* называется *показательною теоремой*.

Перемѣнимъ a на e, тогда $\log_e a$ обратится въ $\log_e e$, т.-е. будетъ единицей (ст. 534); такимъ образомъ

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}+\ldots$$

Этотъ очень важный выводъ вѣренъ для *всякихъ* величинъ x; и учащійся долженъ на столько ознакомиться съ нимъ, чтобы быть въ состояніи прилагать его ко всякому частному случаю. Напримѣръ, положимъ, что $x=-1$; тогда

$$e^{-1} \text{ или } \frac{1}{e}=\frac{1}{\underline{|2}}-\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}-\frac{1}{\underline{|5}}+\ldots$$

Или мы можемъ замѣнить x другимъ символомъ; такъ, поставивъ nz вмѣсто x, мы получимъ

$$e^{nz}=1+nz+\frac{n^2z^2}{|\underline{2}}+\frac{n^3z^3}{|\underline{3}}+\frac{n^4z^4}{|\underline{4}}+\ldots$$

Въ ст. 551 мы сдѣлаемъ замѣчаніе относительно одной части предыдущаго изслѣдованія и возвратимся послѣ того къ *допущенію*, которое мы сдѣлали дважды при изложеніи настоящей статьи.

543. Производя вычисленіе на самомъ дѣлѣ, мы можемъ найти приблизительно численное значеніе ряда, означеннаго буквою e; оно будетъ равно 2.718281828...

544. *Разложить* $\log_e(1+x)$ *въ рядъ по восходящимъ степенямъ* x.

Въ ст. 542 мы видѣли, что $c_1=\log_e a$; то-есть, по той-же статьѣ,

$$\log_e a=a-1-\tfrac{1}{2}(a-1)^2+\tfrac{1}{3}(a-1)^3-\tfrac{1}{4}(a-1)^4+\ldots$$

Поставимъ $1+x$ вмѣсто a; тогда

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

Эта строка можетъ быть приложена къ вычисленію $\log_e(1+x)$, если x будетъ правильная дробь; но если x не будетъ очень мало, то члены будутъ уменьшаться столь медленно, что намъ нужно будетъ брать большое число ихъ; если-же x будетъ больше единицы, то рядомъ этимъ пользоваться вовсе будетъ невозможно. Поэтому мы должны вывести другія, болѣе удобныя формулы.

545. Мы имѣемъ $\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots;$

слѣдовательно $\log_e(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots,$

вычтя одно изъ другого, мы получаемъ значеніе $\log_e(1+x)-\log_e(1-x)$

то-есть $\log_e\frac{1+x}{1-x}$, именно

$$\log_e\frac{1+x}{1-x}=2\left\{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right\}.$$

Напишемъ въ этомъ ряду $\frac{m-n}{m+n}$ вмѣсто x, а слѣдовательно $\frac{m}{n}$ вмѣсто $\frac{1+x}{1-x}$; тогда получимъ

$$\log_e\frac{m}{n}=2\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\ldots\right\}. \qquad (1)$$

Положимъ $n=1$, тогда

$$\log_e m = 2\left\{\frac{m-1}{m+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^5+\ldots\right\}. \qquad (2)$$

Положимъ теперь въ (1) $m=n+1$; тогда мы получимъ значеніе $\log_e \frac{n+1}{n}$; слѣдовательно $\log_e (n+1)-\log_e n$

$$=2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\ldots\right\}. \qquad (3)$$

546. Рядъ (2) предыдущей статьи дастъ намъ возможность найти $\log_e 2$; положимъ $m=2$; тогда вычисленіемъ мы найдемъ, что

$$\log_e 2 = 0.69314718\ldots$$

Съ помощью ряда (3) мы можемъ вычислять логариѳмъ одного изъ двухъ послѣдовательныхъ чиселъ, когда знаемъ логариѳмъ другого. Положивъ $n=2$ и пользуясь извѣстнымъ значеніемъ $\log_e 2$, получимъ

$$\log_e 3 = 1.09861229\ldots$$

Положимъ въ ряду (3) $n=9$; тогда $\log_e n = \log_e 9 = \log_e 3^2 = 2\log_e 3$, а $\log_e 3$ уже извѣстенъ; слѣдовательно найдемъ, что

$$\log_e 10 = 2.30258509\ldots$$

547. Логариѳмы при основаніи e называются *Неперовыми* логариѳмами, по имени изобрѣтателя логариѳмовъ, Непера (Napier); они называются также *натуральными* логариѳмами, такъ какъ они первыми представляются намъ при изслѣдованіи способовъ логариѳмическаго счета. Мы уже сказали, что основаніе 10 есть единственное изъ основаній, употребляющихся въ практическихъ приложеніяхъ логариѳмовъ, но логариѳмы, взятые при основаніи e, часто встрѣчаются въ теоретическихъ изслѣдованіяхъ.

548. Изъ ст. 538 мы видимъ, что логариѳмъ какого нибудь числа при основаніи 10 можетъ быть найденъ чрезъ умноженіе Неперова логариѳма на $\frac{1}{\log_e 10}$, то-есть на $\frac{1}{2.30258509}$, или на 0.43429448; этотъ множитель называется *модулемъ* обыкновенной системы логариѳмовъ.

Основаніе e, модуль обыкновенной системы и логариѳмы 2, 3 и 5 при основаніи e, всѣ вычислены съ точностью до 260 десятичныхъ цифръ. Объ этомъ см. *Proceedings of the Royal Society of London*, томъ XXVII, стр. 88.

Ряды ст. 545 можно приспособить такъ, что они будутъ давать обыкновенные логариѳмы; напримѣръ, возьмемъ рядъ (3) и умножимъ всѣ члены его на модуль, который означимъ буквой μ; тогда найдемъ

$$\mu\log_e(n+1)-\mu\log_e n = 2\mu\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\ldots\right\};$$

то-есть

$$\log_{10}(n+1)-\log_{10}n=2\mu.\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\ldots\right\}.$$

549. По ст. 542 мы имѣемъ

$$(e^x-1)^n=\left(x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}+\ldots.\right)^n$$

$$=x^n+\text{члены, содержащіе высшія степени } x. \qquad (1)$$

Но по теоремѣ Ньютона такъ-же будетъ

$$(e^x-1)^n=e^{nx}-ne^{(n-1)x}+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}e^{(n-2)x}-\ldots. \qquad (2)$$

Разложимъ каждый изъ членовъ e^{nx}, $e^{(n-1)x}$...; тогда коэффиціентъ при x^r въ (2) будетъ

$$\frac{n^r}{\underline{|r}}-n\frac{(n-1)^r}{\underline{|r}}+\frac{n(n-1)(n-2)^r}{\underline{|2}\quad\underline{|r}}-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^r}{\underline{|3}\quad\underline{|r}}+\ldots$$

Слѣдовательно изъ (1), тѣмъ-же путемъ, какъ и въ ст. 542, мы убѣждаемся, что

$$n^r-n(n-1)^r+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}(n-2)^r-\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}(n-3)^r+\ldots \text{ будетъ}$$

$=\underline{|n}$, если $r=n$, или $=0$, если r меньше n.

Легко видѣть, что членъ правой части равенства (1), заключающій x^{n+1}, будетъ $\frac{n}{2}x^{n+1}$. Такимъ образомъ, руководясь тѣмъ-же началомъ какъ и раньше, мы приходимъ къ выводу

$$n^{n+1}-n(n-1)^{n+1}+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}(n-2)^{n+1}-\ldots=\frac{1}{2}n\,\underline{|n+1}.$$

550. Дадимъ другой способъ получить показательный рядъ. По теоремѣ Ньютона

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+nx\frac{1}{n}+\frac{nx(nx-1)}{\underline{|2}}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{\underline{|3}}\frac{1}{n^3}$$

$$+\frac{nx(nx-1)(nx-2)(nx-3)}{\underline{|4}}\cdot\frac{1}{n^4}+\ldots$$

то-есть

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\underline{|2}}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}}$$

$$+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)\left(x-\frac{3}{n}\right)}{\underline{|4}}+\ldots$$

Положимъ $x=1$, тогда $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\underline{|2}}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}{\underline{|4}}+\ldots$$

Но $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^x$, слѣдовательно

$$1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\underline{|2}}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}}+\ldots$$

$$=\left\{1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\underline{|2}}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)^x}{\underline{|3}}+\ldots\right\}.$$

И такъ какъ это справедливо, какъ-бы ни было велико n, то будетъ справедливо и тогда, когда n сдѣлается равнымъ безконечности; въ этомъ случаѣ $\frac{1}{n}$ обращается въ нуль, и мы получимъ

$$1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}+\ldots=\left\{1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\ldots\right\}^x,$$

то-есть $=e^x$.

Такимъ образомъ мы получили разложеніе e^x по степенямъ x; чтобы найти разложеніе a^x, положимъ $a=e^c$, такъ что $c=\log_e a$ тогда

$$a^x=e^{cx}=1+cx+\frac{c^2x^2}{\underline{|2}}+\frac{c^3x^3}{\underline{|3}}+\frac{c^4x^4}{\underline{|4}}+\ldots.$$

551. Читатель замѣтитъ, что въ предыдущей статьѣ мы воспользовались теоремой Ньютона для разложенія какой нибудь степени отъ $\left(1+\frac{1}{n}\right)$, и если $\frac{1}{n}$ меньше *единицы*, то мы увѣрены, что разложеніе дастъ *ариѳметически* вѣрный результатъ (ст. 519). Въ доказательствѣ показательной теоремы, данномъ въ первой статьѣ этой главы, если $a-1$ будетъ больше единицы, то разложеніе по теоремѣ Ньютона, съ чего доказательство начинается, будетъ ариѳметически необъяснимо; слѣдовательно это доказательство можетъ считаться основательнымъ лишь въ случаѣ, когда a меньше 2; но при такомъ ограниченіи оно остается въ полной силѣ и x можетъ имѣть всякое значеніе. Чтобы дополнить это доказательство, намъ остается показать, что теорема эта справедлива для всякаго значенія a, и такъ какъ e больше 2, то мы не должны измѣнять a въ e, пока не освободимся отъ ограниченія относи-

тельно величины a. Это ограниченіе легко устранить; дѣйствительно въ теоремѣ

$$a^x = 1 + (\log_e a)\, x + \frac{(\log_e a)^2 x^2}{\underline{|2}} + \frac{(\log_e a)^3 x^3}{\underline{|3}} + \ldots$$

положимъ $a = A^y$; если возьмемъ y достаточно малымъ, то A можетъ быть сдѣлано какъ угодно большимъ, а между тѣмъ a будетъ оставаться меньше 2. Тогда $\log_e a = y \log_e A$; такимъ образомъ

$$A^{yx} = 1 + (\log_e A)\, yx + \frac{(\log_e A)^2 y^2 x^2}{\underline{|2}} + \frac{(\log_e A)^3 y^3 x^3}{\underline{|3}} + \ldots$$

итакъ, ставя z вмѣсто xy, найдемъ

$$A^z = 1 + (\log_e A) z + \frac{(\log_e A)^2 z^2}{\underline{|2}} + \frac{(\log_e A)^3 z^3}{\underline{|3}} + \ldots$$

Такимъ образомъ показательный рядъ доказанъ теперь вообще.

552. Въ ст. 550 мы нашли, что когда n безпредѣльно возрастаетъ, то $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}$ окончательно обращается въ e^x; подобнымъ-же образомъ мы могли-бы доказать, что когда n безпредѣльно возрастаетъ, то $\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{rx}$ окончательно обратится въ e^{rx}.

Примѣры логариѳмическихъ рядовъ.

1. Доказать, что $\log_e (x+1) = 2\log_e x - \log_e (x-1)$.

$$-2\left\{\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^3 + \ldots\right\}.$$

Если дано $\log_{10} 3 = 0.47712$, и $\frac{1}{\log_e 10} = 0.43429$, то приложить предыдущій рядъ къ вычисленію $\log_{10} 11$.

2. Показать, что $\log_e (x+2h) = 2\log_e (x+h) - \log_e x$

$$-\left\{\frac{h^2}{(x+h)^2} + \frac{1}{2}\frac{h^4}{(x+h)^4} + \frac{1}{3}\frac{h^6}{(x+h)^6} + \ldots\right\}.$$

3. Если a, b, c будутъ три послѣдовательныя числа, то

$$\log_e c = 2\log_e b - \log_e a$$

$$-2\left\{\frac{1}{2ac+1} + \frac{1}{3(2ac+1)^3} + \frac{1}{5(2ac+1)^5} + \ldots\right\}.$$

4. Если λ и μ будутъ корни уравненія $ax^2 + bx + c = 0$, то показать, что

$$\log_e (a - bx + cx^2) = \log_e a + (\lambda + \mu)x - \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2} x^2 + \ldots$$

*

5. $\mathrm{Log}_e \{1+1+x+(1+x)^2\} = 3\log_e(1+x) - \log_e x - \left\{\frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)^6} + \frac{1}{3(1+x)^9} + \ldots\right\}.$

6. $\mathrm{Log}_e(x+1) = \frac{4x}{2x+1}\log_e x - \frac{2x-1}{2x+1}\log_e(x-1) - \frac{2}{2x+1}\left\{\frac{1}{2.3\,x^3} + \frac{2}{3.5.x^5} + \frac{3}{4.7.x^7} + \ldots\right\}.$

7. $\mathrm{Log}_e \left\{(1+x)^{\frac{1+x}{2}}(1-x)^{\frac{1-x}{2}}\right\} = \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^6}{5.6} + \ldots$

8. Найти Ненеровъ логариѳмъ числа $\frac{501}{499}$. До какой десятичной будетъ вѣренъ полученный результатъ?

9. Допуская ряды для $\log_e(1+x)$ и e^x, показать, что приблизительно $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x\left(1-\frac{x^2}{2n}\right)$, если n будетъ большимъ числомъ; и найти слѣдующій членъ ряда, начинающагося съ выраженія, стоящаго во второй части.

10. Найти коэффиціентъ при x^n въ разложеніи $\frac{a+bx+cx^2}{e^x}$.

11. Показать, что $\log_e 4 = 1 + \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{3.4.5} + \frac{2}{5.6.7} + \ldots$

12. Показать, что $n^{n+2} - n(n-1)^{n+2} + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}(n-2)^{n+2} - \ldots = \left(\frac{n}{6} + \frac{n(n-1)}{8}\right)\lfloor n+2$.

ГЛАВА XL.

Сходимость и расходимость рядовъ.

553. Выраженіе $u_1+u_2+u_3+u_4+\ldots$ въ которомъ члены составляются одинъ изъ другого по нѣкоторому опредѣленному закону, причемъ число членовъ неограниченно велико, называется *безконечнымъ рядомъ* или *безконечною строкою*.

554. Безконечный рядъ называется *сходящимся*, когда сумма n его членовъ не можетъ по численной величинѣ превзойти нѣкотораго конечнаго количества, какъ-бы ни было велико n.

555. Безконечный рядъ называется *расходящимся*, когда сумма n первыхъ его членовъ можетъ быть сдѣлана численно больше всякой данной величины, если взять n достаточно большимъ.

556. Положимъ, что прибавляя все больше и больше членовъ къ безконечному ряду, мы постепенно приближаемся къ извѣстной величинѣ, такъ что сумма достаточно большого числа членовъ будетъ отличаться отъ этой величины меньше, чѣмъ на всякое данное число;— такая величина называется *суммою безконечнаго ряда*.

Напримѣръ, разсмотримъ безконечный рядъ

$$1+x+x^2+\ldots.$$

и предположимъ, что x будетъ величина положительная.

Мы знаемъ, что

$$1+x+x^2+\ldots.+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}.$$

Слѣдовательно, если x меньше единицы, то какъ-бы ни было велико n, сумма первыхъ n членовъ ряда будетъ меньше $\frac{1}{1-x}$; поэтому рядъ будетъ *сходящійся*. И такъ какъ, беря n достаточно большимъ, мы можемъ достигнуть того, что сумма n первыхъ членовъ будетъ отличаться отъ $\frac{1}{1-x}$ на величину меньшую какой угодно данной величины, то $\frac{1}{1-x}$ есть *сумма* этого безконечнаго ряда.

Если $x=1$, то рядъ становится расходящимся, потому что сумма n первыхъ членовъ будетъ n, а беря достаточное число членовъ, мы можемъ сдѣлать ее больше всякой конечной величины.

Если x больше единицы, то рядъ расходящійся, потому что сумма первыхъ n членовъ равна $\frac{x^n-1}{x-1}$, что можетъ быть сдѣлано больше всякой конечной величины, если взять n достаточно большимъ.

557. *Безконечный рядъ, въ которомъ всѣ члены имѣютъ одинаковые знаки, будетъ расходящимся, если каждый членъ его будетъ больше нѣкотораго даннаго конечнаго числа, хотя-бы и малаго.*

Дѣйствительно, если каждый членъ будетъ больше нѣкоторой величины c, то сумма первыхъ n членовъ будетъ больше nc, которое можетъ быть сдѣлано больше всякой конечной величины, если взять n достаточно большимъ.

558. *Безконечный рядъ членовъ, знаки которыхъ поперемѣнно положительны и отрицательны, будетъ сходящимся, если каждый членъ будетъ численно меньше предыдущаго члена.*

Пусть рядъ будетъ $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$; мы его можемъ написать такъ

$$(u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + \ldots$$

или еще такъ $$u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - (u_6 - u_7) - \ldots$$

Изъ перваго способа писать рядъ мы видимъ, что сумма всякаго числа членовъ будетъ положительная величина, а изъ второго способа видно, что сумма всякаго числа членовъ меньше u_1; отсюда заключаемъ, что рядъ этотъ *сходящійся*.

Необходимо показать въ этомъ случаѣ, что сумма какого нибудь числа членовъ будетъ *положительною*; потому что если мы знаемъ только, что эта сумма меньше u_1, то мы еще не можемъ быть увѣрены, что она не будетъ отрицательнымъ количествомъ безпредѣльной величины.

Относительно разсмотрѣннаго здѣсь ряда нужно обратить вниманіе на слѣдующее важное различіе. Если члены u_1, u_2, u_3... *уменьшаются безпредѣльно*, то сумма n членовъ и сумма $n+1$ члена будутъ отличаться на неопредѣленно малую величину, когда n взято достаточно большимъ. Но если члены u_1, u_2, u_3... *не уменьшаются безпредѣльно*, то сумма n членовъ и сумма $n+1$ членовъ будутъ всегда отличаться другъ отъ друга на нѣкоторую конечную величину. Рядъ, продолженный до безконечнаго числа членовъ, согласно съ опредѣленіемъ ст. 556, въ первомъ случаѣ будетъ имѣть сумму, но не будетъ ея имѣть въ послѣднемъ случаѣ. Въ обоихъ случаяхъ рядъ этотъ будетъ по нашему опредѣленію сходящимся. Но нѣкоторые писатели предпочитаютъ другое опредѣленіе сходимости, именно они считаютъ рядъ сходящимся только тогда, когда можно достигнуть, чтобы сумма неопредѣленно большого числа членовъ могла отличаться отъ нѣкотораго даннаго количества меньше чѣмъ на всякую данную величину; согласно съ этимъ опредѣленіемъ рядъ будетъ сходящимся въ первомъ случаѣ, но не будетъ такимъ во второмъ.

559. *Безконечный рядъ будетъ сходящимся, если, начиная съ какого нибудь опредѣленнаго члена, отношеніе каждаго члена къ своему предшествующему будетъ численно меньше нѣкоторой величины, которая сама меньше единицы.*

Пусть рядъ, начинающійся съ опредѣленнаго члена, будетъ

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

и пусть S означаетъ сумму n первыхъ изъ этихъ членовъ; тогда

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

$$= u_1 \left\{ 1 + \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_3 u_2}{u_2 u_1} + \frac{u_4 u_3 u_2}{u_3 u_2 u_1} + \ldots \right\}$$

Теперь пусть во-первыхъ всѣ члены будутъ положительными и предположимъ, что

$$\frac{u_2}{u_1} \text{ меньше } k, \quad \frac{u_3}{u_2} \text{ меньше } k, \quad \frac{u_4}{u_3} \text{ меньше } k, \ldots$$

Тогда S меньше $u_1 \{1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1}\}$, то-есть меньше, чѣмъ $u_1 \frac{1-k^n}{1-k}$. Слѣдовательно, если k меньше единицы, то S меньше, чѣмъ $\frac{u_1}{1-k}$. Такимъ образомъ сумма сколькихъ угодно членовъ, начинающихся съ u_1 будетъ меньше извѣстной конечной величины, а слѣдовательно рядъ, начинающійся съ u_1, будетъ сходящимся.

Во-вторыхъ, положимъ, что члены не всѣ положительны; тогда если всѣ они отрицательны, то численное значеніе суммы нѣкотораго числа ихъ будетъ то-же самое, какъ если-бы они были всѣ положительными; если-же нѣкоторые члены положительны, а нѣкоторые отрицательны, то сумма будетъ численно меньше, чѣмъ если-бы всѣ члены были положительными. Слѣдовательно безконечный рядъ опять будетъ сходящимся.

Такъ какъ безконечный рядъ, начинающійся съ u_1—сходящійся, то безконечный рядъ, начинающійся съ какого нибудь опредѣленнаго члена предъ u_1, будетъ такъ-же сходящійся, потому что мы здѣсь прибавляемъ только *конечное* число *конечныхъ* членовъ къ ряду, начинающемуся съ u_1.

560. *Безконечный рядъ будетъ расходящимся, если начиная съ какого нибудь опредѣленнаго члена, отношеніе каждаго члена къ его предыдущему будетъ больше единицы или равно единицѣ, а члены всѣ будутъ имѣть одинаковый знакъ.*

Пусть рядъ, начинающійся съ опредѣленнаго члена, будетъ

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

и пусть S означаетъ сумму первыхъ n изъ этихъ членовъ. Тогда

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$
$$= u_1 \left\{ 1 + \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_3 u_2}{u_2 u_1} + \frac{u_4 u_3 u_2}{u_3 u_2 u_1} + \ldots \right\}$$

Теперь положимъ во-первыхъ

$$\frac{u_2}{u_1} \text{ больше } 1, \quad \frac{u_3}{u_2} \text{ больше } 1, \quad \frac{u_4}{u_3} \text{ больше } 1, \ldots$$

Тогда S будетъ численно больше, чѣмъ $u_1 \{1 + 1 + \ldots + 1\}$, то-есть численно больше, чѣмъ nu_1. Слѣдовательно S можетъ быть сдѣлано по численной величинѣ больше всякаго конечнаго количества, если взять n достаточно большимъ, а слѣдовательно рядъ, начинающійся съ u_1 будетъ расходящимся.

Затѣмъ положимъ, что отношеніе каждаго члена къ предыдущему будетъ равно единицѣ; тогда $S=nu_1$, и это можетъ быть сдѣлано болѣе всякой конечной величины, если взять n достаточно большимъ.

И если мы начнемъ съ какого нибудь опредѣленнаго члена предъ u_1, то рядъ этотъ опять будетъ расходящимся.

561. Правила предыдущихъ статей дадутъ возможность опредѣлить во многихъ случаяхъ, будетъ-ли извѣстный рядъ сходящимся или расходящимся. Но есть одинъ случай, въ которомъ они *не примѣнимы* и который слѣдуетъ внимательно замѣтить—это случай, когда отношеніе каждаго члена къ предыдущему меньше единицы, но постоянно приближается къ единицѣ, такъ что мы не можемъ выбрать какого нибудь количества k, которое, будучи меньше единицы, оставалось-бы всегда меньше этого отношенія. Въ такомъ случаѣ, какъ это будетъ видно изъ примѣра въ слѣдующей статьѣ, рядъ *можетъ* быть сходящимся и расходящимся.

562. Разсмотримъ безконечный рядъ

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\ldots$$

Здѣсь отношеніе n-аго члена къ $(n-1)$-му равно $\left(\frac{n-1}{n}\right)^p$; если p будетъ положительное, то это отношеніе меньше единицы, но постоянно приближается къ единицѣ, по мѣрѣ того какъ n возрастаетъ. Такимъ образомъ этотъ случай не можетъ быть отличенъ посредствомъ одного изъ данныхъ раньше правилъ; но впрочемъ мы докажемъ, что рядъ этотъ сходящійся, если p больше единицы, и расходящійся, если p равно единицѣ или меньше единицы.

I. Положимъ, что p больше единицы.

Первый членъ ряда есть 1, слѣдующіе два члена вмѣстѣ меньше $\frac{2}{2^p}$, слѣдующіе четыре члена вмѣстѣ меньше $\frac{4}{4^p}$, слѣдующіе восемь членовъ меньше $\frac{8}{8^p}$, и такъ далѣе. Отсюда цѣлый рядъ будетъ меньше

$$1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\frac{8}{8^p}+\ldots.$$

то-есть меньше $1+x+x^2+x^3+\ldots.$,

гдѣ $x=\frac{2}{2^p}$. Такъ какъ p больше единицы, то x меньше единицы; слѣдовательно рядъ сходящійся.

II. Положимъ, что p равно единицѣ.

Рядъ теперь будетъ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots.$

Первый членъ 1, второй $\frac{1}{2}$, слѣдующіе два члена вмѣстѣ больше $\frac{2}{4}$ или $\frac{1}{2}$; слѣдующіе четыре члена вмѣстѣ больше $\frac{4}{8}$ или $\frac{1}{2}$, и такъ далѣе. Слѣдовательно, беря достаточное число членовъ, мы можемъ получить сумму больше всякаго конечнаго кратнаго отъ $\frac{1}{2}$; поэтому такой рядъ будетъ расходящимся.

III. Положимъ, что p меньше единицы или отрицательная величина.

Каждый членъ теперь больше, чѣмъ соотвѣтствующій членъ во II случаѣ; поэтому рядъ и *подавно* будетъ расходящимся.

563. Дадимъ теперь общую теорему, которую можно доказать по способу, объясненному на примѣрахъ въ предыдущей статьѣ.

Если $\varphi(x)$ будетъ положительнымъ для всякихъ положительныхъ цѣлыхъ значеній x и будетъ непрерывно уменьшаться съ возрастаніемъ x, а m будетъ нѣкоторое положительное цѣлое число, тогда два безконечные ряда

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(4)+\varphi(5)+\ldots$$

и

$$\varphi(1)+m\varphi(m)+m^2\varphi(m^2)+m^3\varphi(m^3)+\ldots$$

будутъ или оба сходящимися, или оба расходящимися.

Разсмотримъ всѣ члены перваго ряда, заключающіеся между $\varphi(m^k)$ и $\varphi(m^{k+1})$, включая послѣдній и исключая первый членъ, причемъ k будетъ нѣкоторое цѣлое положительное число. Число этихъ членовъ равно $m^{k+1}-m^k$, и слѣдовательно ихъ сумма больше $m^k(m-1)\varphi(m^{k+1})$. Такимъ образомъ весь первый рядъ, начиная съ члена $\varphi(m^k+1)$ будетъ больше, чѣмъ въ $\frac{m-1}{m}$ разъ противъ второго ряда, начиная съ члена $m^{k+1}\varphi(m^{k+1})$. Такимъ образомъ, если вторая строка будетъ расходящеюся, то такою-же будетъ и первая.

Притомъ, члены, выбранные изъ перваго ряда, меньше, чѣмъ $m^k(m-1)\varphi(m^k)$. Такимъ образомъ весь первый рядъ, начиная съ члена $\varphi(m^k+1)$, будетъ меньше, чѣмъ $m-1$ разъ взятый второй рядъ, начиная съ $m^k\varphi(m^k)$. Такимъ образомъ, если второй рядъ будетъ сходящимся, то такимъ-же будетъ и первый.

Какъ примѣръ употребленія этой теоремы мы можемъ взять слѣдующій: *рядъ, общій членъ котораго равенъ* $\frac{1}{\mathrm{n}(log\mathrm{n})^{\mathrm{p}}}$, *будетъ сходящимся, если* p *будетъ больше единицы, и расходящимся, если* p *будетъ равно единицѣ или меньше единицы.* По теоремѣ, предложенный рядъ будетъ сходящимся или расходящимся, смотря по тому, бу-

детъ-ли рядъ съ общимъ членомъ $\frac{m^n}{m^n(\log m^n)^p}$ сходящимся или расходящимся; но этотъ общій членъ равенъ $\frac{1}{(\log m)^p n^p}$, такъ что онъ находится въ *постоянномъ отношеніи* къ общему члену $\frac{1}{n^p}$ для всѣхъ значеній n. Слѣдовательно искомый выводъ получится по ст. 562.

564. *Рядъ, полученный отъ разложенія* $(1+x)^n$ *по теоремѣ Ньютона, будетъ сходящимся, если* x *будетъ численно меньше единицы.*

Дѣйствительно, отношеніе $(r+1)$-го члена къ члену r-ому равно $\frac{n-r+1}{r}x$. Если n будетъ число отрицательное и численно меньше единицы, то множитель $\frac{n-r+1}{r}$ будетъ численно больше единицы; но онъ будетъ непрерывно приближаться къ единицѣ и наконецъ будетъ отличаться отъ единицы меньше, чѣмъ на всякую данную величину, если взять r достаточно большимъ. Слѣдовательно, если x будетъ численно меньше единицы, то произведеніе $\frac{n-r+1}{r}x$, при достаточно большомъ r, будетъ численно меньше такого количества, которое само меньше единицы. А потому рядъ будетъ сходящійся. (Ст. 559).

Если n величина положительная, то множитель $\frac{n-r+1}{r}$ будетъ численно меньше единицы, когда r больше n. Если n величина отрицательная и численно меньше единицы, то этотъ множитель всегда будетъ численно меньше единицы; если $n=-1$, то тотъ же множитель численно будетъ равенъ единицѣ. Такимъ образомъ въ первомъ случаѣ, когда r больше n, а въ двухъ другихъ случаяхъ—всегда, если x численно меньше единицы, то произведеніе $\frac{n-r+1}{r}x$ будетъ по численной величинѣ меньше такого количества, которое само численно меньше единицы. Слѣдовательно рядъ будетъ сходящимся. (Ст. 559).

565. *Рядъ, полученный чрезъ разложеніе log* $(1+x)$ *по степенямъ* x, *будетъ сходящимся, если* x *численно меньше единицы.*

Дѣйствительно, отношеніе $(r+1)$-го члена къ члену r-ому равняется $-\frac{rx}{r+1}$. Поэтому, если x будетъ меньше единицы, то отношеніе это постоянно будетъ численно меньше нѣкоторой величины, которая сама численно меньше единицы. Слѣдовательно рядъ будетъ сходящимся. (Ст. 559).

566. *Рядъ, получающійся отъ разложенія* a^x *по степенямъ* x, *всегда будетъ сходящимся.*

Дѣйствительно, отношеніе $(r+1)$-го члена къ члену r-ому здѣсь равно $\frac{x\log_e a}{r}$. Каково-бы ни было значеніе x, мы можемъ взять r столь большимъ, что это отношеніе будетъ меньше единицы и будетъ уменьшаться съ возрастаніемъ r. Слѣдовательно такой рядъ всегда будетъ сходящимся (ст. 559).

Примѣры сходимости и расходимости рядовъ.

Изслѣдовать, будутъ-ли слѣдующіе ряды сходящимися или расходящимися.

1. $\frac{1}{x(x+a)}+\frac{1}{(x+2a)(x+3a)}+\frac{1}{(x+4a)(x+5a)}+\ldots$

2. $\frac{3}{2}x+\frac{5x^2}{5}+\frac{7x^3}{10}+\frac{9x^4}{17}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2+1}x^n+\ldots$

3. $\frac{m+p}{a}+\frac{m+2p}{a^2}+\frac{m+3p}{a^3}+\ldots$

4. $(a+1)^2+(a+2)^2x+(a+3)^2x^2+\ldots$

5. $1^2+2^2x+3^2x^2+\ldots$

6. $\frac{1}{2}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{1+\sqrt{4}}+\ldots$

7. $\frac{x}{1+x^3}+\frac{x^2}{1+x^4}+\frac{x^3}{1+x^5}+\ldots$

8. $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}+\ldots$

9. $1^n+2^nx+3^nx^2+\ldots$

10. $\frac{x}{(a+b)^p}+\frac{x^2}{(a+2b)^p}+\frac{x^3}{(a+3b)^p}+\ldots$

11. Положимъ, что въ ряду $u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots$ каждый членъ меньше предыдущаго; показать, что этотъ рядъ, а такъ-же и рядъ $u_0+2u_1+2^2u_3+2^3u_7+2^4u_{15}+\ldots$ оба будутъ сходящимися или расходящимися.

12. Показать, что рядъ $1+\frac{1}{2^n}+\frac{2}{3^n}+\frac{3}{4^n}+\ldots$ будетъ сходящійся, если n больше 2, и расходящійся, если n меньше 2, или равно 2.

ГЛАВА XLI.

Ростъ или проценты.

567. *Ростомъ* или *процентами* называются деньги, платимыя за пользованіе деньгами. Взятую въ ссуду или занятую сумму мы будемъ называть *начальнымъ капиталомъ*, а сумму, въ которую обратится начальный капиталъ отъ приращенія процентами чрезъ извѣстное время, будемъ называть *окончательнымъ* капиталомъ или *итогомъ*.

568. Проценты бываютъ двухъ родовъ—*простые* и *сложные*. Если проценты на капиталъ берутся по мѣрѣ ихъ накопленія, то это будутъ проценты *простые*, но если процентныя деньги причисляются къ капиталу, такъ что проценты идутъ и съ этой суммы, то проценты тогда называются *сложными*.

569. *Таксою* процентовъ или роста называются деньги, платимыя за пользованіе опредѣленной одной и той-же суммой денегъ въ опредѣленное время. На *практикѣ* за такую сумму принимаются обыкновенно 100 рублей, а срокъ—одинъ годъ; такъ что, когда говорятъ, что деньги взяты по $4^1|_2$ процента, то это значитъ, что за пользованіе 100 рублями въ годъ платится 4 р. 50 к. Въ *теоріи*, какъ мы увидимъ, удобнѣе разсчитывать на *одинъ* рубль въ одинъ годъ.

570. *Найти, во что обратится данный капиталъ чрезъ данное время при простыхъ процентахъ.*

Пусть P будетъ капиталъ, выраженный въ рубляхъ, n число лѣтъ, за которые берутся проценты, r прибыль или ростъ съ каждаго рубля въ годъ и M—окончательный капиталъ.

Такъ какъ r есть прибыль, приносимая каждымъ рублемъ въ годъ, то Pr будетъ прибыль съ P рублей въ годъ, а слѣдовательно nPr будетъ прибыль съ P рублей въ n лѣтъ; поэтому

$$M=P+Pnr.$$

Изъ этого уравненія, если три изъ величинъ M, P, n, r будутъ даны, можно найти четвертую; такъ

$$P=\frac{M}{1+nr},\quad n=\frac{M-P}{Pr},\quad r=\frac{M-P}{Pn}.$$

571. *Найти, во что обратится данный капиталъ въ данное время при сложныхъ процентахъ.*

Пусть R означаетъ то, во что обратится каждый рубль по истеченіи одного года, такъ что $R=1+r$; тогда PR будетъ представлять сумму, въ которую обратится капиталъ P рублей чрезъ одинъ годъ; капиталъ PR обратится черезъ годъ въ PRR или въ PR^2, и это

будетъ та сумма, въ которую обратится начальный капиталъ P черезъ *два* года при сложныхъ процентахъ. Подобнымъ образомъ капиталъ PR^2 обратится черезъ годъ въ PR^3, что представитъ собою сумму, въ которую обратится капиталъ P черезъ *три* года. Продолжая такимъ образомъ, мы найдемъ, что капиталъ P чрезъ n лѣтъ обратится въ PR^n; слѣдовательно, обозначая окончательный капиталъ буквой M, получимъ

$$M=PR^n.$$

Слѣдовательно $P=\frac{M}{R^n}$, $n=\frac{\log M-\log P}{\log R}$, $R=\left(\frac{M}{P}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Прибыль, пріобрѣтаемая въ n годовъ будетъ $M-P$ или $P(R^n-1)$.

572. Теперь положимъ, что проценты должны выплачиваться или наростать чаще, чѣмъ *одинъ разъ* въ годъ; напримѣръ, положимъ, что разсчетъ процентовъ совершается по четвертямъ года, и пусть $\frac{r}{4}$ будетъ прибыль съ рубля за четверть года. Тогда капиталъ P при сложныхъ процентахъ въ n лѣтъ обратится въ $P\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4n}$; потому что очевидно это все равно, какъ если-бы число лѣтъ было $4n$, а прибыль въ годъ съ рубля была-бы $\frac{r}{4}$. Подобнымъ образомъ, при сложныхъ процентахъ, если-бы разсчетъ производился q разъ въ годъ по $\frac{r}{q}$ съ рубля за каждый промежутокъ, то капиталъ P въ n лѣтъ обратился бы въ $P\left(1+\frac{r}{q}\right)^{qn}$.

При простыхъ процентахъ въ этихъ предполагаемыхъ случаяхъ итогъ получился бы тотъ-же, какъ если-бы уплата процентовъ совершалась за годъ, причемъ каждый рубль приносилъ-бы прибыль r.

573. Формулы предыдущихъ статей были получены при предположеніи, что n число цѣлое; спрашивается, будутъ-ли онѣ вѣрны, когда n не будетъ цѣлымъ числомъ? Положимъ, что $n=m+\frac{1}{\mu}$, гдѣ m нѣкоторое цѣлое число, а $\frac{1}{\mu}$ правильная дробь. При *простыхъ* процентахъ, прибыль съ P въ m лѣтъ равняется Pmr; и если заемщикъ согласился платить за *нѣкоторую дробь* года *такую-же* часть годового роста, тогда проценты съ P рублей за $\left(\frac{1}{\mu}\right)$-ю часть года будутъ $\frac{Pr}{\mu}$, а слѣдовательно всѣ процентныя деньги будутъ $Pmr+\frac{Pr}{\mu}$, то-есть Pnr и

формула для простыхъ процентовъ останется справедливою, если n и не будетъ цѣлымъ числомъ.

Теперь разсмотримъ случай *сложныхъ* процентовъ. Капиталъ P въ m лѣтъ обращается въ PR^m; если за дробь года проценты берутся на тѣхъ-же условіяхъ, какъ и раньше, то проценты съ PR^m за $\left(\frac{1}{\mu}\right)$-ю часть года будутъ $\frac{PR^m r}{\mu}$, а вся сумма будетъ $PR^m\left(1+\frac{r}{\mu}\right)$. При этомъ предположеніи оказывается такимъ образомъ, что формула не остается справедливой при n не цѣломъ. Чтобы сдѣлать формулу вѣрной, должно допустить, что одинъ рубль чрезъ $\left(\frac{1}{\mu}\right)$-ю часть года обращается въ $(1+r)^{\frac{1}{\mu}}$, и что слѣдовательно прибыль за $\left(\frac{1}{\mu}\right)$-ю часть года будетъ $(1+r)^{\frac{1}{\mu}}-1$. Хотя на практикѣ такого предположенія не дѣлается, но оно часто допускается въ теоріи, чтобы формулы могли быть справедливыми вообще.

Подобнымъ образомъ, если проценты должны насчитываться q разъ въ годъ, то капиталъ P чрезъ n лѣтъ обращается въ $P\left(1+\frac{r}{q}\right)^{qn}$ (ст. 572) если n—цѣлое число; но въ теоріи принимается, что формула эта справедлива и тогда, когда n не будетъ цѣлымъ числомъ.

574. Капиталъ P при разсчетѣ процентовъ q разъ въ годъ обращается въ $P\left(1+\frac{r}{q}\right)^{nq}$ (по ст. 572); если мы предположимъ, что q безпредѣльно возрастаетъ, то это выраженіе (по ст. 552) обратится въ Pe^{nr}, которое представитъ, во что-бы обратился капиталъ, если бы проценты наростали въ каждый моментъ.

575. *Дѣйствительной* или *наличной цѣнностью* какого нибудь денежнаго обязательства, подлежащаго уплатѣ въ данный срокъ, называется занимаемая сумма, вмѣстѣ съ процентами на нее за истекшее время. Въ моментъ заключенія обязательства *дѣйствительной* или *наличной* цѣнностью его будетъ сама занимаемая сумма безъ процентовъ.

576. *Учетомъ* или *дисконтомъ* называется сбавка или уступка за уплату денегъ раньше срока платежа.

Изъ опредѣленія *дѣйствительной* или *наличной* цѣнности долгового обязательства слѣдуетъ, что долгъ, подлежащій уплатѣ въ будущемъ къ извѣстному сроку, можетъ быть погашенъ во всякое время уплатой *наличной* его величины въ это время. Слѣдовательно *учетъ* долженъ быть равенъ разности между величиною долга въ условленный срокъ и настоящею, т.-е. *наличною* его величиною.

577. *Найти дѣйствительную цѣнность долгового обязательства, уплачиваемаго по истеченіи извѣстнаго времени и опредѣлить величину учета.*

Пусть P будетъ дѣйствительная цѣнность, M сумма, значущаяся въ обязательствѣ (съ процентами), D—учеть, r прибыль на 1 рубль въ годъ, n число лѣтъ, R—величина, въ которую обращается при данныхъ условіяхъ одинъ рубль въ годъ; тогда

При простыхъ процентахъ

$$M=P(1+nr), \text{ (ст. 570);}$$

слѣдовательно $$P=\frac{M}{1+nr}, \quad D=M-P=\frac{Mnr}{1+nr}.$$

При сложныхъ процентахъ

$$M=PR^n \text{ (ст. 571);}$$

слѣдовательно $$P=\frac{M}{R^n}, \quad D=M-P=\frac{M(R^n-1)}{R^n}.$$

578. На практикѣ большею частью принято сбавлять *проценты* съ той суммы денегъ, которая платится до срока, не дѣлая *учета* въ томъ смыслѣ, какъ мы его опредѣлили. Такъ, при простыхъ процентахъ вмѣсто $\frac{Mnr}{1+nr}$ должникъ получилъ-бы при немедленной уплатѣ, т.-е. сейчасъ же по заключеніи займа, сбавку Mnr.

Примѣры процентовъ.

1. Показать, что при простыхъ процентахъ учетъ представляетъ половину средняго гармоническаго между занятой суммой и процентами на нее.

2. При простыхъ процентахъ прибыль съ извѣстной суммы денегъ равна 180 рублямъ, а учетъ на эту-же сумму въ то-же время и по той-же таксѣ процентовъ равняется 150 рубл. Найти эту сумму.

3. Если прибыль съ A рублей въ годъ равна учету съ B рублей за то-же время, то найти таксу процентовъ.

4. Если извѣстная сумма денегъ удваивается въ 40 лѣтъ при простыхъ процентахъ, то найти величину процента.

5. Торговецъ назначаетъ своимъ товарамъ двѣ цѣны—одну при продажѣ на наличныя деньги, и другую при продажѣ въ кредитъ на 6 мѣсяцевъ; найти, какое отношеніе должно быть между обѣими цѣнами, если надбавка составляетъ 5 простыхъ процентовъ.

6. Найти, во сколько лѣтъ 100 рублей обратятся въ 1050 рублей при сложномъ ростѣ по 5 на 100, зная, что

$$\log 14=1.14613, \quad \log 15=1.17609, \quad \log 16=1.20412.$$

7. Найти, чрезъ сколько лѣтъ извѣстная сумма денегъ утроится при сложномъ ростѣ по $3^1/_2$ на 100, зная, что

$$\log 10350 = 4.01494,\ \log 3 = 0.47712.$$

8. Если нѣкоторая сумма денегъ при данной величинѣ сложныхъ процентовъ въ m лѣтъ увеличивается въ p разъ, а въ n лѣтъ увеличивается въ q разъ, то показать, что $n = m\log_p q$.

ГЛАВА XLII.

Уравненіе платежей.

579. Когда одно лицо должно другому нѣсколько разныхъ суммъ денегъ, уплата которыхъ должна быть произведена въ разные сроки, то можно предложить вопросъ: найти срокъ, въ который слѣдуетъ уплатить всѣ долги одновременно, чтобы ни заимодавецъ, ни должникъ ничего не теряли. Это называется уравненіемъ сроковъ платежей.

580. *Найти срокъ платежа по двумъ долгамъ, уплачиваемымъ въ разное время, предполагая простые проценты.*

Пусть P_1 и P_2 будутъ суммы, уплачиваемыя соотвѣтственно чрезъ t_1 и t_2 годовъ; положимъ, что t_2 больше t_1; пусть еще r означаетъ прибыль съ каждаго рубля въ годъ и x число лѣтъ, чрезъ которое можно уплатить оба долга одновременно.

Условіе справедливости разсчета для обѣихъ сторонъ будетъ обезпечено, если мы предположимъ, что учетъ, слагаемый съ данной суммы, при уплатѣ ея до срока, равняется процентнымъ деньгамъ, насчитываемымъ на эту сумму при уплатѣ ея въ условленный срокъ.

Учетъ съ P_2 за $t_2 - x$ лѣтъ будетъ $\dfrac{P_2(t_2-x)r}{1+(t_2-x)r}$;

прибыль на P_1 за $x - t_1$ лѣтъ будетъ $P_1(x-t)r$;

слѣдовательно $$\frac{P_2(t_2-x)}{1+(t_2-x)r} = P_1(x-t_1).$$

Это приводитъ къ квадратному уравненію относительно x, именно

$$P_1 r x^2 - \{P_1 r(t_1+t_2) + P_1 + P_2\}x + P_1 r t_1 t_2 + P_1 t_1 + P_2 t_2 = 0;$$

причемъ надо взять тотъ его корень, который заключается между t_1 и t_2.

581. Другой способъ найти рѣшеніе вопроса предыдущей статьи заключается въ слѣдующемъ:

Дѣйствительная величина долга P_1, уплачиваемаго чрезъ t_1 лѣтъ, есть $\frac{P_1}{1+t_1r}$;

дѣйствительная величина долга P_2, уплачиваемаго чрезъ t_2 лѣтъ, есть $\frac{P_2}{1+t_2r}$;

дѣйствительная величина долга P_1+P_2, уплачиваемаго чрезъ x лѣтъ, есть $\frac{P_1+P_2}{1+xr}$.

Такимъ образомъ искомое время одновременнаго платежа x можно получить изъ уравненія

$$\frac{P_1}{1+t_1r}+\frac{P_2}{1+t_2r}=\frac{P_1+P_2}{1+xr}.$$

582. Если подобный вопросъ представляется въ практикѣ, то употребляютъ способъ, предложенный въ первомъ рѣшеніи съ тѣмъ исключеніемъ, что заимодавецъ вмѣсто того, чтобы произвести *учетъ*, просто сложитъ *проценты* съ суммы, платимой раньше срока; такимъ образомъ мы должны будемъ найти x изъ уравненія

$$P_2(t_2-x)r=P_1(x-t_1)r,$$

откуда $$(P_1+P_2)x=P_1t_1+P_2t_2.$$

Въ этомъ случаѣ прибыль на P_1+P_2 за x лѣтъ равна суммѣ прибылей съ P_1 и P_2 соотвѣтственно за время t_1 и t_2; это сдѣлается очевиднымъ, когда мы помножимъ обѣ части послѣдняго уравненія на r. Это правило выгоднѣе для заемщика, чѣмъ данное въ ст. 580, потому что при такомъ разсчетѣ *проценты* на сумму, уплачиваемую въ срокъ, больше, чѣмъ *учетъ*. См. ст. 577.

583. Положимъ, что нѣсколько суммъ P_1, P_2, P_3, ... заняты соотвѣтственно на сроки въ t_1, t_2, t_3... лѣтъ, и требуется найти срокъ одновременной уплаты.

Первый способъ рѣшенія (ст. 580) становится въ этомъ случаѣ очень сложнымъ, поэтому мы его оставимъ.

Второй способъ (ст. 581) даетъ для опредѣленія x, т. е. времени въ случаѣ уравненія сроковъ платежей, выраженіе

$$\frac{P_1}{1+t_1r}+\frac{P_2}{1+t_2r}+\frac{P_3}{1+t_3r}+\ldots=\frac{P_1+P_2+P_3+\ldots}{1+xr}.$$

Означимъ сумму $\frac{P_1}{1+t_1r}+\frac{P_2}{1+t_2r}+\frac{P_3}{1+t_3r}+\ldots$ чрезъ $\Sigma\frac{P}{1+tr}$, а сумму $P_1+P_2+P_3+\ldots$ чрезъ ΣP; тогда предыдущее выраженіе можно будетъ написать такъ

$$\Sigma\left(\frac{P}{1+tr}\right)=\frac{\Sigma P}{1+xr}.$$

Третій способъ (ст. 582) даетъ

$$x(P_1+P_2+P_3+\ldots)=P_1t_1+P_2t_2+P_3t_3+\ldots;$$

что можно писать такъ: $x\Sigma P=\Sigma Pt$.

584. Вопросъ объ *уравненіи платежей* не имѣетъ практической важности и вѣроятно удерживается въ книгахъ главнымъ образомъ по причинѣ кажущагося парадокса, представляемаго различными способами, которые повидимому одинаково вѣрны, но доставляютъ различные результаты. Мы отсылаемъ любознательнаго читателя для лучшаго ознакомленія съ этимъ вопросомъ къ статьѣ *Дисконтъ* въ *Англійской Энциклопедіи* (English Cyclopoedia). Однако нужно замѣтить, что если здѣсь встрѣчается какое нибудь затрудненіе, то оно состоитъ въ томъ, что *простые* проценты представляютъ почти чистую фикцію: моментъ, въ который должна быть уплачена извѣстная сумма, важенъ не потому, что она будетъ называться капитальной суммой или процентами, такъ какъ это для капиталиста все равно; и такимъ образомъ, если проценты на занятыя деньги остаются за заемщикомъ, то для соблюденія справедливости относительно заимодавца они должны быть присоединяемы къ капитальной суммѣ, послѣ чего на нихъ должны быть насчитываемы проценты.

585. Если имѣются въ виду сложные проценты, то рѣшеніе уравненій въ ст. 580 и 581 приведетъ къ такому-же результату.

Дѣйствительно, рѣшеніе по ст. 580 будетъ слѣдующее:

Учетъ съ P_2 за t_2-x лѣтъ будетъ $P_2\left(1-\frac{1}{R^{t_2-x}}\right)$,

проценты съ P_1 за $x-t_1$ лѣтъ будутъ $P_1(R^{x-t_1}-1)$;

слѣдовательно $$P_2\left(1-\frac{1}{R^{t_2-x}}\right)=P_1(R^{x-t_1}-1).$$

Изъ этого уравненія должно найти x. Перенеся члены, мы увидимъ, что это то-же самое уравненіе, какое получается по способу ст. 581; дѣйствительно, мы получимъ

$$P_1+P_2=\frac{P_2}{R^{t_2-x}}+P_1R^{x-t_1};$$

слѣдовательно $$\frac{P_1+P_2}{R^x}=\frac{P_1}{R^{t_1}}+\frac{P_2}{R^{t_2}};$$

это показываетъ, что x будетъ таково, что дѣйствительная цѣнность суммы P_1+P_2, уплачиваемой чрезъ x лѣтъ, равна суммѣ дѣйствительныхъ цѣнностей P_1 и P_2, уплачиваемыхъ соотвѣтственно чрезъ t_1 и t_2 лѣтъ.

586. Если нѣсколько различныхъ суммъ P_1, P_2, P_3, ... подлежатъ уплатѣ соотвѣтственно черезъ t_1, t_2, t_3 ... лѣтъ, то время x уплаты

при уравненіи сроковъ платежей, считая сложные проценты, можетъ быть найдено изъ уравненія

$$\frac{P_1+P_2+P_3+\ldots}{R^x}=\frac{P_1}{R^{t_1}}+\frac{P_2}{R^{t_2}}+\frac{P_3}{R^{t_3}}+\ldots,$$

что можно написать такъ

$$\frac{\Sigma P}{R^x}=\Sigma\left(\frac{P}{R^t}\right).$$

587. Въ ст. 580 мы сказали, что нужно взять тотъ корень квадратнаго уравненія, который заключается между t_1 и t_2; теперь мы докажемъ, что въ этомъ случаѣ между t_1 и t_2 всегда существуетъ одинъ, и только одинъ корень.

Намъ нужно доказать, что *уравненіе*

$$P_1(x-t_1)\{1+(t_2-x)r\}-P_2(t_2-x)=0$$

имѣетъ одинъ, и только одинъ корень, заключающійся между t_1 и t_2.

Выраженіе $P_1(x-t_1)\{1+(t_2-x)r\}-P_2(t_2-x)$ очевидно будетъ *положительнымъ* при $x=t_2$. Если это *выраженіе* будетъ расположено въ видѣ ax^2+bx+c, то коэффиціентъ a будетъ отрицательнымъ, такъ какъ онъ равенъ $-P_1r$; слѣдовательно t_2 должно заключаться между корнями этого *уравненія* (ст. 339); то-есть одинъ корень будетъ больше t_2, а другой меньше t_2. Но совершенно очевидно, что никакое значеніе x меньшее t_1 не можетъ обратить въ нуль это *выраженіе*, такъ что не можетъ быть корня *уравненія* меньше чѣмъ t_1; такимъ образомъ здѣсь долженъ существовать *одинъ* корень между t_1 и t_2 и одинъ корень больше t_2.

Можно замѣтить, что значеніе $x=t_2+\frac{1}{r}$ также дѣлаетъ предыдущее выраженіе положительнымъ; такъ что корень, превышающій t_2, по ст. 339, долженъ быть больше $t_2+\frac{1}{r}$.

Разные примѣры.

1. Найти срокъ одновременной уплаты двухъ суммъ, изъ которыхъ одна въ 400 рублей должна уплачиваться черезъ 2 года, а другая въ 2100 рублей—черезъ 8 лѣтъ отъ даннаго момента, считая по 5 со 100 (ст. 580).

2. Найти срокъ одновременной уплаты двухъ суммъ, изъ которыхъ одна въ 20 рублей подлежитъ уплатѣ сейчасъ, а другая въ 16 руб. 25 коп.—черезъ 270 дней отъ настоящаго времени, считая ростъ по $1\frac{1}{24}$ копѣйки съ сотни рублей въ день.

*

3. Уравнять сроки платежей двухъ суммъ денегъ, подлежащихъ уплатѣ въ разное время, предполагая, что ростъ идетъ непрерывно въ каждый моментъ.

4. По завѣщанію оставлена извѣстная сумма денегъ, которая должна быть раздѣлена на такія три части, чтобы послѣ приращенія ихъ сложными процентами соотвѣтственно въ a, b, c лѣтъ могли получиться равныя суммы. Опредѣлить эти части.

5. Если a и n—цѣлыя положительныя числа, то цѣлая часть выраженія $\{a+\sqrt{(a^2-1)}\}^n$ будетъ нечетное число.

6. Если a и n—цѣлыя положительныя числа, то цѣлая часть выраженія $\{\sqrt{(a^2+1)}+a\}^n$ будетъ нечетнымъ числомъ, когда n четное, и четнымъ, когда n нечетное.

7. Показать, что остатокъ послѣ n членовъ разложенія $\left(\frac{a}{a+x}\right)^2$ въ рядъ по восходящимъ степенямъ x будетъ

$$\frac{(-1)^n x^n}{a^{n-1}} \cdot \frac{(n+1)a+nx}{(a+x)^2}.$$

8. Если $\psi(n, r)=n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$, то показать, что

$$\psi(n, r)=\psi(n-2, r)+2r\psi(n-2, r-1)+r(r-1)\psi(n-2, r-2).$$

9. Если $\varphi(n, r)=\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{\lfloor\underline{r}}$, то показать, что

$$\varphi(n, m)=\varphi(n-m+1, 1)+\varphi(m-1, 1)\varphi(n-m+1, 2)+\varphi(m-1, 2)\varphi(n-m+1, 3)+\ldots$$

10. При томъ-же обозначеніи показать, что

$$\alpha-(\alpha+\beta)\varphi(n, 1)+(\alpha+2\beta)\varphi(n, 2)-(\alpha+3\beta)\varphi(n, 3)+\ldots+(-1)^n(\alpha+n\beta)\varphi(n, n)=0.$$

11. Есло s будетъ сумма n членовъ геометрической прогрессіи, первый членъ которой a, а знаменатель $1+x$, гдѣ x очень малая величина, то показать, что $n=\frac{s}{a}\left\{1-\frac{(s-a)x}{2a}\right\}$ (приблизительно).

12. Если нѣкоторое количество измѣняется непрерывно по своей величинѣ отъ a до b въ данное время t_1, причемъ приращеніе его въ какой нибудь моментъ находится въ постоянномъ отношеніи къ его величинѣ въ этотъ моментъ, то показать, что его величина во всякое время t будетъ $a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{t}{t_1}}$ (ст. 574).

ГЛАВА XLIII.

Срочные платежи.

588. *Найти сумму, какая накопится отъ неуплаты ежегодныхъ платежей за данное число лѣтъ, считая простые проценты на каждый изъ платежей съ того времени, когда его надлежало уплатить.*

Пусть A означаетъ ежегодный платежъ, n—число лѣтъ, r—величину роста или прибыли на 1 рубль въ годъ и M—искомую сумму.

Въ концѣ перваго года надлежало уплатить A, поэтому въ концѣ второго года проценты на первый платежъ будутъ rA; въ концѣ этого-же года, благодаря новой неуплатѣ, капитальная сумма обратится въ $2A$, а слѣдовательно процентовъ къ концу третьяго года накопится $2rA$; такимъ-же точно образомъ къ концу четвертаго года росту накопится $3rA$, и такъ далѣе. Слѣдовательно втеченіе n лѣтъ накопится всего процентовъ

$$rA+2rA+3rA+\ldots.+(n-1)rA, \text{ т. е. } \frac{n(n-1)rA}{2} \text{ (ст. 459),}$$

и кромѣ того остается неуплаченныхъ nA годовыхъ платежей; слѣдовательно вся искомая сумма будетъ

$$M=nA+\frac{n(n-1)}{2}rA.$$

589. *Найти дѣйствительную или первоначальную сумму долга, погашаемую ежегодными уплатами втеченіе извѣстнаго числа лѣтъ, считая простые проценты.*

Пусть P означаетъ первоначальную величину долга; тогда капиталъ P, вмѣстѣ съ процентами на него за n лѣтъ долженъ равняться долгу, образовавшемуся отъ невзноса годовыхъ платежей за то-же время, то-есть

$$P+Pnr=nA+\frac{n(n-1)}{2}rA;$$

слѣдовательно
$$P=\frac{nA+\frac{1}{2}n(n-1)rA}{1+nr}.$$

590. Для рѣшенія задачи въ предыдущей статьѣ можно предложить и другой способъ.

Если черезъ годъ уплачивается сумма A, то начальная ея величина была $\frac{A}{1+r}$ (ст. 577); если черезъ два года уплачивается A, то на-

чальная величина этого долга была $\frac{A}{1+2r}$; точно также сумма A, уплачиваемая черезъ три года, въ началѣ была $\frac{A}{1+3r}$, и такъ далѣе. Слѣдовательно первоначальная величина долга, погашаемаго такими годовыми платежами въ n лѣтъ, должна равняться суммѣ начальныхъ величинъ платежей въ разные годы; поэтому

$$P=A\left\{\frac{1}{1+r}+\frac{1}{1+2r}+\frac{1}{1+3r}+\ldots+\frac{1}{1+nr}\right\}.$$

591. Одни изъ составителей курсовъ Алгебры принимали рѣшеніе, данное въ ст. 589, другіе-же предпочитали рѣшеніе ст. 590. Мы уже упоминали въ одномъ изъ подобныхъ случаевъ (ст. 584), что рѣшеніе такихъ вопросовъ при *простыхъ* процентахъ не можетъ быть вполнѣ удовлетворительнымъ. Въ этомъ отношеніи читатель можетъ получить нужныя свѣдѣнія, обратившись къ *Алгебрѣ* Вуда (Wood), къ *Курсу Ариѳметики* и *Алгебры* въ «Библіотекѣ полезныхъ знаній» и къ статьѣ *Дисконтъ* въ *Англійской Энциклопедіи*.

592. Формулы ст. 589 и 590 доставляютъ *безконечную* величину для P, если срочные платежи обращаются въ *вѣчные*. Въ самомъ дѣлѣ, величина P въ ст. 589 можетъ быть написана

$$\frac{A+\frac{1}{2}(n-1)rA}{\frac{1}{n}+r};$$

когда n становится безконечностью, то знаменатель этого выраженія обращается въ r, между тѣмъ какъ числитель становится безконечно большимъ. Итакъ P обращается въ безконечность, и сумма ряда для P въ ст. 590 будетъ такъ-же безконечною.

Этотъ выводъ есть другое указаніе на то, что величина годичныхъ уплатъ должна быть опредѣляема иначе. Перейдемъ теперь къ предположенію разсчета по сложнымъ процентамъ.

593. *Найти сумму, какая накопится отъ неуплаты ежегодныхъ платежей за данное число лѣтъ, считая сложные проценты.*

Пусть A будетъ ежегодный платежъ, n—число лѣтъ, R—величина, въ которую обращается 1 рубль черезъ годъ, и M—искомая сумма долга.

Въ концѣ перваго года надлежало уплатить A; въ концѣ второго года неуплаченный первый годичный платежъ обратится въ RA; слѣдовательно вся сумма, подлежащая уплатѣ въ концѣ второго года, будетъ $RA+A$, то-есть $(R+1)A$; подобнымъ образомъ въ концѣ третьяго года вся сумма, подлежащая уплатѣ, должна быть $R(R+1)A+A$,

то-есть $(R^2+R+1)A$ и т. д. Слѣдовательно вся сумма, которую надлежитъ уплатить въ концѣ n-го года, будетъ

$$(R^{n-1}+R^{n-2}+\ldots+R^2+R+1)A;\text{ а потому } M=\frac{R^n-1}{R-1}A.$$

594. *Найти дѣйствительную или первоначальную величину долга, погашаемаго ежегодными платежами втеченіе извѣстнаго числа лѣтъ, считая сложные проценты.*

Пусть P означаетъ эту начальную величину долга; тогда сумма, въ которую обратится P втеченіе n лѣтъ, должна быть равна суммѣ долга, накопляющагося отъ невзноса ежегодныхъ платежей за то-же время; то-есть

$$PR^n=\frac{R^n-1}{R-1}A;$$

слѣдовательно
$$P=\frac{1-R^{-n}}{R-1}A=\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}A.$$

595. Мы можемъ также рѣшить вопросъ предыдущей статьи, предполагая, что P равно суммѣ первоначальныхъ величинъ, соотвѣтствующихъ платежамъ въ разные годы.

Первоначальная величина суммы A, платимой черезъ годъ, была $\frac{A}{R}$, первоначальная величина суммы A, платимой черезъ 2 года, была $\frac{A}{R^2}$, первоначальная величина суммы A, платимой черезъ 3 года, была $\frac{A}{R^3}$, и такъ далѣе; слѣдовательно

$$P=\frac{A}{R}+\frac{A}{R^2}+\frac{A}{R^3}+\ldots+\frac{A}{R^n}=\frac{\frac{A}{R}\left(1-\frac{1}{R^n}\right)}{1-\frac{1}{R}}=\frac{A(1-R^{-n})}{R-1}.$$

596. *Найти дѣйствительную величину займа, погашаемаго вѣчными срочными платежами.*

Въ формулѣ $P=\frac{A(1-R^{-n})}{R-1}$ положимъ n равнымъ безконечности, тогда
$$P=\frac{A}{R-1}=\frac{A}{r}.$$

597. *Найти, какой капиталъ нужно положить въ банкъ, чтобы чрезъ* p *лѣтъ получать данный годовой доходъ втеченіе* q *лѣтъ.*

Первоначальная величина капитала, выплачивающагося черезъ p лѣтъ ежегодными уплатами втеченіе q лѣтъ, найдется чрезъ вычитаніе первоначальной величины ежегоднаго дохода за p лѣтъ изъ первоначаль-

ной величины ежегоднаго дохода за $q+p$ лѣтъ; такимъ образомъ мы получимъ

$$A\frac{1-R^{-(p+q)}}{R-1}-A\frac{1-R^{-p}}{R-1}, \text{ то-есть } \frac{A}{R-1}(R^{-p}-R^{-p-q}).$$

Если годовой доходъ начнется черезъ p лѣтъ и затѣмъ будетъ продолжаться всегда, то нужно положить q безконечно большимъ, и тогда первоначальный капиталъ будетъ $\frac{AR^{-p}}{R-1}$. Это можно получить и прямо, потому что первоначальная величина капитала представится тогда безконечною строкою

$$\frac{A}{R^{p+1}}+\frac{A}{R^{p+2}}+\frac{A}{R^{p+3}}+\ldots$$

598. Предыдущая статья можетъ быть приложена къ вычисленію приплаты, которую нужно дѣлать при возобновленіи договора. Положимъ, что извѣстное имущество, приносящее A рублей дохода въ годъ, сдано въ наемъ на $p+q$ лѣтъ за извѣстную сумму денегъ, и что по прошествіи q лѣтъ наниматель пожелаетъ удержать его за собою вновь на $p+q$ лѣтъ; въ такомъ случаѣ онъ долженъ уплатить сумму, равняющуюся цѣнности ежегоднаго дохода въ A рублей, начинающагося черезъ p лѣтъ и продолжающагося втеченіе слѣдующихъ q лѣтъ. Эта сумма называется приплатой при возобновленіи договора на q лѣтъ.

599. Въ настоящей главѣ мы ограничивались до сихъ поръ случаемъ, когда проценты насчитываются и платежи производятся одинъ разъ въ годъ. Теперь мы дадимъ болѣе общее предложеніе.

Найти сумму, какая накопится отъ неуплаты срочныхъ платежей за n *лѣтъ при сложныхъ процентахъ, предполагая, что проценты насчитываются* q *разъ въ годъ, а платежи должны-бы были производиться* m *разъ въ годъ.*

Пусть $\frac{r}{q}$ будетъ ростъ одного рубля въ $\left(\frac{1}{q}\right)^{\text{-ю}}$ часть года; тогда по ст. 573 одинъ рубль въ s лѣтъ обратится въ $\left(1+\frac{r}{q}\right)^{sq}$, гдѣ s можетъ быть цѣлымъ числомъ или нѣтъ; такимъ образомъ за $\left(\frac{1}{m}\right)^{\text{-ю}}$ часть года одинъ рубль обратится въ $\left(1+\frac{r}{q}\right)^{\frac{q}{m}}$, что мы обозначимъ буквой ρ.

Пусть a будетъ величина уплаты, которая должна производиться въ каждый срокъ; тогда капиталъ, образующійся отъ неплатежа за n лѣтъ, представится суммою слѣдующихъ mn членовъ

$$a\{\rho^{mn-1}+\rho^{mn-2}+\rho^{mn-3}+\ldots.+\rho+1\}, \text{ то-есть}$$

$$a\,\frac{\rho^{mn}-1}{\rho-1} \text{ или } a\,\frac{\left(1+\frac{r}{q}\right)^{nq}-1}{\left(1+\frac{r}{q}\right)^{\frac{q}{m}}-1}.$$

Примѣры срочныхъ платежей.

Въ слѣдующихъ примѣрахъ разумѣются сложные проценты, если не оговорено противнаго.

1. Нѣкто занялъ 5762 р. 40 к.; найти, по скольку онъ долженъ платить ежегодно, чтобы погасить долгъ въ 35 лѣтъ, считая простые проценты по 4 со 100.

2. Опредѣлить величину роста при условіи, чтобы начальный капиталъ, дающій возможность получать извѣстный годовой доходъ за извѣстное число лѣтъ, при простыхъ процентахъ, равнялся половинѣ всей суммы, какая составится изъ всего дохода за то-же время.

3. Имѣніе, приносящее 1000 рублей дохода въ годъ, продано за 25000; найти, по скольку процентовъ разсчитана была прибыль.

4. Имущество, послѣ двухлѣтняго пользованія имъ, причемъ оно давало чистаго дохода 1653 р. 76 к. въ годъ, назначено въ продажу. Опредѣлить его цѣнность, считая доходность въ $2^1/_2$ процента.

5. Чтобы получать извѣстный ежегодный доходъ втеченіе извѣстнаго числа лѣтъ, нужно внести въ банкъ сумму, въ 20 разъ превышающую ежегодный доходъ; а чтобы получать тотъ-же доходъ вдвое большее время, нужно внести сумму въ 26 разъ больше суммы годового дохода. Какъ великъ процентъ, платимый банкомъ?

6. Опредѣлить, считая прибыль по $3^1/_2$ на 100, какую сумму нужно внести въ банкъ, чтобы получать 3200 р. ежегоднаго дохода черезъ 10 лѣтъ, если извѣстно, что

$$\log 1.032 = 0.0136797 \text{ и } \log 7.29798 = 0.8632030.$$

7. Предполагая, что для полученія вѣчнаго дохода нужно внести сумму, въ 25 разъ превышающую размѣръ ежегоднаго дохода, найти, какой доходъ можно получать ежегодно втеченіе 3 лѣтъ, внеся сумму въ 6250 рублей.

8. Сумма въ 1000 рублей отдана въ ссуду по 4 со 100 съ тѣмъ, чтобы она выплачивалась чрезъ годовые промежутки, начиная съ 40 р. въ первый годъ и увеличивая плату въ каждый слѣдующій годъ на 30 процентовъ противъ предыдущаго. Найти, чрезъ сколько лѣтъ будетъ выплаченъ весь долгъ, зная что

$$\log 2 = 0.30103 \text{ и } \log 3 = 0.47712.$$

9. Найти первоначальную величину капитала, дающаго возможность черезъ p лѣтъ получать всегдашній доходъ, такъ чтобы доходъ каждаго года былъ въ m разъ больше чѣмъ въ предыдущій годъ. Какое ограниченіе надо сдѣлать для m?

10. Найти, въ какую сумму обратится 1 рубль черезъ 20 лѣтъ, при ростѣ 5 на 100, предполагая, что проценты насчитываются непрерывно въ каждый моментъ.

11. Если ростъ капитала совершается непрерывно, т. е. проценты насчитываются каждый моментъ, а прибыль въ годъ равняется $\frac{1}{m}$ части капитала, то найти, во что обратится онъ черезъ n лѣтъ?

12. Нѣкто занимаетъ извѣстную сумму денегъ и платитъ черезъ каждый годъ столько-же рублей занятой суммы, сколько уплачиваетъ за этотъ годъ процентныхъ денегъ. Узнать, сколько онъ останется еще долженъ черезъ n лѣтъ.

13. Имущество, чистый годовой доходъ съ котораго равняется A рублямъ, сдано въ аренду на 20 лѣтъ, причемъ условіе возобновляется черезъ каждые 7 лѣтъ съ приплатою къ прежней арендной платѣ. Вычислить, какъ велика должна быть приплата при возобновленіи условія, считая по 6 процентовъ и зная, что

$$\log 106 = 2.0253059,\ \lg 4.688385 = 0.6710233,$$
$$\log 3.118042 = 0.4938820.$$

14. Нѣкто изъ капитала a рублей, на который онъ получаетъ r процентовъ въ годъ, издерживаетъ ежегодно b рублей, что́ больше получаемаго имъ дохода. Найти, черезъ сколько лѣтъ онъ раззорится?

Примѣръ. Если $a=1000$ р. $r=5$, $b=90$, то показать, что онъ раззорится къ концу 17-го года, зная, что

$$\log 2 = 0.3010300,\ \log 3 = 0.4771213,\ \log 7 = 0.8450980.$$

ГЛАВА XLIV.

Непрерывныя дроби.

600. Всякое выраженіе, имѣющее видъ $a \pm \cfrac{b}{c \pm \cfrac{d}{e \pm \text{и пр.}}}$, называется *непрерывною дробью.*

Мы ограничимся лишь непрерывными дробями вида $a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \text{и пр.}}}$, гдѣ a, b, c, ... цѣлыя положительныя числа.

Для краткости эта непрерывная дробь пишется иногда въ видѣ

$$a+\frac{1}{b+}\,\frac{1}{c+}\text{ и пр.}$$

Когда число членовъ a, b, c, ... *конечное*, то и непрерывная дробь называется *конечною*; въ этомъ случаѣ ее можно выразить обыкновенною дробью, совершивъ надъ нею указанныя дѣйствія.

601. *Обратить данную простую дробь въ непрерывную.*

Пусть $\frac{m}{n}$ будетъ данная дробь; раздѣлимъ на самомъ дѣлѣ m на n, и пусть a будетъ частное и p остатокъ, тогда $\frac{m}{n}=a+\frac{p}{n}=a+\frac{1}{\frac{n}{p}}$. Теперь будемъ дѣлить n на p, и пусть b будетъ частное и q остатокъ; тогда $\frac{n}{p}=b+\frac{q}{p}=b+\frac{1}{\frac{p}{q}}$. Подобно этому получимъ $\frac{p}{q}=c+\frac{r}{q}=c+\frac{1}{\frac{q}{r}}$, и т. д. Такимъ образомъ

$$\frac{m}{n}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+}}\text{ и пр.}$$

Если m меньше n, то первое частное a равняется нулю.

Итакъ, мы видимъ, что для обращенія данной простой дроби въ непрерывную, мы должны поступать такъ-же, какъ если-бы искали общій наибольшій дѣлитель для числителя и знаменателя этой дроби; и должны наконецъ прійти къ тому, что остатокъ будетъ равняться нулю, чѣмъ и закончится дѣйствіе. Слѣдовательно всякая простая дробь можетъ быть обращена въ *конечную* непрерывную.

602. Дроби, составленныя такъ, что для нихъ взято одно, два, три, ... частныхъ изъ непрерывной дроби $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\ldots}}$ называются *подходящими* или *приближающимися* дробями. Такъ, первая подходящая дробь будетъ a, вторая составится изъ $a+\frac{1}{b}$ и слѣдовательно будетъ $\frac{ab+1}{b}$; третья подходящая дробь составится изъ $a+\cfrac{1}{b+\frac{1}{c}}$, то-есть изъ $a+\frac{c}{bc+1}$ и слѣдовательно будетъ $\frac{abc+a+c}{bc+1}$, и такъ далѣе.

603. *Подходящія дроби, взятыя по порядку, будутъ попеременно то меньше, то больше непрерывной дроби.*

Первая подходящая дробь a слишкомъ мала, потому что опущена часть $\frac{1}{b+\ldots}$; вторая дробь $a+\frac{1}{b}$ слишкомъ велика, потому что слишкомъ малъ знаменатель b; дробь $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}$ слишкомъ мала, такъ какъ знаменатель $b+\frac{1}{c}$ слишкомъ великъ; и такъ далѣе.

604. *Найти законъ образованія послѣдовательныхъ подходящихъ дробей.*

Первыя три подходящія дроби, какъ мы видѣли, будутъ $\frac{a}{1}$, $\frac{ab+1}{b}$, $\frac{abc+a+c}{bc+1}$; числитель третьей дроби есть $c(ab+1)+a$, то-есть онъ можетъ быть составленъ посредствомъ умноженія числителя второй дроби на третье частное и прибавленія числителя первой дроби. Знаменатель третьей подходящей дроби можетъ быть составленъ подобнымъ же образомъ посредствомъ умноженія знаменателя второй дроби на третье частное и приложенія къ произведенію знаменателя первой дроби. Докажемъ теперь при помощи наведенія, что этотъ законъ справедливъ вообще.

Пусть $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$ будутъ три послѣдовательныя подходящія дроби и пусть m, m', m'' будутъ соотвѣтствующія частныя; положимъ, что

$$p''=m''p'+p,\quad q''=m''q'+q.$$

Пусть m''' будетъ слѣдующее частное; тогда слѣдующая подходящая дробь будетъ отличаться отъ $\frac{p''}{q''}$ только тѣмъ, что въ нее войдетъ новое частное m''', такъ что вмѣсто m'' намъ нужно будетъ писать $m''+\frac{1}{m'''}$; такимъ образомъ слѣдующая подходящая дробь будетъ

$$\frac{\left(m''+\frac{1}{m'''}\right)p'+p}{\left(m''+\frac{1}{m'''}\right)q'+q}=\frac{m'''(m''p'+p)+p'}{m'''(m''q'+q)+q'}=\frac{m'''p''+p'}{m'''q''+q'}.$$

Слѣдовательно, если мы положимъ, что

$$p'''=m'''p''+p' \text{ и } q'''=m'''q''+q',$$

то слѣдующая за $\frac{p''}{q''}$ подходящая дробь будетъ $\frac{p'''}{q'''}$; такимъ образомъ подходящая дробь $\frac{p'''}{q'''}$ можетъ быть составлена по тому-же закону, какой предполагался справедливымъ для составленія $\frac{p''}{q''}$; но справедливость этого закона была *доказана* для третьей подходящей дроби, поэтому онъ справедливъ для каждой слѣдующей подходящей дроби.

Итакъ мы доказали, что послѣдовательныя подходящія дроби *могутъ* быть составляемы по извѣстному закону; хотя мы еще не доказали, что каждая изъ составленныхъ такимъ образомъ подходящихъ дробей *выразится* въ простѣйшемъ ея видѣ; но это будетъ доказано въ ст. 606.

605. *Разность между двумя какими нибудь послѣдовательными подходящими дробями равняется дроби, числитель которой единица, а знаменатель—произведеніе знаменателей этихъ подходящихъ дробей.*

Это очевидно съ перваго взгляда на первую и вторую подходящія дроби, потому что $\frac{ab \pm 1}{b} - \frac{a}{1} = \frac{1}{b}$.

Положимъ, что этотъ законъ справедливъ для какихъ нибудь двухъ послѣдовательныхъ подходящихъ дробей $\frac{p}{q}$ и $\frac{p'}{q'}$, то-есть предположимъ, что $p'q - pq' = \pm 1$, такъ что

$$\frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \pm \frac{1}{qq'};$$

тогда $$p''q' - p'q'' = (m''p' + p)q' - p'(m''q' + q) = pq' - qp' = \mp 1,$$

такъ что $$\frac{p''}{q''} - \frac{p'}{q'} = \mp \frac{1}{q'q''};$$

такимъ образомъ законъ остается справедливымъ и для слѣдующей подходящей дроби. Слѣдовательно онъ справедливъ вообще.

606. *Всѣ подходящія дроби выражаются въ простѣйшемъ видѣ.*

Дѣйствительно, если-бы числитель и знаменатель дроби $\frac{p}{q}$ имѣли общаго дѣлителя, то $p'q - pq'$, т. е. единица должна была-бы дѣлиться на него, что невозможно.

607. *Всякая подходящая дробь ближе къ непрерывной, чѣмъ предыдущая подходящая дробь.*

Мы докажемъ это, показавъ, что каждая подходящая дробь дѣйствительно ближе къ непрерывной, чѣмъ предыдущая подходящая.

Пусть $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$ будутъ послѣдовательныя дроби, подходящія къ непрерывной дроби x; тогда $\frac{p''}{q''}=\frac{m''p'+p}{m''q'+q}$. Но x отличается отъ $\frac{p''}{q''}$ только тѣмъ, что въ ней вмѣсто m'' берется *полное частное* $m''+\frac{1}{m'''+}$ и проч. представляющее нѣкоторую величину большую единицы; обозначимъ его чрезъ μ; тогда

$$x=\frac{\mu p'+p}{\mu q'+q};$$

поэтому
$$\frac{p}{q}-x=\frac{p}{q}-\frac{\mu p'+p}{\mu q'+q}=\frac{\mu(pq'-p'q)}{q(\mu q'+q)}=\frac{\pm\mu}{q(\mu q'+q)},$$
$$x-\frac{p'}{q'}=\frac{\mu p'+p}{\mu q'+q}-\frac{p'}{q'}=\frac{pq'-p'q}{q'(\mu q'+q)}=\frac{\pm 1}{q'(\mu q'+q)}.$$

Но 1 меньше, чѣмъ μ, а q' больше чѣмъ q; слѣдовательно по обѣимъ этимъ причинамъ разность между x и $\frac{p'}{q'}$ меньше разности между x и $\frac{p}{q}$; а потому $\frac{p'}{q'}$ ближе къ x, чѣмъ $\frac{p}{q}$.

608. *Опредѣлить предѣлы ошибки, которую мы дѣлаемъ, принимая какую нибудь изъ подходящихъ дробей равной непрерывной.*

По предыдущей статьѣ разность между x и $\frac{p}{q}$ равна $\frac{\mu}{q(\mu q'+q)}$, или $\frac{1}{q\left(q'+\frac{q}{\mu}\right)}$; послѣдняя дробь меньше $\frac{1}{qq'}$ и больше $\frac{1}{q(q'+q)}$. Такъ какъ q' больше q, то a fortiori ошибка будетъ меньше $\frac{1}{q^2}$ и больше $\frac{1}{2q'^2}$. Эти предѣлы проще, чѣмъ данные сперва, хотя они и не такъ тѣсны.

609. Такимъ образомъ, чтобы допускаемая ошибка могла быть меньше нѣкоторой данной величины $\frac{1}{k}$, намъ остается только составлять послѣдовательныя подходящія дроби до тѣхъ поръ, пока не получимъ такую дробь $\frac{p}{q}$, что q^2 будетъ меньше k.

610. *Всякая подходящая дробь ближе къ непрерывной, чѣмъ какая нибудь другая дробь съ знаменателемъ меньшимъ, чѣмъ знаменатель подходящей дроби.*

Пусть $\frac{p'}{q'}$ будетъ подходящая дробь, и $\frac{r}{s}$ какая нибудь дробь, у которой знаменатель s меньше q'. Пусть x будетъ ненрерывная дробь и $\frac{p}{q}$ подходящая, непосредственно предшествующая дроби $\frac{p'}{q'}$. Тогда $\frac{p}{q}$, x, $\frac{p'}{q'}$ будутъ расположены или въ восходящемъ, или въ нисходящемъ порядкѣ ихъ величинъ (ст. 603). Но $\frac{r}{s}$ не можетъ заключаться *между* $\frac{p}{q}$ и $\frac{p'}{q'}$, потому что тогда разность между $\frac{r}{s}$ и $\frac{p}{q}$ была-бы меньше разности между $\frac{p}{q}$ и $\frac{p'}{q'}$, то-есть меньше $\frac{1}{qq'}$, а слѣдовательно разность между ps и qr была-бы меньше $\frac{s}{q'}$, то-есть цѣлое число должно-бы быть меньше правильной дроби, что невозможно. Такимъ образомъ порядокъ послѣдовательныхъ величинъ можетъ быть или $\frac{p}{q}$, x, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{r}{s}$, или $\frac{r}{s}$, $\frac{p}{q}$, x, $\frac{p'}{q'}$. Въ первомъ случаѣ $\frac{r}{s}$ больше отличается отъ x, чѣмъ $\frac{p'}{q'}$; въ послѣднемъ случаѣ $\frac{r}{s}$ отличается отъ x больше чѣмъ $\frac{p}{q}$, а слѣдовательно и *подавно* больше чѣмъ $\frac{p'}{q'}$.

611. Положимъ что $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ будутъ двѣ послѣдовательныя подходящія дроби къ непрерывной дроби x; тогда $\frac{pp'}{qq'}$ будетъ больше или меньше x^2, смотря по тому, будетъ-ли $\frac{p}{q}$ больше или меньше $\frac{p'}{q'}$. Дѣйствительно, какъ въ ст. 607, мы имѣемъ $x=\frac{\mu p'+p}{\mu q'+q}$; слѣдовательно

$$\frac{p}{q}-\frac{xq'}{p'}=\frac{p(\mu q'+q)}{q(\mu p'+p)}-\frac{q'(\mu p'+p)}{p'(\mu q'+q)}.$$

Приведемъ дроби первой части равенства къ одному знаменателю; тогда числитель будетъ $pp'(\mu q'+q)^2-qq'(\mu p'+p)^2$, то-есть $\mu^2(pp'q'^2-qq'p'^2)+pp'q^2-qq'p^2$, то-есть $(\mu^2p'q'-pq)(pq'-p'q)$.

Множитель $\mu^2p'q'-pq$ необходимо положительная величина; множитель $pq'-p'q$ положительная или отрицательная величина, смотря

по тому, будетъ-ли $\frac{p}{q}$ больше или меньше $\frac{p'}{q'}$; отсюда слѣдуетъ, что $\frac{p}{qx}$ будетъ больше или меньше $\frac{xq'}{p'}$; то-есть $\frac{pp'}{qq'}$ будетъ больше или меньше x^2, смотря по тому будетъ-ли $\frac{p}{q}$ больше или меньше $\frac{p'}{q'}$.

Примѣры непрерывныхъ дробей.

Обратить слѣдующія четыре дроби въ непрерывныя:

1. $\frac{1380}{1051}$. 2. $\frac{445}{612}$. 3. $\frac{19763}{44126}$. 4. $\frac{743}{611}$.

5. Найти три дроби, подходящія къ 3.1416.

6. Найти рядъ дробей, подходящихъ къ отношенію 5 часовъ, 48 минутъ 41 секунды къ 24 часамъ.

7. Если $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$, $\frac{p_3}{q_3}$ будутъ три послѣдовательныя подходящія дроби, то показать, что $(p_3 - p_1)q_2 = (q_3 - q_1)p_2$.

8. Доказать, что числители какихъ нибудь двухъ послѣдовательныхъ подходящихъ дробей не имѣютъ никакого общаго дѣлителя больше единицы, точно также, какъ и знаменатели.

9. Если $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$, $\frac{p_3}{q_3}$, ... будутъ послѣдовательныя дроби, подходящія къ нѣкоторой непрерывной дроби большей единицы, то показать, что $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$.

10. Показать, что разность между первою и n-ою подходящими дробями численно равна

$$\frac{1}{q_1 q_2} - \frac{1}{q_2 q_3} + \frac{1}{q_3 q_4} \ldots + \frac{(-1)^n}{q_{n-1} q_n}.$$

11. Показать, что $\left(\frac{p_{n+2}}{p_n} - 1\right)\left(1 - \frac{p_{n-1}}{p_{n+1}}\right) = \left(\frac{q_{n+2}}{q_n} - 1\right)\left(1 - \frac{q_{n-1}}{q_{n+1}}\right)$.

12. Если μ_n будетъ n-ое частное въ непрерывной дроби большей единицы, то показать, что $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^{n-1} \mu_n$.

13. Если $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$, $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $\frac{p_n}{q_n}$... будутъ послѣдовательныя подходящія дроби къ непрерывной $\cfrac{\beta_1}{\alpha_1 + \cfrac{\beta_2}{\alpha_2 + \cfrac{\beta_3}{\alpha_3 + \ldots}}}$, то показать, что

$p_n = \alpha_n p_{n-1} + \beta_n p_{n-2}$, $q_n = \alpha_n q_{n-1} + \beta_n q_{n-2}$; и слѣдовательно

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n.$$

14. Если $\frac{p_n}{q_n}$ означаетъ n-ю подходящую дробь къ дроби $\frac{P}{Q}$ и R_n означаетъ n-ый остатокъ, получающійся при обращеніи дроби $\frac{P}{Q}$ въ непрерывную, то показать, что

$$P = p_n R_{n-1} + p_{n-1} R_n, \quad Q = q_n R_{n-1} + q_{n-1} R_n.$$

15. Показать, что разность $\frac{P}{Q}$ и $\frac{p_n}{q_n}$ равна $\frac{R}{Q q_n}$.

16. Доказать, что при обращеніи дроби, выраженной въ простѣйшемъ ея видѣ, въ непрерывную два послѣдовательные остатка не имѣютъ никакого общаго дѣлителя больше единицы.

ГЛАВА XLV.

Обращеніе ирраціональныхъ выраженій второй степени въ непрерывную дробь.

612. Ирраціональное выраженіе второй степени не можетъ быть обращено въ *конечную* непрерывную дробь, потому что если-бы это было возможно, тогда ирраціональная величина равнялась-бы нѣкоторой раціональной дроби, т.-е. была-бы соизмѣримою. Но мы увидимъ, что какая нибудь ирраціональность второй степени можетъ быть обращена въ безконечную непрерывную дробь; дадимъ сперва частный примѣръ, а потомъ уже перейдемъ къ общей теоріи. Возьмемъ квадратный корень изъ 6.

$$\sqrt{(6)} = 2 + \sqrt{(6)} - 2 = 2 + \frac{2}{\sqrt{(6)} + 2} = 2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{(6)}+2}{2}},$$

$$\frac{\sqrt{(6)}+2}{2} = 2 + \frac{\sqrt{(6)}-2}{2} = 2 + \frac{1}{\sqrt{(6)}+2} = 2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{(6)}+2}{1}},$$

$$\frac{\sqrt{(6)}+2}{1} = 4 + \frac{\sqrt{(6)}-2}{1} = 4 + \frac{2}{\sqrt{(6)}+2} = 4 + \frac{1}{\frac{\sqrt{(6)}+2}{2}},$$

теперь дѣйствіе можно начинать снова. Такимъ образомъ мы получаемъ

$$\sqrt{(6)} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \text{и проч.}}}}}$$

Въ предыдущемъ способѣ выраженіе, стоящее въ началѣ каждой строки, раздѣляется на двѣ части: одна изъ нихъ представляетъ наибольшее цѣлое число, какое заключается въ этомъ выраженіи, другая-же изображаетъ остатокъ. Такъ, наибольшее цѣлое число, заключающееся въ $\sqrt{6}$, есть 2, а потому мы можемъ писать

$$\sqrt{(6)} = 2 + \{\sqrt{(6)} - 2\};$$

затѣмъ наибольшее цѣлое въ $\dfrac{\sqrt{(6)}+2}{2}$ будетъ 2, поэтому мы можемъ писать

$$\frac{\sqrt{(6)}+2}{2} = 2 + \frac{\sqrt{(6)}-2}{2},$$

и такъ далѣе; такимъ образомъ мы достигаемъ, что остатокъ будетъ имѣть раціональный числитель и выражаться въ видѣ дроби съ числителемъ единицей; послѣ этого начинаемъ новую строку дѣйствій.

На этомъ примѣрѣ мы можемъ замѣтить, что частныя начинаютъ повторяться вновь, какъ скоро мы дойдемъ до частнаго вдвое большаго, чѣмъ первое. Мы покажемъ сейчасъ, что это бываетъ всегда.

613. Пусть N будетъ нѣкоторое цѣ ое число, не представляющее точнаго квадрата; пусть a будетъ наибольшее цѣлое число, содержащееся въ $\sqrt{N}$; напишемъ $\sqrt{N}$ въ видѣ $\dfrac{\sqrt{(N)}+0}{1}$ ради симметріи и будемъ поступать такъ:

$$\frac{\sqrt{(N)}+0}{1} = a + \frac{\sqrt{(N)}-a}{1} = a + \frac{r}{\sqrt{(N)}+a'}, \text{ гдѣ } r = N - a^2.$$

$$\frac{\sqrt{(N)}+a}{r} = b + \frac{\sqrt{(N)}+a-rb}{r} = b + \frac{r'}{\sqrt{(N)}+a'},$$

гдѣ $a' = rb - a$, и $r' = \dfrac{N-a'^2}{r}$.

$$\frac{\sqrt{(N)}+a'}{r'} = b' + \frac{\sqrt{(N)}+a'-r'b'}{r'} = b' + \frac{r''}{\sqrt{(N)}+a''},$$

гдѣ $a'' = r'b' - a'$ и $r'' = \dfrac{N-a''^2}{r'}$.

$$\frac{\sqrt{(N)}+a''}{r''} = b'' + \frac{\sqrt{(N)}+a''-r''b''}{r''} = \text{и проч.}$$

Въ предыдущихъ рядахъ мы предполагаемъ, что b, b', b'', подобно a, суть *наибольшія* цѣлыя числа, содержащіяся въ тѣхъ выраженіяхъ, изъ которыхъ они соотвѣтственно произошли; отсюда слѣдуетъ, что r, r', r'', r''', ... всѣ положительны. Дѣйствительно, a^2 меньше N, слѣдовательно r положительная величина и b наибольшее цѣлое число, заключающееся въ $\frac{\surd(N)+a}{r}$, такъ что b очевидно меньше чѣмъ $\frac{\surd(N)+a}{r}$; слѣдовательно a'^2 меньше N, и такимъ образомъ r' будетъ положительная величина; и такъ далѣе. Мы обратили вниманіе на это обстоятельство, потому что оно является совершенно очевиднымъ слѣдствіемъ изъ самого способа. Впрочемъ оно заключается въ предложеніи слѣдующей статьи.

614. Въ выраженіяхъ, стоящихъ въ началѣ строкъ предыдущей ст. 613, мы имѣемъ слѣдующіе ряды величинъ:

$$0,\ a,\ a',\ a'',\ a''',\ \text{и проч.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$1,\ r,\ r',\ r'',\ r''',\ \text{и проч.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

и соотвѣтствующій рядъ частныхъ будетъ

$$a,\ b,\ b',\ b'',\ b''',\ \text{и проч.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Мы покажемъ теперь, что члены въ рядахъ (1) и (2) всѣ цѣлые и положительные; что касается членовъ ряда (3), то мы уже знаемъ, что они цѣлые и положительные.

Пусть α, α' α'' будутъ три послѣдовательные члена ряда (1); ρ, ρ', ρ''—соотвѣтствующіе члены въ ряду (2) и β, β', β''—соотвѣтствующіе члены въ ряду (3). Пусть соотвѣтствующія подходящія дроби къ $\surd(N)$ будутъ $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$, такъ что $\frac{p''}{q''}=\frac{\beta''p'+p}{\beta''q'+q}$; эти подходящія дроби всѣ могутъ быть составлены обыкновеннымъ путемъ, такъ какъ всѣ члены строки (3) цѣлые и положительные.

Такъ какъ полное частное, соотвѣтствующее β'', есть $\frac{\surd(N)+\alpha''}{\rho''}$, то мы имѣемъ (ст. 607)

$$\surd(N)=\frac{\frac{\surd(N)+\alpha''}{\rho''}p'+p}{\frac{\surd(N)+\alpha''}{\rho''}q'+q}=\frac{\{\surd(N)+\alpha''\}p'+\rho''p}{\{\surd(N)+\alpha''\}q'+\rho''q}.$$

Перемножимъ и уравняемъ затѣмъ раціональныя и ирраціональныя части между собою (ст. 299); тогда

$$\alpha''p'+\rho''p=Nq',\quad \alpha''q'+\rho''q=p';$$

слѣдовательно

$$\alpha''(pq'-p'q)=pp'-qq'N,$$

$$\rho''(pq'-p'q)=q'^2N-p'^2.$$

Но $pq'-p'q=\pm 1$, слѣдовательно α'' и ρ'' цѣлыя числа. А въ ст. 611 доказано, что $pq'-p'q$, $pp'-qq'N$ и $q'^2N-p'^2$ имѣютъ *одинаковые* знаки; слѣдовательно α'' и ρ'' будутъ цѣлыя и *положительныя* числа.

Эти разсужденія могутъ быть приложены ко *всякой* соотвѣтствующей парѣ величинъ въ рядахъ (1) и (2), за исключеніемъ первыхъ двухъ паръ, къ которымъ это не можетъ быть приложимо потому, что *двѣ* подходящія дроби $\frac{p}{q}$ и $\frac{p'}{q'}$, по предположенію предшествуютъ подходящей дроби $\frac{p''}{q''}$. Но первыя двѣ пары величинъ рядовъ (1) и (2), именно 0 и 1, a и r завѣдомо цѣлыя и положительныя. Такимъ образомъ *всѣ* величины въ рядахъ (1) и (2) суть цѣлыя и положительныя.

615. Наибольшій членъ въ ряду (1) есть a. Дѣйствительно, по способу составленія этого ряда $\rho\rho'=N-\alpha'^2$; такъ какъ ρ и ρ' суть положительныя величины, то α'^2 меньше N, а слѣдовательно α' не больше a.

616. Никакой членъ въ рядахъ (2) или (3) не можетъ быть болѣе чѣмъ $2a$. Дѣйствительно, по способу составленія ряда, $\alpha'+\alpha''=\rho'\beta'$; и такъ какъ ни α', ни α'' не могутъ быть больше a, то ни ρ', ни β' не могутъ быть больше $2a$.

617. Если $\rho''=1$, то $\alpha''=a$.

Дѣйствительно, по ст. 614, $\alpha''+\rho''\frac{q}{q'}=\frac{p'}{q'}$, а потому, если $\rho''=1$, то $\alpha''+$ нѣкоторая дробь$=\frac{p'}{q'}$. Но $\frac{p'}{q'}$ болѣе приближается къ $\sqrt{N}$, чѣмъ a, а величина a меньше $\sqrt{N}$; поэтому $\frac{p'}{q'}$ больше a, и слѣдовательно $\alpha''=a$.

618. Если какой нибудь членъ кромѣ перваго въ ряду (1) вычесть изъ a, то остатокъ будетъ меньше, чѣмъ соотвѣтствующій членъ въ ряду (2).

Дѣйствительно, по статьѣ 614 $\alpha''q'+\rho''q=p'$; слѣдовательно $\frac{q}{q'}=\frac{1}{\rho''}\left(\frac{p'}{q'}-\alpha''\right)$, слѣдовательно $\frac{p'}{q'}-\alpha''$ меньше ρ'', а потому *и подавно* $a-\alpha''$ меньше ρ''.

Это доказательство будетъ прилагаться только къ *третьему* или къ какому нибудь слѣдующему члену, потому что въ ст. 614 предполагается, что два члена α и α', предшествуютъ α''. Впрочемъ теорема справедлива и для второго члена, что видно съ перваго взгляда, такъ какъ $a-a$, то-есть нуль, меньше r.

619. Въ ст. 615 и 616 доказано, что величины членовъ въ рядахъ (1) и (2) не могутъ соотвѣтственно превышать a и $2a$; слѣдовательно въ обоихъ рядахъ должны одновременно встрѣчаться одинаковыя величины, и прежде чѣмъ это произойдетъ, въ каждомъ ряду не можетъ быть больше, чѣмъ $2a^2$ членовъ.

620. Обозначимъ первый рядъ такъ—

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_{m-1}, a_m, a_{m+1}, \ldots a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots$$

и пусть такимъ-же образомъ обозначены ряды (2) и (3). Мы доказали, что величины должны повторяться; положимъ поэтому, что члены, начиная съ m-го до $(n-1)$-го включительно повторяются, такъ что

$$\begin{array}{lll} a_n = a_m, & a_{n+1} = a_{m+1}, & a_{n+2} = a_{m+2}, \ldots \\ b_n = b_m, & b_{n+1} = b_{m+1}, & b_{n+2} = b_{m+2}, \ldots \\ r_n = r_m, & r_{n+1} = r_{m+1}, & r_{n+2} = r_{m+2}, \ldots \end{array}$$

Мы покажемъ, что

$$a_{n-1} = a_{m-1};\ b_{n-1} = b_{m-1},\ r_{n-1} = r_{m-1}.$$

Мы имѣемъ $r_{m-1} r_m = N - a_m^2$, $r_{n-1} r_n = N - a_n^2$, но $r_n = r_m$ и $a_n = a_m$; слѣдовательно $r_{n-1} = r_{m-1}$.

Далѣе $a_{m-1} + a_m = r_{m-1} b_{m-1}$, $a_{n-1} + a_n = r_{n-1} b_{n-1}$; слѣдовательно $a_{n-1} - a_{m-1} = (b_{n-1} - b_{m-1}) r_{m-1}$, а слѣдовательно $\frac{a_{n-1} - a_{m-1}}{r_{m-1}} = b_{n-1} - b_{m-1}$ = нулю или какому нибудь цѣлому числу.

Но по ст. 618, $a - a_{m-1}$ меньше r_{m-1} и $a - a_{n-1}$ меньше r_{n-1}, такъ что $a - a_{n-1}$ меньше r_{m-1}; слѣдовательно $a_{n-1} - a_{m-1}$ меньше r_{m-1}; а потому $\frac{a_{n-1} - a_{m-1}}{r_{m-1}}$ меньше единицы.

Сравнивая этотъ выводъ съ прежнимъ, мы видимъ, что $\frac{a_{n-1} - a_{m-1}}{r_{m-1}}$ должно равняться нулю, а потому $a_{n-1} = a_{m-1}$ и $b_{n-1} = b_{m-1}$.

Слѣдовательно, зная, что повторится m-й членъ, мы заключаемъ, что повторится такъ-же и $(m-1)$-й членъ. Это доказательство справедливо, пока m остается меньше 3, потому что оно зависитъ отъ теоремы, данной въ ст. 618. Слѣдовательно, члены повторяются, начиная съ полнаго частнаго $\frac{\sqrt{(N)} + a}{r}$.

621. Послѣднее частное всегда будетъ $2a$.

Дѣйствительно, пусть послѣднее полное частное будетъ $\frac{\sqrt{N} + a_n}{r_n}$; тогда слѣдующее частное равняется $\frac{\sqrt{(N)} + a}{r}$; слѣдовательно $a_n + a = r_n b_n$, $r_n r = N - a^2$, но $r = N - a^2$, а потому $r_n = 1$; слѣдовательно по ст. 617, $a_n = a$, а потому $b_n = 2a$.

622. *Всякая періодическая непрерывная дробь равна одному изъ корней квадратнаго уравненія съ раціональными коэффиціентами.*

Пусть $x=a+\cfrac{1}{b+}\ \cfrac{1}{h+}\ \cfrac{1}{k+}\ \cfrac{1}{y}$, гдѣ

$$y=r+\cfrac{1}{s+}\ \cfrac{1}{u+}\ \cfrac{1}{v+}\ \cfrac{1}{y},$$

такъ что a, b, ... h, k будутъ не повторяющіяся частныя, а r, s, ... u, v постоянно повторяющіяся.

Пусть $\frac{p'}{q'}$ будетъ подходящая дробь, составленная изъ частныхъ a, b, ... до k включительно; и пусть $\frac{p}{q}$ будетъ подходящая дробь, непосредственно предшествующая $\frac{p'}{q'}$; тогда по ст. 607

$$x=\frac{p'y+p}{q'y+q} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1).$$

Пусть $\frac{P'}{Q'}$ будетъ подходящая дробь, составленная изъ частныхъ r, s, ... до v включительно; и пусть $\frac{P}{Q}$ будетъ подходящая дробь, непосредственно предшествующая $\frac{P'}{Q'}$ тогда

$$y=\frac{P'y+P}{Q'y+Q} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2).$$

Изъ (1) и (2), исключая y, мы получаемъ нѣкоторое квадратное уравненіе относительно x съ раціональными коэффиціентами. Чтобы получить x, мы должны рѣшить это уравненіе; или мы можемъ взять положительное значеніе y, найденное изъ (2), то-есть изъ уравненія $Q'y^2+(Q-P')y-P=0$, и подставить его въ (1).

623. Нужно обратить вниманіе еще на слѣдующую теорему относительно непрерывныхъ дробей:

Пусть $\cfrac{1}{b+}\ \cfrac{1}{c+}\ \cdots\ \cfrac{1}{m+}\ \cfrac{1}{m'+}\ \cfrac{1}{m''}$, представляетъ разложеніе правильной дроби $\frac{P}{Q}$ и пусть соотвѣтствующій рядъ подходящихъ дробей будетъ

$$\frac{1}{b},\ \frac{c}{cb+1},\ \cdots\ \frac{p}{q},\ \frac{p'}{q'},\ \frac{p''}{q''},\ \frac{P}{Q};$$

тогда разложеніе $\frac{q''}{Q}$ будетъ

$$\frac{1}{m''+}\ \frac{1}{m'+}\ \frac{1}{m+}\ \cdots\ \frac{1}{c+}\ \frac{1}{b};$$

то-есть будутъ встрѣчаться тѣ-же самыя частныя, но въ обратномъ порядкѣ.

Дѣйствительно, $Q=m''q''+q'$, а потому $\frac{q''}{Q}=\frac{1}{m''+\frac{q'}{q''}}$;

$q''=m'q'+q$, а потому $\frac{q'}{q''}=\frac{1}{m'+\frac{q}{q'}}$;

и такъ далѣе. Слѣдовательно

$$\frac{q''}{Q}=\frac{1}{m''+}\ \frac{1}{m'+}\ \frac{1}{m+}\ \cdots\ \frac{1}{c+}\ \frac{1}{b}.$$

624. Предыдущая теорема послужитъ добавленіемъ къ выводамъ, которые мы сдѣлаемъ въ настоящей главѣ.

Пусть $\frac{p}{q}$ и $\frac{p'}{q'}$ будутъ двѣ послѣдовательныя подходящія дроби къ $\sqrt{N}$, причемъ $\frac{p'}{q'}$ есть послѣдняя изъ подходящихъ, составленная передъ тѣмъ, какъ частныя начнутъ повторяться. Слѣдовательно по ст. 614 и 621, $p'=aq'+q$.

Но разложеніе дроби $\frac{p'-aq'}{q'}$, то-есть $\frac{p'}{q'}-a$, при обозначеніи согласно со ст. 620, будетъ

$$\frac{1}{b_2+}\ \frac{1}{b_3+}\ \frac{1}{b_4+}\ \cdots\ \frac{1}{b_{n-3}+}\ \frac{1}{b_{n-2}+}\ \frac{1}{b_{n-1}};$$

и послѣдняя подходящая будетъ $\frac{p-aq}{q}$. Но мы сейчасъ видѣли, что $q=p'-aq'$. Слѣдовательно по ст. 623

$$b_{n-1}=b_2,\ b_{n-2}=b_3,\ b_{n-3}=b_4,\ \ldots$$

625. Существуетъ такъ-же повторяемость одинаковыхъ членовъ въ обратномъ порядкѣ въ рядахъ второмъ и третьемъ ст. 614 и 620, подобно той, которая сейчасъ доказана для перваго ряда.

Мы имѣемъ вообще

$$r_{m-1}r_m=N-a_m^2\ (1),\quad a_{m-1}+a_m=r_{m-1}b_{m-1}\ (2).$$

Подставимъ въ (1) послѣдовательно вмѣсто m величины 2 и n; тогда

$$r_1r_2=N-a_2^2,\quad r_{n-1}r_n=N-a_n^2;$$

мы знаемъ, что $a_2=a_n$, потому что каждое изъ нихъ равно a, и что $r_1=r_n$, потому что каждое изъ нихъ $=1$; поэтому $r_2=r_{n-1}$.

Подставимъ послѣдовательно во (2) вмѣсто m величины 3 и n; тогда

$$a_2+a_3=r_2b_2, \quad a_{n-1}+a_n=r_{n-1}b_{n-1};$$

мы знаемъ, что $a_2=a_n$, что $r_2=r_{n-1}$ и что $b_2=b_{n-1}$; поэтому $a_3=a_{n-1}$.

Подставимъ еще въ (1) послѣдовательно вмѣсто m величины 3 и $n-1$; тогда мы найдемъ, что $r_3=r_{n-2}$. Подставимъ во (2) послѣдовательно вмѣсто m величины 4 и $n-1$; тогда найдемъ, что $a_4=a_{n-2}$. И такъ далѣе.

626. Слѣдующая теорема, относящаяся къ непрерывнымъ дробямъ, сообщена автору этой книги г. Рикардомъ (Rickard) изъ Бирмингама. Эта теорема доставляетъ подходящія дроби къ квадратному корню изъ числа, съ приближеніемъ высокаго порядка, сравнительно очень легко.

Пусть N будетъ нѣкоторое положительное число, не представляющее точнаго квадрата, и предположимъ, что составлены къ $\sqrt{N}$ подходящія дроби обыкновеннымъ способомъ; пусть c будетъ число повторяющихся частныхъ въ полномъ періодѣ, или какое нибудь кратное этого числа; пусть $\frac{p_c}{q_c}$ будетъ по порядку c-я подходящая, а $\frac{p_{2c}}{q_{2c}}$—$(2c)$-я подходящая дробь; тогда будемъ имѣть

$$\frac{p_{2c}}{q_{2c}}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{p_c}{q_c}+\frac{Nq_c}{p_c}\right).$$

Пусть a будетъ наибольшее цѣлое число, заключающееся въ $\sqrt{N}$, и пусть частныя, полученныя отъ обращенія $\sqrt{N}$ въ непрерывную дробь по обыкновенному способу, будутъ означены буквами

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots\ b_c,\ b_{c+1},\ b_{c+2},\ \ldots\ b_{2c},\ \ldots$$

Тогда по ст. 620 и 621 мы имѣемъ

$$b_2=b_{c+2},\ b_3=b_{c+3},\ b_4=b_{c+4} \qquad (1);$$

а также

$$b_1=a,\ b_{c+1}=2a. \qquad (2).$$

Пусть $\frac{p_{c-1}}{q_{c-1}}$ и $\frac{p_{c+1-1}}{q_{c+1-1}}$ будутъ подходящія дроби, изъ которыхъ одна непосредственно предшествуетъ, а другая непосредственно слѣдуетъ за $\frac{p_c}{q_c}$; тогда $\frac{p_{c+1}}{q_{c+1}}=\frac{b_{c+1}p_c+p_{c-1}}{b_{c+1}q_c+q_{c-1}}$.

Но $\sqrt{N}$ отличается отъ $\frac{p_{c+1}}{q_{c+1}}$ только тѣмъ, что вмѣсто частнаго b_{c+1} мы должны-бы были взять соотвѣтственное *полное частное*, равное $a+\sqrt{N}$ (ст. 621).

Слѣдовательно $\sqrt{N}=\dfrac{(a+\sqrt{N})p_c+p_{c-1}}{(a+\sqrt{N})q_c+q_{a-1}}$.

Перемножимъ и уравняемъ между собою раціональныя и ирраціональныя части; тогда

$$ap_c+p_{c-1}=Nq_c,\ aq_c+q_{c-1}=p_c. \qquad (3).$$

Далѣе, $\dfrac{p_{2c}}{q_{2c}}$ отличается отъ $\dfrac{p_{c+1}}{q_{c+1}}$ только тѣмъ, что вмѣсто частнаго b_{c+1} мы въ первомъ случаѣ должны взять непрерывную дробь $b_{c+1}+\dfrac{1}{b_{c+2}+\ldots.}\dfrac{1}{b_{2c}}$; а эта непрерывная дробь по (1) и (2) равна $a+b_1+\dfrac{1}{b_2+\ldots}\dfrac{1}{b_c}$, то-есть равна $a+\dfrac{p_c}{q_c}$.

Слѣдовательно

$$\frac{p_{2c}}{q_{2c}}=\frac{\left(a+\dfrac{p_c}{q_c}\right)p_c+p_{c-1}}{\left(a+\dfrac{p_c}{q_c}\right)q_c+q_{c-1}}=\frac{ap_c+p_{c-1}+\dfrac{p_c^2}{q_c}}{aq_c+q_{c-1}+p_c}=\frac{Nq_c+\dfrac{p_c^2}{q_c}}{2p_c}$$

на основаніи (3) или $=\frac{1}{2}\left(\dfrac{p_c}{q_c}+\dfrac{Nq_c}{p_c}\right)$.

Мы можемъ дать любопытное геометрическое поясненіе этой теоремы. Если N означаетъ площадь прямоугольника и $\dfrac{p_c}{q_c}$ примемъ за одну изъ его сторонъ, то другая будетъ $\dfrac{Nq_c}{p_c}$. Тогда $\dfrac{p_{2c}}{q_{2c}}$ равняется полусуммѣ сторонъ этого прямоугольника. Пусть h и k означаютъ стороны прямоугольника; тогда, если чрезъ $\frac{1}{2}(h+k)$ означимъ сторону другого прямоугольника съ такою-же площадью, то другая его сторона будетъ $\dfrac{2hk}{h+k}$; разность этихъ двухъ сторонъ будетъ $\dfrac{(h-k)^2}{2(h+k)}$, что *меньше* $h-k$. Но отыскивая $\sqrt{N}$, мы въ сущности желаемъ найти сторону квадрата, площадь котораго равняется N; и настоящая теорема доставляетъ, какъ это можно понимать, рядъ прямоугольниковъ такого рода, что сторона каждаго изъ нихъ равняется полусуммѣ сторонъ предыдущаго прямоугольника; такъ что каждый прямоугольникъ будетъ болѣе приближаться къ равностороннику или квадрату, чѣмъ предыдущій прямоугольникъ, причемъ эти прямоугольники стремятся составить собою квадратъ. Это геометрическое толкованіе внушено намъ статьею Генри Брука—*Теорема о прямоугольникѣ*.

Положимъ напримѣръ, что $N=a^2+1$; тогда частныя будутъ a,

$2a$, $2a$, $2a$, ... то-есть періодъ частныхъ состоитъ изъ одного только частнаго $2a$. Поэтому въ настоящемъ случаѣ c можетъ быть всякимъ произвольнымъ числомъ.

Положимъ еще, что $N=a^2-1$; тогда частныя будутъ $a-1$, 1, $2(a-1)$, 1, $2(a-1)$ ...., такъ что періодъ повторяющихся частныхъ состоитъ изъ двухъ чиселъ 1 и $2(a-1)$. Такимъ образомъ въ предыдущей теоремѣ c можетъ быть всякимъ четнымъ цѣлымъ числомъ. Но въ этомъ случаѣ теорема будетъ также справедливою, если c будетъ какое нибудь нечетное цѣлое число, какъ мы теперь докажемъ.

Положимъ, что c будетъ какое нибудь нечетное цѣлое число. Такъ какъ $(c+1)$-е частное равно единицѣ, то мы имѣемъ

$$p_{c+1}=p_c+p_{c-1},\quad q_{c+1}=q_c+q_{c-1}. \tag{4}$$

И тѣмъ-же способомъ, какимъ мы доказали уравненія (3), докажемъ, что

$$(a-1)p_{c+1}+p_c=Nq_{c+1},\quad (a-1)q_{c+1}+q_c=p_{c+1} \tag{5}$$

Но $\frac{p_{2c}}{q_{2c}}$ отличается отъ $\frac{p_{c+1}}{q_{c+1}}$ только тѣмъ, что вмѣсто частнаго единица мы должны для перваго взять непрерывную дробь $1+\cfrac{1}{2(a-1)+}\cdots\frac{1}{1}$, а эта непрерывная дробь равна $\cfrac{1}{\frac{p_{c+1}}{q_{c+1}}-(a-1)}$, то-есть равна $\frac{q_{c+1}}{q_c}$ по второму изъ уравненій (5).

Такимъ образомъ

$$\frac{p_{2c}}{q_{2c}}=\frac{p_c\frac{q_{c+1}}{q_c}+p_{c-1}}{q_{c+1}+q_{c-1}}=\frac{p_c\frac{q_{c+1}}{q_c}+p_{c+1}-p_c}{2q_{c+1}-q_c}$$ по (4).

Изъ уравненій (5), такъ какъ $N=a^2-1$, можно вывести, что

$$p_{c+1}=\frac{(a-1)p_c+Nq_c}{2(a-1)},\quad q_{c+1}=\frac{(a-1)q_c-p_c}{2(a-1)}.$$

Подставивъ эти значенія въ послѣднее выраженіе для $\frac{p_{2c}}{q_{2c}}$, мы получимъ $\frac{p_{2c}}{q_{2c}}=\cfrac{Nq_c+\frac{p_c^2}{q_c}}{2p_c}$.

Примѣры обращенія въ непрерывныя дроби ирраціональныхъ величинъ второй степени.

Выразить слѣдующія четырнадцать ирраціональностей въ видѣ непрерывныхъ дробей и найти для каждой изъ нихъ первыя четыре подходящія дроби:

1. $\sqrt{8}$. 2. $\sqrt{10}$. 3. $\sqrt{14}$. 4. $\sqrt{17}$.

5. $\sqrt{(19)}$. 6. $\sqrt{(26)}$. 7. $\sqrt{(27)}$. 8. $\sqrt{(46)}$.

9. $\sqrt{(53)}$. 10. $\sqrt{(101)}$. 11. $\sqrt{(a^2+1)}$. 12. $\sqrt{(a^2-1)}$.

13. $\sqrt{(a^2+a)}$. 14. $\sqrt{(a^2+a)}$.

15. Найти восьмую приближенную дробь къ $\sqrt{(13)}$.

16. Найти восьмую приближенную дробь къ $\sqrt{(31)}$.

17. Показать, что девятая подходящая къ $\sqrt{(33)}$ дробь будетъ вѣрна по крайней мѣрѣ до 6 десятичныхъ цифръ.

18. Найти предѣлы погрѣшности, если $\frac{211}{44}$ взять вмѣсто $\sqrt{23}$.

19. Показать, что $\frac{916}{191}$ отличается отъ $\sqrt{23}$ на величину меньшую чѣмъ $\frac{1}{(191)^2}$ и бо́льшую, чѣмъ $\frac{1}{2(240)^2}$.

20. Найти предѣлы ошибки, если $\frac{1151}{240}$ принята за $\sqrt{23}$.

21. Найти предѣлы ошибки, когда за $\sqrt{31}$ принята восьмая подходящая дробь.

22. Показать, что $1+\cfrac{1}{3+}\cfrac{1}{2+}\cfrac{1}{3+}\cfrac{1}{2+}\ldots=\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)}$.

23. Показать, что

$$\left(a+\cfrac{1}{b+}\cfrac{1}{a+}\cfrac{1}{b+}\cfrac{1}{a+}\ldots\right)\left(\cfrac{1}{b+}\cfrac{1}{a+}\cfrac{1}{b+}\cfrac{1}{a+}\ldots\right)=\frac{a}{b}.$$

24. Показать, что

$$2a+\cfrac{1}{a+}\cfrac{1}{4a+}\cfrac{1}{a+}\cfrac{1}{4a+}\ldots=2\sqrt{(1+a^2)};$$

показать также, что вторая подходящая дробь отличается отъ истинной величины на величину меньшую $1:a(4a^2+1)$; и затѣмъ, положивъ $a=7$, показать, что $\frac{99}{70}$ отличается отъ $\sqrt{2}$ на величину меньшую чѣмъ $\frac{1}{13790}$.

25. Показать, что третья подходящая къ $\sqrt{(a^2+a+1)}$ дробь есть $\frac{1}{2}(2a+1)$.

26. Найти подходящія дроби къ $\frac{\sqrt{3}}{4}$; показать, что $\frac{13}{30}$ превышаетъ истинную величину меньше чѣмъ на $\frac{1}{2910}$.

27. Найти 6-ю подходящую дробь къ $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)}$.

28. Найти 6-ю подходящую дробь къ положительному корню уравненія $2x^2-3x-6=0$.

29. Найти 6-ю подходящую дробь къ каждому изъ корней уравненія $x^2-5x+3=0$.

30. Найти 7-ю подходящую дробь къ бо́льшему изъ корней уравненія $2x^2-7x+4=0$.

31. Найти пятую подходящую дробь къ $\frac{1}{\sqrt{(45)}}$.

32. Найти значеніе дроби $1+\frac{1}{2+}\ \frac{1}{2+}\cdots$

33. Найти значеніе дроби $\frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\cdots$

34. Найти значеніе дроби $1+\frac{1}{2+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{1+}\cdots$

35. Найти значеніе дроби $\frac{1}{3+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\cdots$

36. Найти значеніе дроби $2+\frac{1}{1+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{5+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{5+}\ \frac{1}{1+}\cdots$

ГЛАВА XLVI.

Неопредѣленныя уравненія первой степени.

627. Когда дано одно только уравненіе, заключающее болѣе одной перемѣнной величины, то такое уравненіе допускаетъ вообще безконечное число рѣшеній. Напримѣръ, въ уравненіи $ax+by=c$ мы можемъ приписывать x какія угодно значенія и по нимъ опредѣлять соотвѣтствующія значенія y.

Подобнымъ образомъ, если мы имѣемъ нѣсколько уравненій, въ которыхъ заключается неизвѣстныхъ больше чѣмъ число уравненій, то мы будемъ имѣть безконечное множество системъ рѣшеній. Такого рода уравненія называются неопредѣленными.

628. Однако въ нѣкоторыхъ случаяхъ свойства вопроса могутъ быть таковы, что намъ нужно знать только такія рѣшенія, въ которыхъ перемѣнныя будутъ *цѣлыми положительными* величинами. Въ такомъ случаѣ, какъ мы увидимъ, число рѣшеній *можетъ быть* ограничено. Перейдемъ поэтому къ нѣкоторымъ предложеніямъ, относящимся къ рѣшенію неопредѣленныхъ уравненій *въ цѣлыхъ положительныхъ* числахъ. Коэффиціенты и постоянные члены въ этихъ уравненіяхъ мы будемъ принимать цѣлыми.

Прежде чѣмъ дать общую теорію, мы покажемъ на примѣрѣ, какъ такія уравненія рѣшаются всего чаще на практикѣ.

Требуется найти цѣлыя значенія x и соотвѣтствующія значенія y въ уравненіи $5x+8y=37$.

Раздѣлимъ данное уравненіе на 5, самый меньшій изъ коэффиціентовъ; тогда $x+y+\frac{3y}{5}=7+\frac{2}{5}$, или $x+y-7=\frac{2-3y}{5}$. Такъ какъ x и y по условію цѣлыя числа, то и $\frac{2-3y}{5}$ должно быть цѣлымъ числомъ; означимъ его буквой p, такъ что $2-3y=5p$. Раздѣлимъ это на 3; тогда будетъ $\frac{2}{3}-y=p+\frac{2p}{3}$ или $p+y=\frac{2-2p}{3}$. Слѣдовательно $\frac{2-2p}{3}$ должно быть цѣлымъ числомъ; означимъ его буквой q, такъ что $2-2p=3q$. Раздѣлимъ это на 2, тогда получимъ $1-p=q+\frac{q}{2}$. Слѣдовательно $\frac{q}{2}$ должно быть цѣлымъ числомъ; означимъ его буквой s, такъ что $q=2s$. Тогда $1-p=2s+s$, такъ что $p=1-3s$. Поэтому $2-3y=5p=5-15s$, такъ что $y=5s-1$. Такимъ образомъ $5x=37-8y=45-40s$, такъ что $x=9-8s$.

Итакъ мы нашли, что $y=5s-1$ и $x=9-8s$; и если мы припишемъ s какое нибудь цѣлое значеніе, то получимъ соотвѣтственныя цѣлыя значенія для x и y; но единственныя *цѣлыя и положительныя* значенія x и y получатся тогда, когда положимъ $s=1$; въ этомъ случаѣ найдемъ $y=4$ и $x=1$.

629. *Если въ уравненіяхъ* $ax+by=c$ *и* $ax-by=c$ *коэффиціенты* a *и* b *имѣютъ общаго дѣлителя, на который не дѣлится* c, *то эти уравненія не могутъ быть рѣшены въ цѣлыхъ числахъ.*

Дѣйствительно, предположимъ, если возможно, что то или другое

изъ уравненій имѣетъ цѣлое рѣшеніе; раздѣлимъ обѣ части этого уравненія на общаго дѣлителя; тогда лѣвая часть уравненія будетъ цѣлымъ числомъ, а правая дробнымъ, что невозможно.

Если a, b, c имѣютъ общаго дѣлителя, то его можно удалить, раздѣливъ на него уравненіе; такъ что на будущее время мы будемъ предполагать, что a и b не имѣютъ общаго дѣлителя.

630. *Дано одно изъ рѣшеній уравненія* $ax-by=c$; *найти общее его рѣшеніе.*

Положимъ, что $x=\alpha$, $y=\beta$ есть одно изъ рѣшеній уравненія $ax-by=c$, такъ что $a\alpha-b\beta=c$. Вычитая получимъ

$$a(x-\alpha)-b(x-\beta)=0; \text{ поэтому } \frac{a}{b}=\frac{y-\beta}{x-\alpha}.$$

Такъ какъ дробь $\frac{a}{b}$ выражена въ простѣйшемъ видѣ, а x и y должны имѣть цѣлыя значенія, то должно быть (какъ это будетъ доказано въ главѣ—Теорія чиселъ)

$$x-\alpha=bt,\ y-\beta=at,$$

гдѣ t нѣкоторое цѣлое число. Слѣдовательно

$$x=\alpha+bt,\ y=\beta+at.$$

Итакъ, если одно рѣшеніе извѣстно, то мы можемъ, приписывая величинѣ t различныя цѣлыя значенія, получить столько рѣшеній, сколько пожелаемъ. Мы можемъ также давать t такія цѣлыя отрицательныя значенія, чтобы bt и at были соотвѣтственно по численной величинѣ меньше α и β.

Теперь мы покажемъ, что одно изъ рѣшеній всегда возможно найти.

631. *Рѣшеніе уравненія* $ax-by=c$ *въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ всегда можетъ быть найдено.*

Обратимъ $\frac{a}{b}$ въ непрерывную дробь и составимъ послѣдовательныя подходящія дроби; пусть $\frac{p}{q}$ будетъ подходящая дробь, непосредственно предшествующая дроби $\frac{a}{b}$; тогда $aq-bp=\pm 1$.

Положимъ во-первыхъ, что $aq-bp=1$, поэтому $aqc-bpc=c$. Слѣдовательно $x=qc$, $y=pc$ будетъ рѣшеніе уравненія $ax-by=c$.

Теперь положимъ, что $aq-bp=-1$; тогда $a(b-q)-b(a-p)=1$; слѣдовательно $a(b-q)c-b(a-p)c=c$. Отсюда $x=(b-q)c$ и $y=(a-p)c$ будетъ рѣшеніемъ уравненія $ax-by=c$.

Если $a=1$, то предыдущій способъ неприложимъ; въ этомъ случаѣ уравненіе будетъ $x-by=c$; но мы можемъ очевидно получить рѣшеніе,

давая y какое нибудь положительное цѣлое значеніе и находя затѣмъ x изъ выраженія $x=c+by$. То-же нужно сказать и о случаѣ, когда $b=1$.

632. *Дано одно изъ рѣшеній уравненія* $ax+by=c$ *въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ; найти общее рѣшеніе.*

Положимъ, что $x=\alpha$ и $y=\beta$ будетъ одно изъ рѣшеній уравненія $ax+by=c$, такъ что $a\alpha+b\beta=c$. Посредствомъ вычитанія находимъ

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0;\ \text{слѣдовательно}\ \frac{a}{b}=\frac{\beta-y}{x-\alpha}.$$

Такъ какъ $\frac{a}{b}$ выражено въ простѣйшемъ видѣ, т. е. представляетъ несократимую дробь, а x и y должны быть цѣлыми числами, то мы должны имѣть

$$x-\alpha=bt,\ \beta-y=at,$$

гдѣ t есть нѣкоторое цѣлое число; слѣдовательно

$$x=\alpha+bt,\ y=\beta-at.$$

633. Можетъ случиться, что не будетъ ни одного подобнаго рѣшенія уравненія $ax+by=c$. Напримѣръ, если c меньше $a+b$, то невозможно, чтобы c равнялось $ax+by$ при положительныхъ и цѣлыхъ значеніяхъ x и y, исключая *нулевыхъ* значеній.

Слѣдующимъ способомъ мы можемъ найти рѣшеніе, когда таковое существуетъ. Пусть $\frac{a}{b}$ обращено въ непрерывную дробь и пусть $\frac{p}{q}$ будетъ подходящая дробь, непосредственно предшествующая $\frac{a}{b}$; тогда

$$aq-bp=\pm 1.$$

Положимъ во-первыхъ, что $aq-bp=1$, тогда $aqc-bpc=c$. Сочетая это съ уравненіемъ $ax+by=c$, найдемъ, что

$a(qc-x)-b(pc+y)=0$; слѣдовательно $qc-x=bt$, $pc+y=at$, гдѣ t нѣкоторое цѣлое число. Итакъ

$$x=qc-bt,\ y=at-pc.$$

Рѣшенія найдутся, когда будемъ давать t, если это возможно, положительныя цѣлыя значенія, бо́льшія чѣмъ $\frac{pc}{a}$ и меньшія чѣмъ $\frac{qc}{b}$.

Теперь положимъ, что $aq-bp=-1$; тогда $aqc-bpc=-c$; сочетая это съ уравненіемъ $ax+by=c$, найдемъ, что $a(x+qc)-b(pc-y)=0$. Слѣдовательно

$$x=bt-qc,\ y=pc-at.$$

Рѣшенія найдутся, когда будемъ давать t, если это возможно, положительныя цѣлыя значенія, бо́льшія чѣмъ $\frac{qc}{b}$ и меньшія, чѣмъ $\frac{pc}{a}$.

634. *Найти число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній уравненія* ax+by=c.

Пусть $\frac{a}{b}$ обращено въ непрерывную дробь и пусть $\frac{p}{q}$ будетъ подходящая дробь, непосредственно предшествующая дроби $\frac{a}{b}$; тогда

$$aq-bp=\pm 1.$$

Положимъ, что $aq-bp=1$.

Тогда по предыдущей статьѣ

$$x=qc-bt,\ y=at-pc.$$

I. Положимъ, что $\frac{c}{a}$ и $\frac{c}{b}$ не будутъ цѣлыми числами.

Пусть $$\frac{pc}{a}=m+f,\ \frac{qc}{b}=n+g,$$

гдѣ m и n цѣлыя числа, а f и g правильныя дроби.

Тогда наименьшее значеніе для t, какое можно допустить, будетъ $m+1$, а наибольшее будетъ n; такимъ образомъ число рѣшеній будетъ $n-m$, то-есть $\frac{qc}{b}-\frac{pc}{a}+f-g$, то-есть $\frac{c}{ab}+f-g$. А такъ какъ это должно быть цѣлымъ числомъ, то имъ можетъ быть лишь ближайшее къ $\frac{c}{ab}$ цѣлое число, большее чѣмъ оно, или меньшее, смотря по тому, что́ будетъ больше, f или g.

II. Положимъ, что $\frac{c}{a}$ будетъ цѣлое число.

Тогда $f=0$; такимъ образомъ, когда $t=m$, то значеніе y есть *нуль*. Если мы *включимъ* это рѣшеніе, то число рѣшеній будетъ равняться наибольшему цѣлому числу, заключающемуся въ $\frac{c}{ab}+1$; если же *исключимъ* это рѣшеніе, то число рѣшеній будетъ равняться наибольшему цѣлому числу, содержащемуся въ $\frac{c}{ab}$.

III. Положимъ, что $\frac{c}{b}$ будетъ цѣлое число.

Тогда g равно нулю; такимъ образомъ, когда $t=n$, значеніе x есть *нуль*. Если мы *включимъ* это рѣшеніе, то число рѣшеній будетъ равняться наибольшему цѣлому числу, заключающемуся въ $\frac{c}{ab}+1$; если же *исключимъ* это рѣшеніе, то число рѣшеній будетъ равняться наибольшему цѣлому числу, содержащемуся въ $\frac{c}{ab}$.

IV. Положимъ, что $\frac{c}{a}$ и $\frac{c}{b}$ будутъ цѣлыя числа.

Тогда $f=0$ и $g=0$; такимъ образомъ, когда $t=m$, значеніе y есть *нуль*, и когда $t=n$, то значеніе x равно *нулю*. Если мы *включимъ* эти рѣшенія, то число всѣхъ рѣшеній будетъ равно $\frac{c}{ab}+1$; если-же *исключимъ* ихъ, то число рѣшеній будетъ $\frac{c}{ab}-1$.

Такимъ образомъ число рѣшеній въ каждомъ случаѣ вполнѣ опредѣленно.

Такіе-же результаты мы получимъ при предположеніи $aq-bq=-1$.

635. Чтобы рѣшить уравненіе $ax+by+cz=d$ въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ, мы можемъ поступать такъ: Напишемъ его въ видѣ $ax+by=d-cz$; затѣмъ будемъ приписывать z послѣдовательныя значенія 1, 2, 3,.. и опредѣлять въ каждомъ случаѣ значенія x и y по правиламъ предыдущихъ статей.

636. Положимъ, что мы имѣемъ два совмѣстныя уравненія:

$$ax+by+cz=d, \quad a'x+b'y+c'z=d';$$

исключимъ одну изъ неизвѣстныхъ, напримѣръ z; тогда мы получимъ уравненіе, содержащее двѣ другія перемѣнныя, положимъ $Ax+By=C$. Теперь если A и B не содержатъ общихъ множителей за исключеніемъ тѣхъ, которые содержатся такъ-же и въ C, то на основаніи предыдущаго мы можемъ получить

$$x=\alpha+Bt, \quad y=\beta-At.$$

Подставивъ эти величины въ одно изъ данныхъ уравненій, мы получимъ тогда уравненіе, содержащее t и z, которое мы можемъ представить такъ $A't+B'z=C'$. Изъ этого уравненія, если A' и B' не содержатъ никакихъ общихъ множителей, исключая тѣхъ, что содержатся равнымъ образомъ и въ C', мы можемъ получить

$$t=\alpha'+B't', \quad z=\beta'-A't'.$$

Подставимъ значеніе t въ выраженія, найденныя для x и y; тогда

$$x=\alpha+(\alpha'+B't')B, \quad y=\beta-(\alpha'+B't')A$$

или $$x=\alpha+B\alpha'+BB't', \quad y=\beta-\alpha'A-AB't'.$$

Слѣдовательно для каждой изъ перемѣнныхъ x, y мы получаемъ выраженіе того-же самаго вида, какъ и выраженіе, полученное раньше для z.

Примѣры неопредѣленныхъ уравненій.

Рѣшить въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ слѣдующія шесть уравненій:

1. $8x+65y=81$. 2. $17x+23y=183$. 3. $19x+5y=119$.

4. $7x+10y=297$. 5. $3x+7y=250$. 6. $13x+19y=1170$.

Найти общія цѣлыя рѣшенія въ каждомъ изъ слѣдующихъ четырехъ уравненій, и наименьшія значенія x и y, удовлетворяющія каждому:

7. $7x-9y=29$. 8. $9x-11y=8$.

9. $19x-5y=119$. 10. $17x-49y+8=0$.

11. Найти, сколькими способами можно уплатить 500 рублей рублевыми и пятирублевыми кредитными билетами.

12. Найти, сколькими способами можно заплатить 100 рублей рублями и двугривенниками.

13. Найти, сколькими способами можно уплатить 100 рублей серебряными рублями и полтинниками.

14. Сколькими способами можно уплатить $19^1/_2$ шиллинговъ полукронами ($2^1/_2$ шиллинга) и флоринами (2 шиллинга)?

15. Найти, сколькими способами можно уплатить 112 рубл. 88 коп. пятифранковыми монетами, стоющими по курсу 1 р. 92 к. каждая и турецкими лирами, стоющими каждая 1 р. 68 коп.

16. Существуютъ марки въ 1 р. 40 к. и въ 3 р. 40 к.; сколькими способами можно купить ихъ на 80 рублей?

17. Одинъ англичанинъ долженъ уплатить другому $10^1/_2$ шиллинговъ; какъ всего проще это сдѣлать, если у перваго имѣются только золотыя гинеи (20 шиллинговъ каждая), а у второго только серебряныя полукроны ($2^1/_2$ шиллинга каждая)?

18. Предполагая, что гинея равняется 25 франкамъ, найти какъ всего проще уплатить долгъ въ 44 шиллинга, платя гинеями и получая сдачу франками, если извѣстно, что гинея равняется 20 шиллингамъ?

19. Разложить 200 на такія двѣ части, что если одну изъ нихъ раздѣлить на 6, а другую на 11, то чтобы соотвѣтственные остатки были 5 и 4.

20. Нѣкоторыя монеты имѣютъ соотвѣтственно въ діаметрѣ 0.81 и 0.666 дюйма; сколько тѣхъ и другихъ монетъ можно уложить вмѣстѣ въ рядъ длиною въ 3 фута?

21. Найти n цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, составляющихъ ариѳметическую прогрессію, которой сумма должна равняться n^2; показать, что при n нечетномъ можетъ быть два рѣшенія.

22. Найти наименьшее число, которое, будучи раздѣлено на 28, давало-бы остатокъ 21, а будучи раздѣлено на 19, давало-бы остатокъ 17.

23. Найти общій видъ чиселъ, которые при дѣленіи на 3, на 5, и на 7 давали-бы соотвѣтственно въ остаткѣ 2, 4 и 6.

24. Найти наименьшее число, которое будучи раздѣлено на 28, 19 и 15, давало-бы въ остаткѣ 13, 2 и 7.

25. Рѣшить въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ уравненіе

$$17x+23y+3z=200.$$

26. Найти всѣ положительныя цѣлыя рѣшенія двухъ совмѣстныхъ уравненій $5x+4y+z=272$, $8x+9y+3z=656$.

27. Найти, сколькими способами можно уплатить сумму въ 6 рублей монетами въ 1, 2 и 5 копѣекъ, такъ чтобы число копѣечныхъ и двухъ-копѣечныхъ монетъ равнялось числу пяти-копѣечныхъ.

28. Найти, сколькими способами можно уплатить 96 копѣекъ монетами въ 20, 5 и 1 копѣйку, такъ чтобы всѣхъ монетъ было 16.

29. Найти, сколько марокъ въ 10 к., въ 5 к. и въ 4 коп. можно купить на 88 коп., чтобы 10-копѣечныхъ было столько, сколько остальныхъ вмѣстѣ.

30. Нѣкоторое число, кратное 10-ти, на 99 больше суммы его цифръ; найти это число.

31. Одно и то-же число изображается по одиннадцатиричной и семеричной системамъ однѣми и тѣми-же цифрами, причемъ средняя цифра нуль; найти это число.

32. Число состоитъ изъ трехъ цифръ, сумма которыхъ равна 20; если изъ него вычесть 16 и остатокъ раздѣлить на 2, то порядокъ цифръ будетъ обратный; найти это число.

33. Найти число, изображающееся въ десятеричной системѣ четырьмя цифрами, чтобы послѣ взаимной перестановки цифръ первой и послѣдней получилось то-же самое число, выраженное въ девятиричной системѣ. Показать, что возможно только одно рѣшеніе.

34. Фермеръ купилъ быковъ, овецъ и утокъ, всего 100 головъ и заплатилъ 1000 рублей. Положимъ, что быки стоили по 100 р. каждый, овцы—по 20 р. каждая и утки по 1 рублю каждая; найти сколько головъ тѣхъ, другихъ и третьихъ животныхъ фермеръ купилъ? Сколько рѣшеній допускаетъ задача?

35. Найти три правильныя дроби, составляющія ариѳметическую прогрессію, чтобы знаменатели ихъ были 6, 9 и 18, а сумма была-бы $2^2/_3$.

36. Трое часовъ начали бить одновременно и били соотвѣтственно впродолженіе 25, 29 и 33 секундъ. Меньше чѣмъ чрезъ полчаса, когда первые часы пробили, вторые били послѣ нихъ еще 18 секундъ, а третьи—21 секунду. Сколько ударовъ сдѣлали каждые часы?

37. Два шеста, каждый длиною въ c дюймовъ, раздѣлены соотвѣтственно на m и n частей, причемъ m и n не имѣютъ никакого общаго дѣлителя, бо́льшаго единицы; они приложены одинъ къ другому по длинѣ, такъ что концы ихъ совпадаютъ. Доказать, что никакія два

дѣленія не отстоятъ другъ отъ друга меньше, чѣмъ на $\frac{c}{mn}$ дюймовъ и что на этомъ разстояніи находятся двѣ пары дѣленій. Если $m=250$ и $n=243$, то найти дѣленія, находящіяся другъ отъ друга въ наименьшемъ разстояніи.

38. Въ шкафѣ имѣется три полки, на каждую изъ которыхъ можно поставить по 20 книгъ; если книги состоятъ изъ 3 сочиненій по 5 томовъ каждое, изъ 6 сочиненій по 4 тома каждое и изъ 7 сочиненій по 3 тома каждое, то какъ ихъ размѣстить, чтобы сочиненія не были разрознены.

39. Опредѣлить наибольшую сумму денегъ, какую можно уплатить полтинниками и двугривенниками на 10 различныхъ способовъ, но не болѣе, причемъ допускаются и нулевыя рѣшенія.

40. Опредѣлить наибольшую сумму денегъ, какую можно заплатить полтинниками и двугривенниками, на десять различныхъ способовъ, не допуская нулевыхъ рѣшеній.

ГЛАВА XLVII.

Неопредѣленныя уравненія степени выше первой.

637. Рѣшеніе въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ уравненій, которыхъ степень выше первой, представляетъ значительныя трудности, хотя въ практическомъ отношеніи важность такихъ вопросовъ не велика; поэтому мы ограничимся здѣсь лишь немногими разнаго рода предложеніями.

638. *Рѣшить въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ уравненіе*

$$txy+nx^2+px+qy=r.$$

Это уравненіе содержитъ только одинъ изъ квадратовъ перемѣнныхъ величинъ и можетъ быть всегда рѣшено по способу, показанному на слѣдующемъ примѣрѣ. Рѣшить въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ уравненіе $3xy+2x^2=5y+4x+5$.

Здѣсь $y(3x-5)=-2x^2+4x+5$; слѣдовательно $y=\frac{-2x^2+4x+5}{3x-5}$;

положимъ $3x=z$; тогда $9y=\frac{-2z^2+12z+45}{z-5}=-2z+2+\frac{55}{z-5}$;

слѣдовательно $9y=-6x+2+\frac{55}{3x-5}$.

Такъ какъ x и y должны имѣть цѣлыя значенія, то $3x-5$ должно быть дѣлителемъ 55, а изъ этого условія мы можемъ найти испытаніемъ значенія x и вывести потомъ значенія для y. По изслѣдованіи окажется, что возможны только слѣдующіе случаи:

$$3x-5=\pm 55, \quad 3x-5=\pm 11$$
$$3x-5=\pm 5, \quad 3x--5=\pm 1.$$

Изъ этихъ возможныхъ случаевъ, цѣлыя и положительныя значенія для x получаются только въ слѣдующихъ:

$$3x-5=55, \text{ слѣдовательно } x=20;$$
$$3x-5=1, \text{ слѣдовательно } x=2.$$

Когда $x=20$, мы не получаемъ положительнаго значенія для y; когда-же $x=2$, то получимъ $y=5$, что и будетъ слѣдовательно единственнымъ рѣшеніемъ предложеннаго уравненія въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ.

639. Уравненіе $x^2-Ny^2=1$ всегда можетъ быть рѣшено въ цѣлыхъ числахъ, если N будетъ цѣлое число, не представляющее точнаго квадрата. Дѣйствительно, обращая $\sqrt{N}$ въ непрерывную дробь, мы приходимъ къ слѣдующему уравненію (ст. 614):

$$\rho''(pq'-p'q)=q'^2N-p'^2,$$

и съ окончаніемъ полнаго періода частныхъ $\rho''=1$ (ст. 621); такимъ образомъ

$$pq'-p'q=q'^2N-p'^2.$$

Положимъ теперь, что число повторяющихся періодически частныхъ будетъ *четное*; тогда $\frac{p'}{q'}$ всегда будетъ подходящею дробью *четнаго* порядка, а слѣдовательно будетъ больше $\sqrt{N}$, а такъ-же больше $\frac{p}{q}$. Отсюда заключаемъ, что $p'q-q'p=1$, и мы будемъ имѣть $-1=q'^2N-p'^2$, такъ что $p'^2-Nq'^2=1$. Слѣдовательно мы получимъ рѣшенія предложеннаго уравненія, положивъ $x=p'$ и $y=q'$, гдѣ $\frac{p'}{q'}$ есть нѣкоторая подходящая дробь, непосредственно предшествующая той, которая составлена изъ частнаго $2a$.

Положимъ далѣе, что число повторяющихся періодически частныхъ будетъ *нечетное*; тогда если первое $\rho''=1$, то подходящая дробь $\frac{p'}{q'}$ будетъ подходящею *нечетнаго* порядка, а если слѣдующее $\rho''=1$, то $\frac{p'}{q'}$ будетъ подходящею *четнаго* порядка, и такъ далѣе. Слѣдовательно рѣшенія можно получить, ограничиваясь *четными* подходящими дробями,

встрѣчающимися предъ тѣми, которыя составляются при помощи частнаго $2a$.

640. Если число частныхъ, полученныхъ изъ $\sqrt{N}$ будетъ *не четное*, то, какъ это слѣдуетъ изъ предыдущей статьи, если $\frac{p'}{q'}$ будетъ подходящею дробью нечетнаго порядка, непосредственно предшествующею той дроби, которая получается при помощи частнаго $2a$, то мы будемъ имѣть $pq'-p'q=q'^2N-p'^2$ и $pq'-p'q=1$; такимъ образомъ въ этомъ случаѣ мы получаемъ цѣлыя рѣшенія уравненія $Ny^2-x^2=1$.

641. Уравненіе $x^2-Ny^2=\pm a^2$ положеніемъ $x=ax'$ и $y=ay'$ приводится къ уравненію $x'^2-Ny'^2=\pm 1$, разсмотрѣнному въ предыдущихъ статьяхъ.

642. Соотношеніе $\rho''(pq'-p'q)=q'^2N-p'^2$, т. е. $\pm\rho''=q'^2N-p'^2$ можетъ доставить рѣшеніе уравненію $x^2-Ny^2=\pm c$ даже и въ нѣкоторыхъ такихъ случаяхъ, когда c отлично отъ единицы. Способъ рѣшенія будетъ подобенъ данному въ статьяхъ 639 и 640.

643. Если будетъ извѣстно одно рѣшеніе уравненія $x^2-Ny^2=1$ въ цѣлыхъ числахъ, то мы можемъ получить неограниченное число такихъ рѣшеній. Дѣйствительно, положимъ, что $x=p$ и $y=q$ будутъ такія рѣшенія, такъ что $p^2-Nq^2=1$; тогда $(p-q\sqrt{N})(p+q\sqrt{N})=1$; слѣдовательно

$(p-q\sqrt{N})^n(p+q\sqrt{N})^n=1=(x-y\sqrt{N})(x+y\sqrt{N})$, по предположенію. Положимъ затѣмъ

$$x-y\sqrt{N}=(p-q\sqrt{N})^n,\quad x+y\sqrt{N}=(p+q\sqrt{N})^n;$$

тогда
$$x=\frac{1}{2}\left\{(p+q\sqrt{N})^n+(p-q\sqrt{N})^n\right\}$$
$$y=\frac{1}{2\sqrt{N}}\left\{(p+q\sqrt{N})^n-(p-q\sqrt{N})^n\right\};$$

очевидно, что если n будетъ какое нибудь положительное цѣлое число, то эти значенія x и y будутъ цѣлыми и положительными.

644. Подобнымъ-же образомъ, если будетъ извѣстно одно рѣшеніе уравненія $x^2-Ny^2=-1$, то мы можемъ получить неограниченное число такихъ рѣшеній. Дѣйствительно, положимъ, что $x=p$ и $y=q$ будутъ подобныя рѣшенія; тогда $(p-q\sqrt{N})(p+q\sqrt{N})=-1$. Теперь возьмемъ какое нибудь *нечетное* цѣлое число n; тогда

$$(p-q\sqrt{N})^n(p+q\sqrt{N})^n=(-1)^n=-1.$$
$$=(x-y\sqrt{N})(x+y\sqrt{N}),\text{ по предположенію.}$$

Послѣ этого можемъ поступать какъ въ ст. 643.

645. Если будетъ извѣстно одно рѣшеніе уравненія $x^2-Ny^2=a$ въ цѣлыхъ числахъ, то мы можемъ получить неограниченное число

подобныхъ рѣшеній. Дѣйствительно, положимъ, что $x=p$ и $y=q$ будутъ подобныя рѣшенія и пусть $x=m$ и $y=n$ будетъ рѣшеніе уравненія $x^2-Ny^2=1$; тогда уравненіе $x^2-Ny^2=a$ можно написать

$$x^2-Ny^2=(p^2-Nq^2)(m^2-Nn^2)$$

$$=p^2m^2+N^2q^2n^2-N(p^2n^2+q^2m^2)=(pm\pm Nqn)^2-N(pn\pm qm)^2;$$

слѣдовательно мы можемъ принять $x=pm\pm Nqn$, $y=pn\pm qm$.

Примѣры неопредѣленныхъ уравненій.

1. Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненіе

$$3xy-4y+3x=14.$$

2. Рѣшить въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ уравненіе

$$xy+x^2=2x+3y+29.$$

3. Найти цѣлыя положит. рѣшенія уравненія $x^2-13y^2=-1$.

4. Найти цѣлыя положит. рѣшенія уравненія $x^2-101y^2=-1$.

5. Показать, какъ найти рядъ чиселъ, которыя одновременно были-бы двухъ видовъ n^2-1 и $10m^2$, и найти величину наименьшихъ изъ нихъ.

6. Одинъ землевладѣлецъ на вопросъ о размѣрахъ его парка отвѣчалъ: «въ немъ отъ 1000 до 2000 квадратныхъ саженъ; если-бы онъ былъ меньше на 3 квадр. сажени, то въ немъ заключалось-бы квадратное число квадр. саженъ; а если-бы паркъ моего брата, представляющій квадратное число квадратныхъ саженъ, былъ больше на одну квадратную сажень, то онъ былъ-бы ровно вдвое меньше моего». Найти размѣры его парка.

7. Найти цѣлое число, которое было-бы на единицу больше утроенной цѣлой части квадратнаго корня изъ него; показать, что существуетъ только два рѣшенія этой задачи, и не больше.

8. Показать, что число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній уравненія $y^2+ax^2=b$ будетъ ограничено, если a число положительное.

9. Найти всѣ цѣлыя положительныя рѣшенія уравненія

$$3y^2-2xy+7x^2=27.$$

10. Найти всѣ цѣлыя положительныя рѣшенія уравненія

$$2x^2-9xy+7y^2=38.$$

11. Найти общій видъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній уравненія $x^2-23y^2=1$, если дано рѣшеніе $x=24$ и $y=5$.

12. Найти общій видъ цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній уравненія $x^2-2y^2=7$, если дано рѣшеніе $x=3$ и $y=1$.

ГЛАВА XLVIII.

Частныя дроби и неопредѣленные коэффиціенты.

646. Алгебраическая дробь можетъ быть въ нѣкоторыхъ случаяхъ разложена на болѣе простыя, такъ называемыя, *частныя* дроби. Такъ напримѣръ

$$\frac{2x-3}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}.$$

Общая теорія разложенія данной дроби на болѣе простыя дроби изложена нами въ *Теоріи Уравненій* и въ *Интегральномъ Вычисленіи*. Здѣсь мы разсмотримъ только болѣе простые случаи.

647. Пусть мы имѣемъ дробь $\frac{ax^2+bx+c}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$, знаменатель которой состоитъ изъ трехъ различныхъ между собою множителей первой степени относительно x, причемъ числитель ея не выше второй степени въ отношеніи x. Эта дробь можетъ быть разложена на три простыя дроби, которыя будутъ соотвѣтственно имѣть своими знаменателями множители знаменателя предложенной дроби, числителями-же нѣкоторыя величины, не зависящія отъ x. Чтобы доказать это, положимъ, что

$$\frac{ax^2+bx+c}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\frac{C}{x-\gamma},$$

гдѣ A, B, C пока остаются неопредѣленными; тогда намъ нужно будетъ показать, что для A, B, C можно найти такія постоянныя значенія, которыя обратятъ предыдущее уравненіе въ *тожество*, то-есть сдѣлаютъ его справедливымъ для какихъ-бы то ни было значеній x. Умножимъ на $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$; тогда вопросъ будетъ состоять въ томъ, чтобы слѣдующее уравненіе было *тожествомъ*:

$$ax^2+bx+c=A(x-\beta)(x-\gamma)+B(x-\alpha)(x-\gamma)+C(x-\alpha)(x-\beta);$$

это будетъ обезпечено, если мы расположимъ члены правой части равенства по степенямъ x и уравняемъ коэффиціентъ при каждой степени коэффиціенту при той-же степени въ лѣвой части; мы получимъ тогда три уравненія первой степени для опредѣленія A, B и C.

648. Способъ предыдущей статьи можно приложить ко всякой дроби, знаменатель которой представляетъ произведеніе *различныхъ* простыхъ множителей, а числитель сравнительно съ знаменателемъ будетъ низшей степени.

Впрочемъ предыдущая статья не совсѣмъ удовлетворительна, потому что мы не доказали, что окончательныя уравненія, получаемыя нами, будутъ *независимы* другъ отъ друга и *совмѣстны*. Но такъ

какъ намъ придется прилагать этотъ способъ только къ простымъ примѣрамъ, въ которыхъ полученные выводы легко можно повѣрить, то мы не будемъ тратить много времени на этотъ предметъ здѣсь, отославъ читателя къ *Теоріи уравненій* и къ *Интегральному Вычисленію*.

649. Положимъ, что намъ нужно разложить дробь $\frac{2x-3}{x^2-3x+2}$ въ рядъ по восходящимъ степенямъ x. Для этого можно пользоваться различными способами. Можно употребить обыкновенное алгебраическое дѣленіе, написавши дѣлитель въ порядкѣ $2-3x+x^2$ и дѣлимое въ порядкѣ $-3+2x$. Или мы можемъ разложить дробь $\frac{1}{x^2-3x+2}$, написавши ее въ видѣ $(x^2-3x+2)^{-1}$ и найдя коэффиціенты послѣдовательныхъ степеней x по теоремѣ Ньютона въ приложеніи къ многочленамъ; послѣ того нужно будетъ умножить результатъ на $2x-3$. Однако гораздо удобнѣе будетъ разложить эту дробь на частныя дроби и затѣмъ разложить въ строку каждую изъ нихъ. Такъ

$$\frac{2x-3}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x};$$

$$-\frac{1}{1-x}=-(1-x)^{-1}=-\{1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots\},$$

$$-\frac{1}{2-x}=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}=-\frac{1}{2}\left\{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2^3}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots\right\}$$

Слѣдовательно искомый рядъ для дроби $\frac{2x-3}{x^2-3x+2}$ будетъ имѣть своимъ общимъ членомъ $-\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$.

650. Не разлагая подобныхъ выраженій какъ предыдущее въ рядъ на самомъ дѣлѣ, мы можемъ показать, что послѣдовательные коэффиціенты будутъ связаны между собою извѣстнымъ соотношеніемъ; но прежде чѣмъ мы это покажемъ, намъ необходимо будетъ доказать одно общее свойство рядовъ.

651. Если рядъ $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$ постоянно равенъ нулю, каково-бы ни было значеніе x, то коэффиціенты a_0, a_1, a_2, a_3, ... должны быть каждый отдѣльно равенъ нулю. Дѣйствительно, такъ какъ этотъ рядъ равенъ нулю *при какомъ угодно значеніи* x, то мы можемъ положить $x=0$; тогда рядъ приведется къ a_0, которое такимъ образомъ и само должно быть равно нулю. Слѣдовательно, отбросивъ этотъ членъ, мы найдемъ, что $a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$ всегда должно быть равно нулю; раздѣливъ на x, найдемъ, что $a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots$ должно быть постоянно равно нулю. Слѣдовательно по предыдущему заключаемъ,

что $a_1=0$. Продолжая разсуждать такимъ образомъ, мы докажемъ теорему.

Если ряды $$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots.$$ $$A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots.$$ всегда равны между собою, каковы-бы ни были значенія x, то $$a_0-A_0+(a_1-A_1)x+(a_2-A_2)x^2+\ldots.$$ будетъ всегда равно нулю, каково-бы ни было значеніе x; отсюда мы заключаемъ, что $$a_0-A_0=0,\quad a_1-A_1=0,\ a_2-A_2=0,\ \ldots.$$ то-есть что коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x въ обоихъ рядахъ равны.

Данная здѣсь теорема называется иногда *Началомъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ*. Мы допустили справедливость ея въ ст. 526 542 и 549.

652. Доказательство предыдущей статьи изложено въ томъ видѣ, какъ оно обыкновенно дается въ начальныхъ курсахъ Алгебры; но въ немъ есть одно неудобство, требующее изслѣдованія.

Мы ограничимся теоремой, что если рядъ $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ постоянно равенъ нулю, то каждый коэффиціентъ долженъ быть равенъ нулю; потому что послѣдняя теорема предыдущей статьи слѣдуетъ изъ этой.

Когда мы говоримъ, что рядъ *всегда* равенъ нулю мы подразумѣваемъ, что онъ равенъ нулю для всѣхъ значеній x, дѣлающихъ этотъ рядъ *сходящимся*; потому что о расходящемся рядѣ нельзя сказать, что онъ можетъ уничтожиться.

Мы доказали, что $a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$ всегда есть нуль, то-есть, что xS_1, гдѣ S_1 поставлено вмѣсто $a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots$, всегда будетъ нуль. Слѣдовательно, если x не нуль, то S_1 должно быть нулемъ; но если x будетъ нулемъ, то xS_1 уничтожается при всякомъ конечномъ значеніи S_1; такимъ образомъ мы въ сущности не должны допускать, что S_1 равняется нулю, когда x есть нуль, а потому и положеніе $a_1=0$ не будетъ доказано строго. Въ этомъ и заключается то затрудненіе, которое мы должны изслѣдовать.

Мы имѣемъ $S_1=a_1+xS_2$, гдѣ S_2 стоитъ вмѣсто $a_2+a_3x+a_4x^2+\ldots$; и хотя мы не можемъ съ увѣренностью сказать, что S_1 равняется нулю, когда x есть нуль, однако мы можемъ говорить, что S_1 есть нуль, какъ-бы ни былъ малъ x. Такъ какъ первоначальный рядъ предполагается сходящимся, то и рядъ S_2 будетъ такъ-же сходящимся, а слѣдовательно онъ не будетъ возрастать далѣе извѣстной опредѣленной величины, когда x сдѣлается достаточно малымъ; а потому если сдѣлаемъ x достаточно малымъ, то xS_2 будетъ столь малымъ, какъ мы пожелаемъ. Слѣдовательно a_1 должно быть нулемъ, потому что, если a_1 не было-бы нулемъ, то мы не могли-бы имѣть $S_1=0$, при произвольно маломъ x.

Такимъ образомъ выводъ $a_1=0$ будетъ строгимъ, если S_2 будетъ сходящеюся строкою при x, сколько угодно маломъ. Подобнымъ-же образомъ выводъ $a_2=0$ будетъ строго вѣрнымъ, если S_3 будетъ сходящеюся строкою при x, какъ угодно маломъ. Здѣсь S_3 мы ставимъ вмѣсто $a_3+a_4x+a_5x^2+\ldots$ И такъ далѣе.

Такъ какъ первоначальная строка предполагается сходящеюся, то строки S_2, $S_3\ldots$ такъ-же сходящіяся, когда x будетъ какъ угодно малымъ. И такимъ образомъ теорема предыдущей статьи справедлива.

653. Положимъ, что рядъ $u_0+u_1x+u_2x^2+u_3x^3+\ldots$ представляетъ разложеніе дроби $\dfrac{a+bx}{1-px-qx^2}$; тогда

$$a+bx=(1-px-qx^2)(u_0+u_1x+u_2x^2+u_3x^3+\ldots.)$$

Если n будетъ больше единицы, то коэффиціентъ при x^n въ правой части будетъ $u_n-pu_{n-1}-qu_{n-2}$; отсюда слѣдуетъ, что такъ какъ въ лѣвой части нѣтъ степени x выше первой, то по ст. 651 мы должны имѣть для каждаго значенія n большаго единицы

$$u_n-pu_{n-1}-qu_{n-2}=0.$$

И сравнивая первые и вторые члены обѣихъ частей, найдемъ

$$u_0=a,\ u_1-pu_0=b;$$

послѣднія два уравненія опредѣляютъ u_0 и u_1, и тогда предыдущее уравненіе опредѣлитъ u_2, u_3, u_4, ... если въ немъ послѣдовательно будемъ полагать $n=2,\ 3,\ 4,\ldots$

Примѣры частныхъ дробей и неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

Разложить каждое изъ слѣдующихъ семи выраженій по восходящимъ степенямъ x и дать общій членъ:

1. $\dfrac{1}{3-2x}$. 2. $\dfrac{5-10x}{2-x-3x^2}$. 3. $\dfrac{3x-2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

4. $\dfrac{x}{(1-x)(1-px)}$. 5. $\dfrac{1}{1-2x+x^2}$. 6. $\dfrac{5+6x}{(1-3x)^2}$. 7. $\dfrac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}$.

Разложить каждое изъ слѣдующихъ пяти выраженій по восходящимъ степенямъ x до пятаго члена включительно, и написать соотношеніе, связывающее коэффиціенты послѣдовательныхъ членовъ.

8. $\dfrac{1}{1-x+x^2}$. 9. $\dfrac{1}{1-2x+3x^2}$ 10. $\dfrac{1-x^3}{2-2x-x^2}$.

11. $\dfrac{1}{a^2+ax+x^2}$. 12, $\dfrac{1}{1-px+px^2-x^3}$.

13. Найти сумму n членовъ слѣдующаго ряда, разлагая каждый членъ на частныя дроби:

$$\frac{x}{(1+x)(1+ax)}+\frac{ax}{(1+ax)(1+a^2x)}+\frac{a^2x}{(1+a^2x)(1+a^3x)}+\ldots$$

14. Найти подобнымъ-же образомъ сумму n членовъ слѣдующаго ряда

$$\frac{x(1-ax)}{(1+x)(1+ax)(1+a^2x)}+\frac{ax(1-a^2x)}{(1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x)}+\ldots$$

15. Опредѣлить a, b, c, d, e такимъ образомъ, чтобы n-ый членъ въ разложеніи выраженія $\dfrac{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}{(1-x)^5}$ могъ быть n^4x^{n-1}.

16. Показать, какъ разложить $\dfrac{x^p}{(x-a)(x-b)(x-c)\ldots}$ на частныя дроби, предполагая, что число множителей въ знаменателѣ равно n и что p цѣлое число, меньшее чѣмъ n. Если p меньше n, то показать, что

$$\frac{a^{p-1}}{(a-b)(a-c)\ldots}+\frac{b^{p-1}}{(b-a)(b-c)\ldots}+\frac{c^{p-1}}{(c-a)(c-b)\ldots}+\ldots=0.$$

ГЛАВА XLIX.

Возвратные ряды.

654. Какой нибудь рядъ называется *возвратнымъ*, когда начиная съ нѣкотораго опредѣленнаго члена, каждый его членъ равенъ суммѣ опредѣленнаго числа предыдущихъ членовъ, помноженныхъ соотвѣтственно на извѣстныя *постоянныя* величины. Подъ величинами *постоянными* мы разумѣемъ величины, остающіяся безъ измѣненія, какой-бы членъ ряда мы не разсматривали.

655. Геометрическая прогрессія представляетъ простой примѣръ возвратнаго ряда, потому что въ ряду $a+ar+ar^2+ar^3+\ldots$ каждый членъ послѣ перваго равняется r-кратному предыдущему члену. Если u_{n-1} и u_n соотвѣтственно означаютъ $(n-1)$-й и n-й члены, то $u_n-ru_{n-1}=0$; сумму коэффиціентовъ u_n и u_{n-1} съ соотвѣтствующими имъ знаками, т. е. $1-r$ мы будемъ называть *основнымъ соотношеніемъ* ряда.

Въ ряду $2+4x+14x^2+46x^3+152x^4+\ldots$ законъ, связывающій послѣдовательные члены будетъ $u_n-3xu_{n-1}-x^2u_{n-2}=0$; этотъ законъ справедливъ для значеній n большихъ единицы, такъ что каждый членъ, слѣдующій за вторымъ, можетъ быть полученъ изъ двухъ непосредственно предшествующихъ ему членовъ. Основное соотношеніе здѣсь будетъ $1-3x-x^2$.

656. *Найти сумму* n *членовъ возвратнаго ряда.*

Пусть рядъ будетъ $u_0+u_1x+u_2x^2+u_3x^3+\ldots$ и пусть законъ его

выражается соотношеніемъ $1-px-qx^2$, такъ что для всякаго значенія n, большаго единицы мы будемъ имѣть $u_n - pu_{n-1} - qu_{n-2} = 0$. Означимъ сумму первыхъ n членовъ ряда буквою S; тогда

$$S = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ldots + u_{n-1} x^{n-1},$$

$$pxS = u_0 px + u_1 px^2 + u_2 px^3 + \ldots + u_{n-2} px^{n-1} + u_{n-1} px^n.$$

$$qx^2 S = u_0 qx^2 + u_1 qx^3 + \ldots + u_{n-3} qx^{n-1} + u_{n-2} qx^n + u_{n-1} qx^{n+1};$$

откуда

$$S - pxS - qx^2 S = u_0 + u_1 x - u_0 px - u_{n-1} px^n - u_{n-2} qx^n - u_{n-1} px^{n+1}$$

потому что всѣ другіе члены правой части равенства уничтожатся въ силу соотношеній, существующихъ между каждыми тремя послѣдовательными членами даннаго ряда. Слѣдовательно

$$S = \frac{u_0 + x(u_1 - pu_0) - x^n\{pu_{n-1} + qu_{n-2} + qxu_{n-1}\}}{1 - px - qx^2}.$$

Если членъ $x^n\{pu_{n-1} + qu_{n-2} + qxu_{n-1}\}$ уменьшается безпредѣльно по мѣрѣ безпредѣльнаго возрастанія n, то мы можемъ сказать, что сумма безконечнаго числа членовъ возвратнаго ряда будетъ

$$\frac{u_0 + x(u_1 - pu_0)}{1 - px - qx^2}.$$

Очевидно, что если это выраженіе разложить въ строку по степенямъ x, то мы вновь получимъ данный возвратный рядъ (см. ст. 653).

657. Если возвратный рядъ будетъ $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ и если основное соотношеніе членовъ будетъ $1 - p - q$, то намъ нужно будетъ въ выводахъ предыдущей статьи положить только $x = 1$, чтобы найти сумму n или безконечнаго числа членовъ.

658. Когда $1 - px - qx^2$ можетъ быть разложено на два *дѣйствительныхъ* множителя первой степени относительно x, то выраженіе $\frac{u_0 + x(u_1 - pu_0)}{1 - px - qx^2}$ можетъ быть разложено на частныя дроби, каждая изъ которыхъ будетъ имѣть знаменателемъ выраженіе, содержащее только первую степень x (ст. 337 и 647). Въ этомъ случаѣ, такъ какъ каждая частная дробь можетъ быть разложена въ рядъ, представляющій геометрическую прогрессію, то мы можемъ получить выраженіе для общаго члена возвратнаго ряда. Такимъ образомъ мы имѣемъ другой способъ получить сумму n членовъ, такъ какъ сумма n членовъ каждой изъ геометрическихъ прогрессій извѣстна.

Примѣры возвратныхъ рядовъ.

Найти выраженія, изъ которыхъ могутъ быть выведены слѣдующіе три ряда; разложить эти выраженія на частныя дроби и дать общій членъ каждаго ряда.

1. $4+9x+21x^2+51x^3+\ldots$

2. $1+11x+89x^2+659x^3+\ldots$

3. $1+3x+11x^2+43x^3+\ldots$

4. Найти, какъ мало должно быть x, чтобы рядъ въ примѣрѣ 3 могъ быть сходящимся.

5. Найти общій членъ ряда $3+11+32+84+\ldots$

6. Найти сумму n членовъ ряда $1+5+17+53+161+485+\ldots$

7. Найти общій членъ ряда $10+14+10+6+\ldots$ и найти сумму безконечнаго числа его членовъ.

8. Найти выраженіе, изъ котораго можно было-бы вывести слѣдующій рядъ и получить общій его членъ

$$2-x+2x^2-5x^3+10x^4-17x^5+\ldots$$

ГЛАВА L.

Суммованіе рядовъ.

659. Частные виды рядовъ были суммированы въ главахъ объ ариѳметической и геометрической прогрессіяхъ и о возвратныхъ рядахъ; здѣсь мы дадимъ нѣсколько разныхъ примѣровъ не подходящихъ подъ правила предыдущихъ главъ.

660. Найти сумму ряда $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$.

Мы уже нашли эту сумму въ ст. 460 и 482; но для этого обыкновенно дается слѣдующій способъ. Допустимъ, что

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=A+Bn+Cn^2+Dn^3+En^4+\ldots,$$

гдѣ A, B, C, D, E,... постоянныя величины, остающіяся пока неопредѣленными. Перемѣнимъ n на $n+1$; тогда будетъ

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=A+B(n+1)+C(n+1)^2 \\ +D(n+1)^3+E(n+1)^4+\ldots$$

Вычтемъ первую строку изъ второй; мы получимъ

$$n^2+2n+1=B+C(2n+1)+D(3n^2+3n+1) \\ +E(4n^3+6n^2+4n+1)+\ldots$$

Уравняемъ другъ другу коэффиціенты при соотвѣтственныхъ степеняхъ n; тогда E равно нулю, а такъ-же равны нулю и всѣ другіе члены послѣ E.

$$3D=1;\ 3D+2C=2;\ D+C+B=1.$$

откуда $$D=\tfrac{1}{3},\ C=\tfrac{1}{2},\ B=\tfrac{1}{6}.$$

Такимъ образомъ

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=A+\frac{n}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3}.$$

Для опредѣленія A мы замѣчаемъ, что такъ какъ это равенство справедливо для всѣхъ цѣлыхъ положительныхъ значеній n, то мы можемъ положить $n=1$; тогда $A=0$. Слѣдовательно искомая сумма будетъ

$$\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Тотъ-же самый способъ можно приложить къ нахожденію суммы кубовъ первыхъ n натуральныхъ чиселъ или къ нахожденію суммы ихъ четвертыхъ степеней, и такъ далѣе. См. также ст. 671.

661. Положимъ, что n-й членъ нѣкотораго ряда будетъ

$$\{an+b\}\{a(n+1)+b\}\{a(n+2)+b\}\ldots\{a(n+m-1)+b\},$$

гдѣ m—опредѣленное цѣлое число, а a и b извѣстныя впередъ постоянныя величины; тогда сумма первыхъ n членовъ этого ряда будетъ

$$\frac{\{an+b\}\{a(n+1)+b\}\ldots\{a(n+m-1)+b\}\{a(n+m)+b\}}{(m+1)a}+C,$$

гдѣ C есть нѣкоторая постоянная.

Означимъ n-й членъ предложеннаго ряда чрезъ u_n и чрезъ S_n сумму n его членовъ; тогда намъ нужно будетъ доказать, что

$$S_n=\frac{an+b}{(m+1)a}u_{n+1}+C.$$

Допустимъ, что формула эта справедлива для нѣкотораго опредѣленнаго значенія n; прибавимъ $(n+1)$-й членъ ряда къ обѣимъ частямъ; тогда

$$S_n+u_{n+1}=\frac{an+b}{(m+1)a}u_{n+1}+u_{n+1}+C;$$

то-есть $S_{n+1}=\dfrac{a(n+m+1)+b}{(m+1)a}u_{n+1}+C=\dfrac{a(n+1)+b}{(m+1)a}u_{n+2}+C.$

Такимъ образомъ та-же самая формула будетъ справедливою и для суммы $n+1$ членовъ, если она была справедлива для n членовъ. Слѣдовательно, если формула будетъ справедлива для какого нибудь числа членовъ, то она справедлива-же будетъ и для ближайшаго бо́льшаго числа; и такъ далѣе. Но формула эта *будетъ* справедлива, когда $n=1$, если мы выберемъ C такъ, чтобы

$$S_1=\frac{a+b}{(m+1)a}u_2+C, \text{ то-есть } u_1=\frac{a+b}{(m+1)a}u_2+C;$$

такимъ образомъ C опредѣлено и справедливость теоремы доказана.

Такъ какъ $u_2=\frac{a(m+1)+b}{a+b}u_1$, то мы имѣемъ

$$C=u_1-\frac{a(m+1)+b}{a(m+1)}u_1=-\frac{bu_1}{a(m+1)}.$$

Слѣдовательно $$S_n=\frac{an+b}{(m+1)a}u_{n+1}-\frac{bu_1}{(m+1)a}.$$

Такимъ образомъ сумма первыхъ n членовъ предложеннаго ряда получается вычитаніемъ постоянной величины $\frac{bu_1}{(m+1)a}$ изъ извѣстнаго выраженія, зависящаго отъ n. Это выраженіе есть $\frac{an+b}{(m+1)a}u_{n+1}$; мы можемъ такъ-же представить это выраженіе въ другомъ равнозначущемъ видѣ $\frac{a(n+m)+b}{(m+1)a}u_n$ и чтобы это запомнить, мы замѣтимъ, что его можно составить, *вводя добавочный множитель въ конецъ члена* u_n *и дѣля на произведеніе числа увеличенныхъ такимъ образомъ множителей и коэффиціента при* n.

662. Выводъ предыдущей статьи мы можемъ получить другимъ путемъ. Пусть по-прежнему u_n означаетъ

$$\{an+b\}\{a(n+1)+b\}\{a(n+2)+b\}\ldots\{a(n+m-1)+b\},$$

и пусть S_n означаетъ сумму первыхъ n членовъ ряда, въ которомъ u_n есть n-ый членъ.

Мы имѣемъ

$$u_{n+1}=\frac{a(n+m)+b}{an+b}u_n=u_n+\frac{amu_n}{an+b};$$

пусть $an+b=p$; тогда

$$p(u_{n+1}-u_n)=amu_n;$$

перемѣнимъ n на $n-1$; тогда

$$\{p-a\}\{u_n-u_{n-1}\}=amu_{n-1};$$

а такъ-же

$$\{p-2a\}\{u_{n-1}-u_{n-2}\}=amu_{n-2};$$

$$\{p-3a\}\{u_{n-2}-u_{n-3}\}=amu_{n-3};$$

. . . . . .

$$\{p-(n-1)a\}\{u_2-u_1\}=amu_1.$$

Отсюда посредствомъ сложенія находимъ

$$p(u_{n+1}-u_1)-a\{u_n+u_{n-1}+u_{n-2}+\ldots+u_2-(n-1)u_1\}=amS_n;$$

слѣдовательно $$p(u_{n+1}-u_1)+nau_1=amS_n+aS_n;$$

а потому $$S_n=\frac{an+b}{(m+1)a}u_{n+1}-\frac{bu_1}{(m+1)a}.$$

663. Положимъ, что n-ый членъ будетъ $\frac{1}{u_n}$, гдѣ u_n означаетъ то-же, что и въ предыдущей статьѣ; тогда сумма первыхъ n членовъ ряда будетъ $-\frac{an+b}{(m-1)au_n}+C$.

Допустимъ, какъ и прежде, что $S_n=-\frac{an+b}{(m-1)au_n}+C$, и придадимъ къ обѣимъ частямъ по $\frac{1}{u_{n+1}}$; тогда будетъ

$$S_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{an+b}{(m-1)au_n}+C$$

$$=\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{a(n+n)+b}{(m-1)au_{n+1}}+C=-\frac{a(n+1)+b}{(m-1)au_{n+1}}+C.$$

Слѣдовательно, какъ и раньше, справедливость теоремы доказана, если только C выбрано такъ, что $\frac{1}{u_1}=-\frac{a+b}{(m-1)au_1}+C$. Такимъ образомъ $C=\frac{am+b}{(m-1)au_1}$, и $S_n=\frac{am+b}{(m-1)au_1}-\frac{an+b}{(m-1)au_n}$.

Этотъ выводъ можетъ быть также полученъ по способу ст. 662.

664. Могутъ встрѣтиться такіе ряды, которые не заключаются непосредственно въ томъ общемъ видѣ рядовъ, какой данъ въ предыдущей статьѣ, но они могутъ быть разложены на два или болѣе другихъ рядовъ, подобныхъ предыдущимъ. Напримѣръ, пусть требуется найти сумму n членовъ ряда

$$\frac{3}{1.2.4.5}+\frac{4}{2.3.5.6}+\frac{5}{3.4.6.7}+\ldots$$

Здѣсь n-й членъ будетъ

$$=\frac{n+2}{n(n+1)(n+3)(n+4)}=\frac{(n+2)^2}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

Но $(n+2)^2=n(n+1)+3n+4$; такимъ образомъ n-й членъ будетъ $=\frac{n(n+1)+3n+4}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

$$+\frac{3}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}+\frac{4}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

Если такимъ образомъ будетъ разложенъ каждый членъ предложеннаго ряда, то мы получимъ 3 ряда, каждый изъ которыхъ можетъ быть суммированъ по способу предыдущей статьи. Итакъ сумма предложеннаго ряда можетъ быть найдена. Въ настоящемъ случаѣ искомая сумма будетъ

$$\frac{1}{24}-\frac{1}{2(n+3)(n+4)}+\frac{1}{24}-\frac{3}{3(n+2)(n+3)(n+4)}$$
$$+\frac{1}{24}-\frac{4}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

665. *Многоугольныя числа.* Выраженіе $n+\frac{1}{2}n(n-1)b$ представляетъ сумму n членовъ ариѳметической прогрессіи, первый членъ которой равенъ единицѣ, а разность равна b. Если будемъ полагать $b=0$, 1, 2, 3, ..., то мы будемъ получать выраженія, которыя вообще называются соотвѣтственно членами 2-го, 3-го, 4-го, ... порядка *многоугольныхъ чиселъ*. *Первый* порядокъ будетъ тотъ, въ которомъ каждый членъ есть единица. Такимъ образомъ мы будемъ имѣть

1-й порядокъ, n-й членъ 1; рядъ: 1, 1, 1, 1, 1, ...
2-й порядокъ, n-й членъ n; рядъ: 1, 2, 3, 4, 5, ...
3-й порядокъ, n-й членъ $\frac{1}{2}n(n+1)$; рядъ: 1, 3, 6, 10, ...
4-й порядокъ, n-й членъ n^2; рядъ: 1, 4, 9, 16, ...
5-й порядокъ, n-й членъ $\frac{1}{2}n(3n-1)$; рядъ: 1, 5, 12, 22, ...

и такъ далѣе.

Числа второго, третьяго, четвертаго, пятаго .... рядовъ называются соотвѣтственно *линейными*, *треугольными*, *квадратными*, *пятиугольными*, и такъ далѣе.

666. Членъ n-й r-аго порядка многоугольныхъ чиселъ будетъ

$$n+\tfrac{1}{2}n(n-1)(r-2);$$

сумма n членовъ этого ряда по ст. 661 будетъ

$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{r-2}{2}\cdot\frac{(n-1)n(n+1)}{3},$$

или
$$\tfrac{1}{6}n(n+1)\{(r-2)(n-1)+3\}.$$

Слѣдовательно для треугольныхъ чиселъ $S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$; для квадратныхъ $S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, и такъ далѣе.

667. *Найти число пушечныхъ ядеръ, сложенныхъ въ пирамидальную кучу.*

1) Положимъ, что основаніе пирамиды будетъ равносторонній треугольникъ и пусть въ каждой сторонѣ основанія будетъ по n ядеръ; тогда число ядеръ въ самомъ нижнемъ ряду будетъ $n+(n-1)+(n-2)+.....+2+1$, то-есть *треугольное* число $\frac{1}{2}n(n+1)$; число ядеръ въ слѣдующемъ снизу ряду найдется, если перемѣнимъ n на $n-1$; и такъ далѣе. Слѣдовательно по ст. 665 число всѣхъ ядеръ будетъ $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$.

2) Положимъ, что основаніе пирамиды будетъ квадратъ и пусть въ каждой его сторонѣ будетъ по n ядеръ; тогда число шаровъ въ са-

момъ нижнемъ ряду будетъ n^2, въ слѣдующемъ снизу $(n-1)^2$, и такъ далѣе. Число всѣхъ ядеръ будетъ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Подобнымъ-же образомъ мы можемъ поступать и въ случаѣ пирамиды какой нибудь другой формы.

Изъ предыдущаго предложенія мы видимъ причину, по которой извѣстныя числа названы *треугольными*, *квадратными*, и т д.

Если-бы куча ядеръ была *неполною*, то мы могли-бы сперва найти число ядеръ въ кучѣ, предположивъ, что она полная, затѣмъ найти число ядеръ въ меньшей кучѣ, которой недостаетъ, и разность представитъ тогда число ядеръ въ неполной кучѣ.

668. Подобный предыдущему вопросъ представился-бы намъ, если-бы намъ нужно было найти сумму ядеръ въ кучѣ съ *прямоугольнымъ*, но не квадратнымъ основаніемъ. Въ этомъ случаѣ куча будетъ оканчиваться на вершинѣ рядомъ шаровъ въ одинъ шаръ. Положимъ, что въ этомъ ряду будетъ p ядеръ; тогда n-й слой, считая отъ вершины, будетъ заключать въ продольной сторонѣ $p+n-1$ ядеръ и въ поперечной n ядеръ, а слѣдовательно въ немъ будетъ $n(p+n-1)$ ядеръ. Поэтому число ядеръ въ n рядахъ будетъ

$$\tfrac{1}{2}n(n+1)p+\tfrac{1}{3}(n-1)n(n+1), \text{ или } \tfrac{1}{6}n(n+1)(3p+2n-2).$$

Если буквой m означимъ число ядеръ въ продольной сторонѣ нижняго ряда, т.-е. положимъ $m=p+n-1$, то сумма тогда напишется $\frac{1}{6}n(n+1)(3m-n+1)$; такъ какъ n есть число ядеръ въ поперечной сторонѣ нижняго ряда, то сумма выражается такимъ образомъ посредствомъ чиселъ ядеръ въ длинѣ и ширинѣ основанія.

669. *Фигурныя числа.* Слѣдующіе ряды представляютъ то, что называется *фигурными числами* разныхъ порядковъ:

1-й порядокъ: 1, 1, 1, 1, 1, ...
2-й порядокъ: 1, 2, 3, 4, 5, ...
3-й порядокъ: 1, 3, 6, 10, 15, ...
. . . . . .

Общій законъ состоитъ въ томъ, что n-ый членъ какого нибудь порядка представляетъ собою сумму n членовъ предыдущаго порядка. Такъ, n-й членъ второго порядка будетъ n, такой-же членъ третьяго порядка будетъ $\frac{n(n+1)}{1.2}$; такой-же членъ четвертаго порядка $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$, и вообще n-ый членъ r-аго порядка будетъ $\frac{n(n+1)\ldots(n+r-2)}{\lfloor r-1}$. Это мы можемъ доказать наведеніемъ. Дѣйствительно, допустивъ справедливость этого выраженія для n-аго члена r-аго порядка чиселъ, мы можемъ найти сумму первыхъ n членовъ r-аго

порядка по формулѣ ст. 661. Нужно только поставить 1 вмѣсто a, 0 вмѣсто b и $r-1$ вмѣсто m. Такимъ образомъ мы получимъ для суммы

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{\lfloor\underline{r}};$$

и тогда по опредѣленію это будетъ выраженіемъ для n-аго члена ряда чиселъ $(r+1)$-го порядка.

670. Мы уже показали, что теорема о биномѣ въ нѣкоторыхъ случаяхъ можетъ прилагаться къ нахожденію суммы рядовъ (см. ст. 526); дадимъ теперь другой примѣръ. Пусть требуется найти сумму ряда

$$P_1Q_1+P_2Q_2+P_3Q_3+\ldots+P_{n-1}Q_{n-1},$$

гдѣ $$Q_r=r(r+1)(r+2)\ldots(r+q-1),$$

и $$P_r=(n-r)(n-r+1)(n-r+2)\ldots(n-r+p-1).$$

Легко видѣть, что

$Q_r=\lfloor\underline{q}\times$ коэффиціентъ при x^{r-1} въ ряду для $(1-x)^{-(q+1)}$.

и $P_r=\lfloor\underline{p}\times$ коэффиціентъ при x^{n-r-1} въ ряду для $(1-x)^{-(p+1)}$.

Слѣдовательно, беря члены не выше x^{n-2}, мы будемъ имѣть

$$(1-x)^{-(q+1)}=\frac{1}{\lfloor\underline{q}}\left\{Q_1+Q_2x+Q_3x^2+Q_4x^3+\ldots\right\},$$

$$(1-x)^{-(p+1)}=\frac{1}{\lfloor\underline{p}}\left\{P_{n-1}+P_{n-2}x+P_{n-3}x^2+P_{n-4}x^3+\ldots\right\}.$$

Поэтому рядъ, сумму котораго намъ нужно найти, равенъ произведенію $\lfloor\underline{p}\,\lfloor\underline{q}$ на коэффиціентъ при x^{n-2} въ разложеніи произведенія $(1-x)^{-(q+1)}$ на $(1-x)^{-(p+1)}$; то-есть этотъ рядъ равенъ произведенію $\lfloor\underline{p}\,\lfloor\underline{q}$ на коэффиціентъ при x^{n-2} въ разложеніи двучлена $(1-x)^{-(p+q+2)}$. Слѣдовательно рядъ будетъ равенъ

$$\frac{\lfloor\underline{p}\,\lfloor\underline{q}}{\lfloor\underline{p+q+1}}\times\frac{\lfloor\underline{n-1+p+q}}{\lfloor\underline{n-2}}.$$

671. По способу ст. 660 мы можемъ разсмотрѣть выраженіе для суммы $1^r+2^r+3^r+\ldots+n^r$, гдѣ r какое нибудь цѣлое положительное число. Означимъ эту сумму чрезъ S; тогда, какъ въ ст. 460 и 461, можно показать, что S можетъ быть представлено въ видѣ ряда, расположеннаго по нисходящимъ степенямъ n, начиная съ n^{r+1}, и все, что намъ нужно будетъ сдѣлать, такъ это опредѣлить надлежащимъ образомъ коэффиціенты при разныхъ степеняхъ n. Допустимъ, что $S=$

$$Cn^{r+1}+A_0n^r+\frac{r}{2}A_1n^{r-1}+\frac{r(r-1)}{2.3}A_2n^{r-2}+\frac{r(r-1)(r-2)}{2.3.4}A_3n^{r-3}+\ldots$$

Удобно представлять коэффиціенты такимъ образомъ, какъ это показано здѣсь. Поэтому вмѣсто одной буквы мы взяли коэффиціентомъ при n^{r-1} символъ $\frac{r}{2}A_1$, и такъ далѣе.

Перейдемъ теперь къ опредѣленію значеній A_0, A_1, A_2, ...; мы найдемъ, что эти величины независимы отъ r такъ-же, какъ и отъ n.

Въ допущенномъ тожествѣ перемѣнимъ n на $n+1$; тогда

$$S+(n+1)^r = C(n+1)^{r+1} + A_0(n+1)^r + \frac{r}{2}A_1(n+1)^{r-1} + \frac{r(r-1)}{2.3}A_2(n+1)^{r-2} + \ldots$$

Слѣдовательно вычитаніемъ находимъ

$$(n+1)^r = C\{(n+1)^{r+1} - n^{r+1}\} + A_0\{(n+1)^r - n^r\} + \frac{r}{2}A_1\{(n+1)^{r-1} - n^{r-1}\} + \frac{r(r-1)}{2.3}A_2\{(n+1)^{r-2} - n^{r-2}\} + \ldots$$

Разложимъ всѣ выраженія $(n+1)^{r+1}$, $(n+1)^r$, $(n+1)^{r-1}$, ... въ рядъ по теоремѣ Ньютона и затѣмъ уравняемъ коэффиціенты при разныхъ степеняхъ n. Такимъ образомъ, уравнивая коэффиціенты при n^r, будемъ имѣть $1 = C(r+1)$; затѣмъ, уравнивая коэффиціенты при n^{r-1}, будемъ имѣть $r = \frac{C(r+1)r}{2} + A_0 r$; итакъ $C = \frac{1}{r+1}$, $A_0 = \frac{1}{2}$.

Уравняемъ коэффиціенты при n^{r-p}, поставивъ вмѣсто C и A_0 ихъ значенія; тогда вообще получимъ

$$\frac{1}{\underline{|p}} = \frac{1}{\underline{|p+1}} + \frac{1}{2\,\underline{|p}} + \frac{A_1}{\underline{|2}\,\underline{|p-1}} + \frac{A_2}{\underline{|3}\,\underline{|p-2}} + \frac{A_3}{\underline{|4}\,\underline{|p-3}} + \frac{A_4}{\underline{|5}\,\underline{|p-4}} + \ldots,$$

гдѣ рядъ въ правой части простирается до члена, содержащаго A_{p-1} включительно; и полагая p послѣдовательно равнымъ 2, 3, 4, ..., мы опредѣлимъ послѣдовательно A_1, A_2, A_3, ...; и мы видимъ теперь, что величины эти не зависятъ ни отъ n, ни отъ r.

Мы получимъ $A_1 = \frac{1}{6}$, $A_2 = 0$, $A_3 = -\frac{1}{30}$, $A_4 = 0$, $A_5 = \frac{1}{42}$, ...

Замѣчательно, что всѣ коэффиціенты съ *четными* указателями A_2, A_4, A_6, ... будутъ нулями; это можно доказать слѣдующимъ образомъ:

Въ первоначально допущенномъ тожествѣ перемѣнимъ n на $n-1$ и вычтемъ; тогда будетъ

$$n^r = C\{n^{r+1} - (n-1)^{r+1}\} + A_0\{n^r - (n-1)^r\} + \frac{r}{2}A_1\{n^{r-1} - (n-1)^{r-1}\}$$

$$+\frac{r(r-1)}{2.3}A_2\{n^{r-2}-(n-1)^{r-2}\}+\ldots.$$

Уравняемъ коэффиціенты при n^{r-p}, поставивъ вмѣсто C и A_0 ихъ значенія; тогда получимъ

$$0=\frac{1}{\lfloor\underline{p+1}}-\frac{1}{2\lfloor\underline{p}}+\frac{A_1}{\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{p-1}}-\frac{A_2}{\lfloor\underline{3}\,\lfloor\underline{p-2}}+\frac{A_3}{\lfloor\underline{4}\,\lfloor\underline{p-3}}-\frac{A_4}{\lfloor\underline{5}\,\lfloor\underline{p-4}}+\ldots$$

Но полученный раньше выводъ можетъ быть выраженъ такъ

$$0=\frac{1}{\lfloor\underline{p+1}}-\frac{1}{2\lfloor\underline{p}}+\frac{A_1}{\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{p-1}}+\frac{A_2}{\lfloor\underline{3}\,\lfloor\underline{p-2}}+\frac{A_3}{\lfloor\underline{4}\,\lfloor\underline{p-3}}+\frac{A_4}{\lfloor\underline{5}\,\lfloor\underline{p-4}}+\ldots$$

Слѣдовательно, вычитая и ставя послѣдовательно вмѣсто p числа 3, 5, 7, ... мы увидимъ, что A_2, A_4, A_6, ... будутъ послѣдовательно равняться нулю.

Примѣры суммованія рядовъ.

1. Показать, что сумма первыхъ n членовъ ряда, въ которомъ n-й членъ равняется $n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)$, получится, если дополнимъ это выраженіе еще однимъ множителемъ на концѣ и раздѣлимъ на число всѣхъ множителей, считая и новый.

2. Дать формулу для суммованія ряда, въ которомъ n-ый членъ представляетъ выраженіе *обратное* съ

$$n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1).$$

Найти сумму n членовъ, а также и безконечнаго числа членовъ слѣдующихъ пяти рядовъ:

3. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots$

4. $\frac{1}{2.4.6}+\frac{1}{4.6.8}+\frac{1}{6.8.10}+\frac{1}{8.10.12}+\ldots$

5. $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.6}+\frac{1}{4.7}+\ldots$

6. $\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{2.4.6}+\frac{1}{3.5.7}+\frac{1}{4.6.8}+\ldots$

7. $\frac{4}{2.3.4}+\frac{7}{3.4.5}+\frac{10}{4.5.6}+\frac{13}{5.6.7}+\ldots$

8. Найти сумму n членовъ ряда $1+3+6+10+\ldots$

9. Если n четное, то показать, что

$$n+2(n-1)+3(n-2)+\ldots+\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{n(n+1)(n+2)}{12}.$$

10. Найти сумму n членовъ ряда $a^2+(a+1)^2+(a+2)^2+\ldots$

11. Найти сумму n членовъ ряда $1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\ldots$

12. Если члены разложенія $(a+b)^n$ помножатся соотвѣтственно на nr, $(n-1)r^2$, $(n-2)r^3$, ... гдѣ n положительное цѣлое число, то найти сумму происшедшаго въ такомъ случаѣ ряда.

13. Разложить $\dfrac{x}{(1-x)^2-cx}$ въ рядъ по восходящимъ степенямъ x и показать, что коэффиціентъ при x^n будетъ

$$n\left\{1+\frac{n^2-1}{\underline{|3}}c+\frac{(n^2-1)(n^2-4)}{\underline{|5}}c^2+\frac{(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{\underline{|7}}c^3+\ldots\right\}.$$

14. Найти коэффиціентъ при x^my^n въ разложеніи выраженія

$$\frac{x(1-ax)}{(1-x)(1-ax-by)}.$$

15. Показать, что $1+\dfrac{2n}{3}+\dfrac{2n(2n+2)}{3.6}+\dfrac{2n(2n+2)(2n+4)}{3.6.9}+\ldots$

$$=2^n\left\{1+\frac{n}{3}+\frac{n(n+1)}{3.6}+\frac{n(n+1)(n+2)}{3.6.9}+\ldots.\right\}.$$

16. Если p_r означаетъ коэффиціентъ при x^r въ разложеніи $(1+x)^n$, гдѣ n положительное цѣлое число, то показать, что

$$\frac{p_1}{p_0}+\frac{2p_2}{p_1}+\frac{3p_3}{p_2}+\ldots+\frac{np_n}{p_{n-1}}=\frac{n(n+1)}{1.2};$$

$$(p_0+p_1)(p_1+p_2)\ldots(p_{n-1}+p_n)=\frac{p_1p_2\ldots.p_n(n+1)^n}{\underline{|n}}.$$

$$p_1-\frac{p_2}{2}+\frac{p_3}{3}-\ldots.+\frac{(-1)^{n-1}p_n}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{n}.$$

17. Показать посредствомъ разложенія тожества $\left(\dfrac{1}{1-x}-1\right)^n=\dfrac{x^n}{(1-x)^n}$, что

$$\frac{n(n+1)\ldots.(n+p-1)}{\underline{|p}}-\frac{n}{1}\frac{(n-1)\ldots(n+p-2)}{\underline{|p}}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(n-2)\ldots(n+p-3)}{\underline{|p}}-\ldots$$

равняется нулю, когда n и p цѣлыя положительныя числа, и n больше p.

18. Если пушечныя ядра сложены въ кучу съ треугольнымъ основаніемъ, въ каждой сторонѣ по 9 ядеръ, то найти все число ядеръ.

19. Найти число ядеръ, содержащихся въ пяти рядахъ недоконченной треугольной кучи, если число ядеръ въ каждой сторонѣ основанія равно 15.

20. Число шаровъ, содержащихся въ усѣченной кучѣ, которой верхъ и низъ прямоугольники, будетъ равняться

$$\tfrac{1}{6}p\{2p^2+3(m+n-1)p+6mn-3m-3n+1\},$$

гдѣ m и n представляютъ числа шаровъ въ обѣихъ сторонахъ верхушки, а p число шаровъ въ каждомъ изъ боковыхъ реберъ.

21. Показать, что $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4$

$$=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}=\frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

22. Показать, что $(1+xv)(1+x^2v)(1+x^3v)\ldots(1+x^pv)$

$$=1+\frac{1-x^p}{1-x}xv+\frac{(1-x^p)(1-x^{p-1})}{(1-x)(1-x^2)}x^3v^2$$
$$+\frac{(1-x^p)(1-x^{p-1})(1-x^{p-2})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}x^6v^3+\ldots$$

23. Въ разложеніи $(1+x)(1+cx)(1+c^2x)(1+c^3x)\ldots$, если число множителей безконечно, а c меньше единицы, то коэффиціентъ при x^r будетъ

$$\frac{c^{\frac{1}{2}r(r-1)}}{(1-c)(1-c^2)(1-c^3)\ldots(1-c^r)}.$$

24. Если A_r будетъ коэффиціентъ при x^r въ разложеніи выраженія $(1+x)^2\left(1+\frac{x}{2}\right)^2\left(1+\frac{x}{2^2}\right)^2\left(1+\frac{x}{2^3}\right)^2\ldots.$ *до безконечности*, то доказать, что $A_r=\frac{2^2}{2^r-1}(A_{r-1}+A_{r-2})$ и что $A_4=\frac{1072}{315}$.

25. Если n будетъ кратное 3, то показать, что

$$1-(n-1)+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{\underline{|3}}+\ldots.=(-1)^n.$$

ГЛАВА LI.

Неравенства.

672. Часто бываетъ полезно знать, которое изъ двухъ данныхъ выраженій больше; предложенія, относящіяся къ такимъ вопросамъ, обыкновенно собираются въ отдѣлѣ *Неравенствъ*.

Мы говоримъ, что a *больше* b, когда $a-b$ будетъ *положительною* величиною. См. ст. 95.

673. *Неравенство останется справедливымъ, когда одна и таже величина будетъ приложена къ обѣимъ его частямъ или будетъ вычтена изъ нихъ.*

Дѣйствительно, положимъ, что $a>b$, слѣдовательно $a-b$ положительная величина, а потому $a\pm c-(b\pm c)$ также положительная величина, а слѣдовательно $a\pm c>b\pm c$.

Отсюда мы заключаемъ, что всякій членъ можетъ быть перенесенъ изъ одной какой нибудь части неравенства въ другую *съ обратнымъ знакомъ*.

674. *Если знаки всѣхъ членовъ неравенства будутъ перемѣнены на обратные, то знакъ неравенства долженъ быть обращенъ.*

Дѣйствительно, измѣнить всѣ знаки равнозначительно перенесенію каждаго члена изъ первой части неравенства во вторую и каждаго члена изъ второй части въ первую.

675. *Неравенство сохранится, когда обѣ части его будутъ помножены или раздѣлены на одну и ту-же положительную величину.*

Дѣйствительно, положимъ, что $a>b$, слѣдовательно $a-b$ величина положительная; поэтому, если m величина положительная, то и $m(a-b)$ будетъ величиною положительной, а слѣдовательно $ma>mb$; подобнымъ-же образомъ $\frac{1}{m}(a-b)$ величина положительная, а потому

$$\frac{a}{m}>\frac{b}{m}.$$

Точно также мы можемъ показать, что если каждый членъ какого нибудь неравенства будетъ помноженъ или раздѣленъ на одну и ту-же *отрицательную* величину, то знакъ неравенства долженъ быть обращенъ.

676. Если $a>b$, $a'>b'$, $a''>b''$, ..., то

$$a+a'+a''+\ldots>b+b'+b''+\ldots$$

Дѣйствительно, по предположенію, $a-b$, $a'-b'$, $a''-b''$, ... всѣ будутъ величинами положительными; поэтому и сумма ихъ $a-b+a'-b'+a''-b''+\ldots$ будетъ положительною, а слѣдовательно

$$a+a'+a''+\ldots>b+b'+b''+\ldots$$

677. Если $a>b$, $a'>b'$, $a''>b''$, ... и всѣ эти величины будутъ положительными, то очевидно, что $aa'a''\ldots>bb'b''\ldots$

678. Если $a>b$ и a и b будутъ положительными, то $a^n>b^n$, гдѣ n какая нибудь *положительная* величина.

Это слѣдуетъ изъ предыдущей статьи, если n *цѣлое* число. Если-же n будетъ числомъ дробнымъ, то положимъ, что оно $=\frac{p}{q}$; пусть $a^p=h$ и $b^p=k$; тогда $h>k$ и намъ нужно доказать, что $h^{\frac{1}{q}}>k^{\frac{1}{q}}$, что можно доказать непосредственно. Дѣйствительно, если $h^{\frac{1}{q}}=k^{\frac{1}{q}}$, то $h=k$; и если $h^{\frac{1}{q}}<k^{\frac{1}{q}}$, то $h<k$; два изъ этихъ выводовъ ложны, поэтому мы должны имѣть $h^{\frac{1}{q}}>k^{\frac{1}{q}}$.

Если n будетъ *отрицательная* величина, то пусть $n=-m$, такъ что m величина положительная; тогда $\frac{1}{a^m}<\frac{1}{b^m}$; т.-е. $a^n<b^n$.

679. Пусть $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{a_3}{b_3}$, ... $\frac{a_n}{b_n}$ будутъ дроби, знаменатели которыхъ всѣ имѣютъ одинаковые знаки, тогда дробь

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}$$

по величинѣ своей заключается между наименьшею и наибольшею изъ дробей

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ \ldots\ \frac{a_n}{b_n}.$$

Дѣйствительно, предположимъ, что $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{a_3}{b_3}$, ... $\frac{a_n}{b_n}$ расположены въ *возрастающемъ* порядкѣ ихъ величины и положимъ, что всѣ знаменатели будутъ *положительными*; тогда

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_1}{b_1},\ \text{слѣдовательно}\ a_1=b_1\times\frac{a_1}{b_1};$$

$$\frac{a_2}{b_2}>\frac{a_1}{b_1},\ \text{слѣдовательно}\ a_2>b_2\times\frac{a_1}{b_1};$$

$$\frac{a_3}{b_3}>\frac{a_1}{b_1},\ \text{слѣдовательно}\ a_3>b_3\times\frac{a_1}{b_1};$$

и такъ далѣе;

такимъ образомъ, складывая, находимъ

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n>(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n)\frac{a_1}{b_1}.$$

слѣдовательно $$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}>\frac{a_1}{b_1}.$$

Подобнымъ образомъ мы можемъ доказать, что

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}<\frac{a_n}{b_n}.$$

Точно такъ-же можно доказать эту теорему и въ случаѣ, когда всѣ знаменатели предполагаются *отрицательными*.

Если $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots$ тогда каждая изъ этихъ дробей *равна* такой дроби, числитель которой есть сумма числителей, а знаменатель сумма знаменателей этихъ дробей.

680. Такъ какъ $(x-y)^2$ или $x^2-2xy+y^2$ есть величина положительная или нуль, смотря по тому, будутъ-ли x и y неравны или равны, то мы имѣемъ

$$\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)>xy;$$

неравенство это становится равенствомъ, когда $x=y$. Слѣдовательно

$$\tfrac{1}{2}(a+b)>\surd(ab);$$

т.-е. средняя ариѳметическая двухъ величинъ больше ихъ средней геометрической, причемъ это неравенстно обращается въ равенство, когда обѣ величины становятся равными.

681. Пусть мы имѣемъ n положительныхъ величинъ a, b, c, ... k; тогда

$$\left(\frac{a+b+c+\ldots+k}{n}\right)^n>abc\ldots k,$$

если только всѣ n величинъ не будутъ равны, и тогда неравенство обращается въ равенство.

Дѣйствительно, $ab<\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, $cd<\left(\frac{c+d}{2}\right)^2$;

слѣдовательно $$abcd<\left(\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}\right)^2;$$

и $$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}<\left\{\frac{\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(c+d)}{2}\right\}^2;$$

слѣдовательно $$abcd<\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4.$$

Продолжая такимъ образомъ, мы можемъ доказать, что если p будетъ какая нибудь цѣлая положительная степень 2, то

$$abcd\ldots..(p\text{ множителей})<\left(\frac{a+b+c+d+\ldots}{p}\right)^p.$$

Пусть теперь $p=n+r$ и пусть $\frac{a+b+c+d+\ldots.(n\text{ членовъ})}{n}=t;$

положимъ еще, что каждое изъ остальныхъ r количествъ изъ p равно t; тогда мы будемъ имѣть

$$abcd....(n \text{ множителей}) \times t^r < \left(\frac{nt+rt}{n+r}\right)^{n+r}, \text{ т.-е. } < t^{n+r};$$

слѣдовательно

$$abcd....(n \text{ множителей}) < t^n, \text{ т.-е. } < \left(\frac{a+b+c+d+\ldots}{n}\right)^n.$$

Такимъ образомъ теорема доказана для всякаго числа величинъ a, b, c, d, ... Неравенство переходитъ въ равенство, когда всѣ n величинъ становятся равными.

Мы можемъ также писать эту теорему слѣдующимъ образомъ

$$\frac{a+b+c+d+\ldots}{n} > (abcd\ldots)^{\frac{1}{n}};$$

распространяя понятіе *о среднемъ ариѳметическомъ* и *среднемъ геометрическомъ*, мы можемъ выразить эту теорему такимъ образомъ: *среднее ариѳметическое какого нибудь числа положительныхъ величинъ больше средняго ихъ геометрическаго.*

682. Слѣдующее доказательство теоремы, данной въ предыдущей статьѣ, можетъ послужить полезнымъ упражненіемъ.

Означимъ $(abcd....k)^{\frac{1}{n}}$ буквою P и $\frac{a+b+c+d+\ldots+k}{n}$ буквой Q.

Предположимъ, что a и b будутъ соотвѣтственно наибольшее и наименьшее изъ количествъ a, b, c, d, ... k; пусть $a_1=b_1=\frac{1}{2}(a+b)$ и пусть $P_1=(a_1b_1cd\ldots k)^{\frac{1}{n}}$; тогда, такъ какъ $a_1b_1>ab$, мы будемъ имѣть $P_1>P$. Затѣмъ, если множители въ P_1 не будутъ всѣ равны между собою, то отбросимъ наибольшій и наименьшій изъ нихъ, а на ихъ мѣсто поставимъ два новыхъ множителя, изъ которыхъ каждый равенъ полусуммѣ отброшенныхъ; пусть P_2 означаетъ новое среднее геометрическое; тогда $P_2>P_1$. Если мы будемъ продолжать такимъ образомъ, то получимъ рядъ P, P_1, P_2, P_3, ... P_r, въ которомъ каждый членъ больше предшествующаго члена; и беря r достаточно большимъ, мы достигнемъ того, что множители, заключающіеся въ P_r, будутъ какъ угодно близки къ равенству; такимъ образомъ, когда r достаточно велико, мы можемъ принимать P_r равнымъ Q; слѣдовательно P меньше Q.

683. Сравнимъ теперь количества

$$\frac{a^m+b^m}{2} \text{ и } \left(\frac{a+b}{2}\right)^m.$$

Мы предполагаемъ здѣсь, что a и b величины положительныя и что a не меньше b.

$$a^m+b^m=\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)^m+\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)^m$$

$$=2\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^m+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{m+2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{\underline{|4}}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{m-4}\left(\frac{a-b}{2}\right)^4+\ldots\right\}.$$

Такъ какъ $\frac{a-b}{2}$ меньше $\frac{a+b}{2}$, то рядъ этотъ *сходящійся* (ст. 564), такъ что мы получаемъ ариѳметически понятный и вѣрный выводъ. Слѣдовательно, если m будетъ *отрицательное* или какое нибудь *положительное* цѣлое число, то мы будемъ имѣть $\frac{a^m+b^m}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^m$. Если-же m будетъ *положительное* и *меньше единицы*, то $\frac{a^m+b^m}{2}<\left(\frac{a+b}{2}\right)^m$. Остается разсмотрѣть случай, когда m *положительное и больше единицы, но не цѣлое*. Положимъ, что $m=\frac{p}{q}$, гдѣ $p>q$, и пусть $\alpha=a^{\frac{1}{q}}$, $\beta=b^{\frac{1}{q}}$, $A=\alpha^p$, $B=\beta^p$. Тогда $\frac{a^{\frac{p}{q}}+b^{\frac{p}{q}}}{2}$ будетъ больше или меньше $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\frac{p}{q}}$, смотря по тому, будетъ-ли $\frac{\alpha^p+\beta^p}{2}>$ или $<\frac{\alpha^q+\beta^q}{2}$, то-есть смотря по тому, будетъ-ли $\left(\frac{A+B}{2}\right)^{\frac{q}{p}}>$ или $<\frac{A^{\frac{q}{p}}+B^{\frac{q}{p}}}{2}$. По доказанному раньше, мы знаемъ, что выраженіе въ лѣвой части будетъ больше, такъ какъ $\frac{q}{p}$ положительная величина, бо́льшая единицы; слѣдовательно $\frac{a^m+b^m}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^m$, когда m положительное и больше единицы.

684. Пусть будетъ n положительныхъ величинъ a, b, c, ... k; тогда

$$\frac{a^m+b^m+c^m+\ldots.+k^m}{n}>\left(\frac{a+b+c+\ldots.+k}{n}\right)^m,$$

гдѣ m отрицательная величина или положительная меньше единицы; когда-же m, оставаясь положительнымъ, будетъ меньше единицы, то знакъ неравенства оборачивается. Неравенство становится равенствомъ, когда всѣ n количествъ равны между собою.

Это можно доказать пріемомъ, подобнымъ тому, который употребленъ

въ ст. 681. Предположимъ, что m отрицательное, или положительное и больше единицы. Тогда $a^m+b^m>2\left(\frac{a+b}{2}\right)^m$, $c^m+d^m>2\left(\frac{c+d}{2}\right)^m$;

слѣдовательно $a^m+b^m+c^m+d^m>2\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^m+\left(\frac{c+d}{2}\right)^m\right\}$

$$>2.2\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right);$$

слѣдовательно $\frac{a^m+b^m+c^m+d^m}{4}>\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^m$.

Продолжая идти такимъ образомъ дальше, мы можемъ доказать теорему въ случаѣ, когда число количествъ будетъ p, если p нѣкоторая положительная и цѣлая степень 2. Положимъ теперь $p=n+r$ и пусть остальныя r изъ p величинъ будутъ всѣ равны между собою и каждое равно t, гдѣ

$$t=\frac{a+b+c+\ldots(n \text{ членовъ})}{n};$$

слѣдовательно $\frac{a^m+b^m+c^m+\ldots.}{n+r}>\left(\frac{a+b+c+\ldots.}{n+r}\right)^m$,

слѣдовательно $a^m+b^m+c^m+\ldots+rt^m>(n+r)\left(\frac{nt+rt}{n+r}\right)^m$, то-есть

$$>(n+r)t^m;$$

а потому $a^m+b^m+c^m+\ldots.>nt^m$, что и требовалось доказать.

Подобнымъ-же образомъ мы можемъ доказать остальную часть теоремы, именно, что когда m будетъ положительное и меньше единицы, то знакъ неравенства оборачивается.

Теорема этой статьи можетъ быть доказана также способомъ, подобнымъ употребленному въ ст. 682.

685. Если x и β положительныя величины и x и βx меньше единицы, то $(1+x)\beta$ меньше $\frac{1}{1-\beta x}$.

Въ сущности намъ нужно показать, что $(1+x)^{-\beta}$ больше $1-\beta x$. Но по теоремѣ Ньютона

$$(1+x)^{-\beta}=1-\beta x+\frac{\beta(\beta+1)}{\lfloor 2}x^2-\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\lfloor 3}x^3+\ldots\ldots;$$

каждый членъ этого ряда больше слѣдующаго за нимъ, потому что $\frac{\beta+n}{n+1}x$ меньше единицы, такъ какъ x и βx каждое меньше единицы. Слѣдовательно, какъ и въ ст. 558, рядъ этотъ больше $1-\beta x$.

686. Пусть γ будетъ положительная величина, большая чѣмъ β; тогда $1+\gamma x$ больше $\frac{1}{1-\beta x}$, если только $(1+\gamma x)(1-\beta x)$ больше 1, т.-е. если $(\gamma-\beta)x$ больше чѣмъ $\beta\gamma x^2$, т. е. если $\gamma-\beta$ больше чѣмъ $\beta\gamma x$. Отсюда мы приходимъ къ слѣдующему заключенію: если x, β и γ будутъ положительныя величины, и γ больше β, то, беря x достаточно малымъ, мы можемъ сдѣлать $(1+x)\beta$ меньше, чѣмъ $1+\gamma x$; это остается справедливымъ, какъ-бы не былъ малъ избытокъ γ надъ β.

687. Если x будетъ положительная величина, то $\log(1+x)$ будетъ меньше x.

Дѣйствительно, положимъ, что $y=\log(1+x)$; тогда $1+x=e^y$, а по ст. 542, $e^y=1+y+\frac{y^2}{|\underline{2}}+\frac{y^3}{|\underline{3}}+\ldots$, что больше, чѣмъ $y+1$.

Для примѣра поставимъ вмѣсто x послѣдовательный рядъ значеній $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots \frac{1}{n}$; мы получимъ $\log\frac{3}{2}<\frac{1}{2}$, $\log\frac{4}{3}<\frac{1}{3}$, $\ldots\ldots \log\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$. Отсюда, складывая, найдемъ $\log\frac{n+1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$.

688. Если x положительная величина и меньше единицы, то $\log(1+x)$ больше $x-\frac{x^2}{n}$.

Дѣйствительно, $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$, слѣдовательно, какъ въ ст. 558, мы видимъ, что $\log(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$ есть нѣкоторая конечная положительная величина.

689. Если x положительная величина и меньше единицы, то $\log\frac{1}{1-x}$ больше x.

Дѣйствительно, $\log\frac{1}{1-x}=-\log(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots$; слѣдовательно $\log\frac{1}{1-x}$ есть конечная положительная величина.

690. Слѣдующіе три примѣра пояснятъ вопросъ о неравенствахъ и доставятъ нѣкоторые любопытные выводы.

I. Если $u_n=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}$ и $v_n=\frac{3.5.7\ldots.(2n+1)}{2.4.6\ldots2n}$, то когда n становится безконечно большимъ, u_n обращается въ нуль, v_n обращается въ безконечность, а u_nv_n становится конечною величиною.

Мы имѣемъ $$u_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \quad (1),$$

а потому, по ст. 376 $$u_n < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1} \quad (2).$$

Слѣдовательно по перемноженіи

$$u_n^2 < \frac{1}{2n+1}.$$

Итакъ, увеличивая n, мы можемъ сдѣлать u_n меньше всякой данной величины.

Подобно этому $$v_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{2n+1}{2n} \quad (3),$$

а потому, по ст. 376 $$v_n > \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdots \frac{2n+2}{2n+1} \quad (4).$$

Слѣдовательно, по перемноженіи, $v_n^2 > \frac{2n+2}{2}$, то-есть $> n+1$.

Итакъ, увеличивая n, мы можемъ сдѣлать v_n больше всякой данной величины.

Наконецъ изъ (1) и (4) мы видимъ, что

$u_n v_n > \frac{1}{2} \frac{2n+2}{2n+1}$, то-есть $> \frac{n+1}{2n+1}$, а слѣдовательно *и подавно* $> \frac{1}{2}$;

а изъ (2) и (3) видимъ, что $u_n v_n < 1$.

Такимъ образомъ $u_n v_n$ заключается между $\frac{1}{2}$ и 1, а слѣдовательно есть конечная величина.

II. Если m, n, a расположены въ нисходящемъ порядкѣ своей величины, то

$$\left(\frac{m+a}{m-a}\right)^m < \left(\frac{n+a}{n-a}\right)^n.$$

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ логариѳмы отъ обѣихъ частей; тогда намъ нужно будетъ сравнить между собою

$$m\log\frac{1+\frac{a}{m}}{1-\frac{a}{m}} \quad \text{и} \quad n\log\frac{1+\frac{a}{n}}{1-\frac{a}{n}};$$

или $$2a\left\{1+\frac{1}{3}\frac{a^2}{m^2}+\frac{1}{5}\frac{a^4}{m^4}+\ldots\right\} \quad \text{и} \quad 2a\left\{1+\frac{1}{3}\frac{a^2}{n^2}+\frac{1}{5}\frac{a^4}{n^4}+\ldots\right\};$$

но первое изъ послѣднихъ выраженій меньше второго. Отсюда заключаемъ о справедливости предложенія.

III. Пусть будетъ n положительныхъ величинъ a, b, c, ... k; тогда

$$\left(\frac{a+b+c+\ldots+k}{n}\right)^{a+b+c+\cdots+k} < a^a b^b c^c \ldots k^k,$$

если только эти n величинъ не будутъ равны, когда неравенство обращается въ равенство.

Пусть будутъ двѣ неравныя величины a и b; докажемъ, что $a^a b^b > \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}$.

Положимъ, что a больше b; пусть $a=c+x$, $b=c-x$. Намъ нужно будетъ теперь доказать, что $\left(1+\frac{x}{c}\right)^{c+x}\left(1-\frac{x}{c}\right)^{c-x} > 1$, то-есть, что

$$\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)\left(\frac{1+\frac{x}{c}}{1-\frac{x}{c}}\right)^x > 1, \text{ или что } (1-z^2)\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^z > 1, \text{ гдѣ } z=\frac{x}{c}.$$

Но логариѳмъ выраженія $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^z(1-z^2)$ равняется

$$2z\left\{z+\tfrac{1}{3}z^3+\tfrac{1}{5}z^5+\ldots.\right\}-\left\{z^2+\tfrac{1}{2}z^4+\tfrac{1}{3}z^6+\ldots.\right\},$$

а это есть положительная величина, и такъ какъ логариѳмъ величина положительная, то выраженіе это больше единицы.

Теперь это доказательство можетъ быть распространено на случай трехъ или болѣе величинъ по способу подобному тому, который былъ употребленъ въ ст. 682.

Задачи слѣдующихъ трехъ статей имѣютъ аналогіи съ предметомъ настоящей главы.

691. Разложить данное число $2a$ на двѣ части, чтобы ихъ произведеніе было наибольшимъ изъ возможныхъ.

Пусть x означаетъ одну изъ частей и $2a-x$ другую часть, и пусть y означаетъ ихъ произведеніе; тогда намъ нужно будетъ опредѣлить x и y такимъ образомъ, чтобы y имѣло наибольшую изъ возможныхъ величинъ. Такъ какъ $y=x(2a-x)$, то мы имѣемъ $x^2-2ax+y=0$; слѣдовательно $x=a\pm\sqrt{(a^2-y)}$. Но x должно быть дѣйствительною величиною, поэтому y не можетъ превышать a^2, а когда $y=a^2$, $x=a$.

692. Разложить данное число $2a$ на такія двѣ части, чтобы сумма ихъ квадратныхъ корней имѣла наибольшее изъ возможныхъ значеній.

Такъ какъ $\sqrt{x}+\sqrt{(2a-x)}=y$, то $2a-x=(y-\sqrt{x})^2$ $=y^2-2y\sqrt{x}+x$, и $2x-2y\sqrt{x}+y^2-2a=0$; слѣдовательно

$$\sqrt{x}=\tfrac{1}{2}y\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(4a-x^2)}.$$

693. Найти наименьшее значеніе, какое можетъ имѣть дробь $\frac{x^2+a^2}{x}$, при какомъ-бы то ни было значеніи x.

Положимъ $\frac{x^2+a^2}{x}=y$; тогда $x^2-xy+a^2=0$; такимъ образомъ $x=\frac{y}{2}\pm\frac{\sqrt{(y^2-4a^2)}}{2}$.

Слѣдовательно y^2 не можетъ быть меньше $4a^2$, поэтому наименьшее значеніе y будетъ $2a$.

Или такъ: $\frac{x^2+a^2}{x}=x+\frac{a^2}{x}$; положимъ, что x положительная величина, тогда мы можемъ представить это выраженіе въ видѣ $\left(\sqrt{x}-\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2+2a$; и такъ какъ $2a$ есть величина постоянная, то наименьшее значеніе этого выраженія получается, когда уничтожится положительный членъ $\left(\sqrt{x}-\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2$, то-есть когда $x=a$. Отрицательныхъ значеній x разсматривать нѣтъ надобности, потому что $\frac{x^2+a^2}{x}$ имѣетъ одно и то-же численное значеніе при всякой *отрицательной* величинѣ x, какъ и при соотвѣтствующей *положительной*.

Примѣры неравенствъ.

Въ слѣдующихъ примѣрахъ предполагается, что буквенные символы означаютъ положительныя величины; въ извѣстныхъ случаяхъ *неравенства* могутъ обращаться въ *равенства*, подобно тому какъ и въ нѣкоторыхъ изъ статей текста.

1. Если a, b, c будутъ таковы, что всякія два изъ нихъ больше третьяго, то $2(ab+bc+ca)>a^2+b^2+c^2$.

2. Если $l^2+m^2+n^2=1$, и $l'^2+m'^2+n'^2=1$, то
$$ll'+mm'+nn'<1.$$

3. $(a+b-c)^2+(a+c-b)^2+(b+c-a)^2>ab+bc+ca$

4. $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}>\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

5. $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)>6abc$ и $<2(a^3+b^3+c^3)$.

6. $(a+b)(b+c)(c+a)>8abc$.

7. Показать, что $x^2-8x+22$ никогда не можетъ быть меньше 6, каково-бы ни было значеніе x.

8. Что больше: $2x^3$, или $x+1$?

9. Если n будетъ >1, то $x+\frac{1}{nx}>1+\frac{1}{n}$, когда $x>1$, или $<\frac{1}{n}$.

10. Найти наименьшее значеніе $\frac{(a+x)(b+x)}{x}$.

11. Разложить данное нечетное цѣлое число на два другихъ цѣлыхъ числа, произведеніе которыхъ было-бы наибольшимъ изъ всѣхъ возможныхъ.

12. Если $a>b$, тогда $\sqrt{(a^2-b^2)}+\sqrt{(2ab-b^2)}>a$.

13. Если a, b, c, d составляютъ гармоническую прогрессію, то $a+d>b+c$.

14. Если a, b, c составляютъ гармоническую прогрессію и если n будетъ цѣлое положительное число, то

$$a^n+c^n>2b^n.$$

15. Если $a>b$, то показать, что $\frac{x+a}{\sqrt{(x^2+a^2)}}>$ или $<\frac{x+b}{\sqrt{(x^2+b^2)}}$, смотря по тому, будетъ-ли x больше или меньше $\sqrt{(ab)}$.

16. Если a, b, c, или b, c, a, или c, a, b расположены въ *нисходящемъ* порядкѣ ихъ величины, то $a^2b+b^2c+c^2a>a^2c+b^2a+c^2b$; если-же—въ *восходящемъ*, то $a^2b+b^2c+c^2a<a^2c+b^2a+c^2b$.

17. $(A^2+B^2+C^2+\ldots)(a^2+b^2+c^2+\ldots)>(Aa+Bb+Cc+\ldots)^2$.

18. $3(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

19. $9abc<(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$.

20. $\frac{n-1}{2}(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)>\sqrt{(a_1a_2)}+\sqrt{(a_1a_3)}+\sqrt{(a_2a_3)}+\ldots$

21. Разность между среднимъ ариѳметическимъ и среднимъ геометрическимъ двухъ величинъ меньше одной восьмой квадрата разности этихъ чиселъ, раздѣленнаго на меньшее изъ нихъ, но больше одной восьмой квадрата той-же разности раздѣленнаго на большее изъ чиселъ.

22. $\lfloor\underline{n}<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

23. $\lfloor\underline{n}>n^{\frac{n}{2}}$.

24. $1.3.5\ldots(2n-1)<n^n$.

25. $\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{3}{n}\right)\ldots\left(2-\frac{2n-1}{n}\right)>\frac{1}{\lfloor\underline{n}}$.

26. $a^4+b^4+c^4>abc(a+b+c)$.

27. $8(a^3+b^3+c^3)>3(a+b)(b+c)(c+a)$.

28. $\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{a+c}+\frac{2c}{a+b}>3.$

29. $(a+b+c)^3>27abc$ и $<9(a^3+b^3+c^3)$

30. Если p и q каждое будутъ меньше единицы, то

$$\frac{\log_a(1-p)}{\log_a(1-q)}<\frac{p}{q(1-p)} \text{ и } >\frac{p(1-q)}{q}.$$

31. $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\ldots+\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}>n.$

32. Если a и x оба заключаются между 0 и 1, то $\frac{1-a^x}{1-a}>x.$

ГЛАВА LII.

Теорія чиселъ.

694. Во всей этой главѣ слово *число* употребляется для краткости вмѣсто словъ *цѣлое положительное число.*

695. Число, не дѣлящееся безъ остатка ни на какое число кромѣ самого себя и единицы, называется *первымъ числомъ* или *первоначальнымъ.*

696. Два числа называются взаимно первыми, когда нѣтъ никакого числа за исключеніемъ единицы, на которое могло-бы дѣлиться безъ остатка каждое изъ нихъ. Вмѣсто выраженія—два числа взаимно первыя, можно говорить, что одно изъ нихъ первое въ отношеніи другого.

697. *Если произведеніе* ab *дѣлится на какое нибудь число* p, *первое съ однимъ изъ множителей* a, *то другой множитель* b *дѣлится на* p.

Положимъ, что a больше p; будемъ искать общаго наибольшаго дѣлителя между a и p; пусть q, q', q'' ... будутъ послѣдовательныя частныя, и r, r', r'' ... послѣдовательные остатки. Тогда $a=pq+r$, $p=rq'+r'$, $r=r'q''+r''$, ... Помножимъ обѣ части каждаго изъ этихъ равенствъ на b и раздѣлимъ на p; тогда получимъ $\frac{ab}{p}=bq+\frac{br}{p}$,

$$b=\frac{br}{p}\times q'+\frac{br'}{p},\ \frac{br}{p}=\frac{br'}{p}\times q''+\frac{br''}{p},\ \ldots$$

Такъ какъ $\frac{ab}{p}$ есть нѣкоторое цѣлое число, то по первому изъ

предыдущихъ уравненій заключаемъ, что $\frac{br}{p}$ есть цѣлое-же число; тогда изъ второго уравненія слѣдуетъ, что $\frac{br'}{p}$ будетъ цѣлое число, а изъ третьяго—что $\frac{br''}{p}$ будетъ цѣлое число, и такъ далѣе. Но если a и p первыя между собою, то послѣдній изъ остатковъ r, r', r'', ... есть единица; такимъ образомъ $\frac{b \times 1}{p}$ будетъ цѣлымъ числомъ, то-есть b дѣлится на p.

698. *Если числитель и знаменатель дроби первые между собою, то такая дробь не можетъ быть выражена другою простѣйшею, но равною ей дробью.*

Положимъ, что a и b первыя между собою и пусть, если возможно, $\frac{a}{b}$ равняется другой, простѣйшей дроби $\frac{a'}{b'}$. Такъ какъ $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$, то мы будемъ имѣть $a'=\frac{ab'}{b}$; слѣдовательно ab' дѣлится на b; но b и a первыя между собою, поэтому b' дѣлится на b (по ст. 697), а это невозможно, такъ какъ, по предположенію, b' меньше b. Поэтому дробь $\frac{a}{b}$ не можетъ быть выражена болѣе простою, но равной ей дробью.

699. *Если числа* a *и* b *первыя между собою и* $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$, *то* a′ *и* b′ *должны быть соотвѣтственно равнократными съ* a *и* b.

Такъ какъ $\frac{a'}{b'}=\frac{a}{b}$, то мы имѣемъ $a'=\frac{ab'}{b}$; но b и a первыя между собою, а потому b' дѣлится на b; слѣдовательно $b'=nb$, гдѣ n какое нибудь цѣлое число, а потому $a'=na$.

700. *Если произведеніе* abcd... *дѣлится на какое нибудь первое число* p, *то одинъ изъ множителей этого произведенія дѣлится на то-же число.*

Дѣйствительно, такъ какъ p есть первое число, то если a не дѣлится на p, то оно первое съ нимъ, поэтому bcd должно дѣлиться на на p (ст. 697). Точно также, если b не дѣлится на p, то оно первое съ нимъ, а потому cd должно дѣлиться на p... Продолжая разсуждать такимъ образомъ, мы докажемъ, что одинъ изъ множителей произведенія долженъ дѣлиться на p.

701. *Если* a^n, *гдѣ* n *какое нибудь положительное цѣлое число, дѣлится на какое нибудь первое число, то и* a *должно дѣлиться на него.*

Это слѣдуетъ изъ предыдущей статьи, при предположеніи, что всѣ множители равны.

702. *Если какое нибудь число* n *дѣлится на* p, p′, p″, ... *причемъ всѣ эти дѣлители первые между собою, то* n *дѣлится также и на произведеніе* pp′p″....

Дѣйствительно, такъ какъ n дѣлится на p, то мы имѣемъ $n=pq$, гдѣ q какое нибудь цѣлое число. Такъ какъ pq дѣлится на p', причемъ p и p' первыя между собою, то q должно дѣлиться на p'; слѣдовательно $q=p'q'$, гдѣ q'—какое нибудь цѣлое число. Итакъ $n=pp'q'$, а потому оно дѣлится на pp'. Продолжая разсуждать такимъ образомъ далѣе, мы можемъ доказать, что n дѣлится на $pp'p''$...

703. *Если числа* a *и* b *будутъ первыми съ* c, *то и* ab *будетъ первое съ* c.

Дѣйствительно, если ab не будетъ первымъ съ c, то положимъ, что $ab=nr$ и $c=ns$, гдѣ n, r и s цѣлыя числа; тогда, такъ какъ a и b первыя съ c, то они будутъ первыми и съ ns, а слѣдовательно и съ n; но $ab=nr$, поэтому $\frac{a}{n}=\frac{r}{b}$; слѣдовательно b есть кратное n (ст. 699). Отсюда слѣдуетъ, что b въ одно и то-же время и первое съ n, и кратное для n—что невозможно. Поэтому ab первое съ c.

704. *Если* a *и* b *взаимно первыя, то при* m *и* n *цѣлыхъ положительныхъ* a^m *и* b^n *будутъ также взаимно первыми.*

Дѣйствительно, такъ какъ a первое съ b, то отсюда слѣдуетъ, что $a\times a$, или a^2 также будетъ первое съ b (ст. 703); подобнымъ-же образомъ $a^2\times a$, или a^3 будетъ первое съ b; и такъ далѣе. Такимъ образомъ a^m есть первое съ b. Кромѣ того, такъ какъ a^m первое съ b, то изъ этого слѣдуетъ, что оно первое-же и съ $b\times b$, или съ b^2; и такъ далѣе.

Въ этой статьѣ заключается тотъ выводъ, на который сдѣлана ссылка въ ст. 242.

705. *Никакое цѣлое раціональное алгебраическое выраженіе не можетъ представлять одни только первыя числа.*

Дѣйствительно, предположимъ, если возможно, что выраженіе $a+bx+cx^2+dx^3+\ldots$ представляетъ только первыя числа; положимъ, что когда $x=m$, то это выраженіе получаетъ величину p, такъ что $p=a+bm+cm^2+dm^3+\ldots$; замѣнимъ въ томъ-же выраженіи x чрезъ $m+np$, и положимъ, что значеніе его тогда будетъ p'; такимъ образомъ $p'=a+b(m+np)+c(m+np)^2+d(m+np)^3+\ldots=a+bm+cm^2+dm^3+\ldots+M(p)=p+M(p)$, гдѣ $M(p)$ означаетъ *нѣкоторое кратное отъ* p; итакъ p' дѣлится на p, а потому оно *не первое* съ нимъ.

706. *Число первыхъ чиселъ безконечно.*

Дѣйствительно, если число первыхъ чиселъ не безконечно, то по-

ложимъ что p будетъ наибольшее первое число. Произведеніе всѣхъ первыхъ чиселъ до p, то-есть $2.3.5.7.11...p$ дѣлится на каждое изъ этихъ чиселъ; прибавимъ къ этому произведенію единицу—получимъ число, которое не будетъ дѣлиться ни на одно изъ этихъ первыхъ чиселъ; слѣдовательно это число или будетъ первымъ, или будетъ дѣлиться на нѣкоторое первое число, большее чѣмъ p; такимъ образомъ p не будетъ наибольшимъ числомъ, что противорѣчитъ предположенію. Слѣдовательно, число первыхъ чиселъ безконечно.

707. *Если* a *первое съ* b, *и количества* a, 2a, 3a, ... (b—1)a *будемъ дѣлить на* b, *то остатки всѣ будутъ различны между собою.*

Дѣйствительно, предположимъ, если это возможно, что два изъ этихъ количествъ ma и $m'a$, по раздѣленіи на b, дадутъ одинъ и тотъ же остатокъ r, такъ что

$$ma=nb+r \quad \text{и} \quad m'a=n'b+r;$$

тогда

$$(m-m')a=(n-n')b;$$

а потому

$$\frac{a}{b}=\frac{n-n'}{m-m'};$$

отсюда слѣдуетъ, что $m-m'$ есть кратное отъ b (699); но это невозможно, такъ какъ m и m' оба меньше b.

708. *Число можетъ быть разложено на первоначальные множители только однимъ способомъ.*

Пусть N будетъ нѣкоторое число, и предположимъ, что $N=abcd...$ гдѣ a, b, c, d, ... первоначальныя числа равныя или неравныя. Положимъ, если это возможно, что N также $=\alpha\beta\gamma\delta$ ..., гдѣ α, β, γ, δ, ... другія первоначальныя числа. Тогда $abcd....=\alpha\beta\gamma\delta....$; отсюда слѣдуетъ, что $abcd...$ должно дѣлиться на α, а слѣдовательно на него долженъ дѣлиться одинъ изъ множителей этого произведенія; но эти множители всѣ первоначальныя числа, а потому α должно быть равно одному изъ нихъ, положимъ a. Раздѣливъ обѣ части на a, или α, получимъ $bcd...=\beta\gamma\delta...$; здѣсь мы можемъ доказать, что β должно равняться одному изъ множителей произведенія $bcd...$, и такъ далѣе Такимъ образомъ множители $abcd....$ не могутъ быть различны съ множителями $\alpha\beta\gamma\delta....$

709. *Найти наибольшую степень первоначальнаго числа* a, *содержащагося въ произведеніи* |m.

Означимъ чрезъ $I\left(\frac{m}{a}\right)$ наибольшее цѣлое число, содержащееся въ $\frac{m}{a}$, чрезъ $I\left(\frac{m}{a^2}\right)$ наибольшее цѣлое число, содержащееся въ $\frac{m}{a^2}$, чрезъ $I\left(\frac{m}{a^3}\right)$ наибольшее цѣлое число, содержащееся въ $\frac{m}{a^3}$, и такъ далѣе;

тогда наивысшая степень первоначальнаго числа a, содержащаяся въ $|\underline{m}$, будетъ $I\left(\frac{m}{a}\right)+I\left(\frac{m}{a^2}\right)+I\left(\frac{m}{a^3}\right)+\ldots$

Дѣйствительно, между числами 1, 2, 3, ... m существуетъ $I\left(\frac{m}{a}\right)$, такихъ, которыя содержатъ a по крайней мѣрѣ одинъ разъ, таковы числа a, $2a$, $3a$, $4a$, ... Точно также между ними есть $I\left(\frac{m}{a^2}\right)$, содержащихъ a^2 по крайней мѣрѣ одинъ разъ; и такъ далѣе. Сумма этихъ выраженій и есть искомая наибольшая степень.

Пояснимъ это предложеніе численнымъ примѣромъ. Положимъ, напримѣръ, что $m=14$ и $a=2$; такимъ образомъ, намъ нужно найти наибольшую степень 2, заключающуюся въ $|\underline{14}$.

Здѣсь $I\left(\frac{m}{a}\right)=7$, $I\left(\frac{m}{a^2}\right)=3$, $I\left(\frac{m}{a^3}\right)=1$. Такимъ образомъ, искомая степень есть 11. Это значитъ, что $|\underline{14}$ дѣлится на 2^{11}, и не дѣлится ни на какую высшую степень 2. Посмотримъ теперь, какъ образуется это число 11. Изъ множителей 1.2.3.4.....14 только *семь* дѣлятся на 2 по крайней мѣрѣ одинъ разъ, именно 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, а между этими есть *три* множителя, которые могутъ раздѣлиться на 2 въ другой разъ, именно 4, 8, 12; между послѣдними есть *одинъ* множитель, могущій раздѣлиться на 2 въ третій разъ, именно 8.

Отсюда и видѣнъ способъ, какимъ составляется число 7+3+1, то-есть 11.

710. *Произведеніе всякихъ* n *послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ дѣлится на* $|\underline{n}$.

Пусть $m+1$ будетъ первое изъ этихъ цѣлыхъ чиселъ; тогда намъ нужно будетъ доказать, что $\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{|\underline{n}}$ будетъ цѣлымъ числомъ. Помножимъ числителя и знаменателя этого выраженія на $|\underline{m}$; тогда оно обратится въ $\frac{|\underline{m+n}}{|\underline{m}\,|\underline{n}}$, которое мы обозначимъ чрезъ $\frac{P}{Q}$. Пусть a будетъ какое нибудь первоначальное число; означимъ чрезъ r_1, r_2, r_3, .. наибольшія цѣлыя числа, заключающіяся соотвѣтственно въ $\frac{m+n}{a}$, $\frac{m+n}{a^2}$, $\frac{m+n}{a^3}$ ..; означимъ чрезъ s_1, s_2, s_3, .. наибольшія числа, содержащіяся соотвѣтственно въ $\frac{m}{a}$, $\frac{m}{a^2}$, $\frac{m}{a^3}$ ....; и наконецъ означимъ чрезъ t_1, t_2, t_3, ... наибольшія цѣлыя числа, заключающіяся соотвѣтственно въ $\frac{n}{a}$, $\frac{n}{a^2}$, $\frac{n}{a^3}$, ... Тогда окажется, что множитель a въ P

будетъ возвышенъ въ степень $r_1+r_2+r_3+\ldots$; тотъ-же множитель въ Q будетъ возвышенъ въ степень $s_1+s_2+s_3+\ldots.+t_1+t_2+t_3+\ldots.$ Но легко показать, что r_1 будетъ равенъ или s_1+t_1, или s_1+t_1+1, что r_2 будетъ равняться или s_2+t_2. или s_2+t_2+1, и такъ далѣе. Такимъ образомъ оказывается, что a въ P будетъ возвышено по крайней мѣрѣ въ ту-же степень, въ какой оно содержится въ Q. Точно также всякій первоначальный множитель, заключающійся въ Q, заключается и въ P по крайней мѣрѣ въ той-же самой степени, какъ и въ Q. Слѣдовательно P дѣлится на Q.

711. *Если* n *будетъ какое нибудь первоначальное число, то коэффиціентъ каждаго члена въ разложеніи* $(a+b)^n$, *за исключеніемъ перваго и послѣдняго, дѣлится на* n.

Въ самомъ дѣлѣ, общій видъ коэффиціентовъ, за исключеніемъ перваго и послѣдняго, есть $\frac{n(n-1)\ldots.(n-r+1)}{\lfloor r}$, гдѣ r можетъ имѣть всякое значеніе отъ 1 до $n-1$ включительно. Но по ст. 710 это выраженіе есть цѣлое число; равнымъ образомъ, такъ какъ n есть первоначальное число и больше r, то ни одинъ изъ множителей, содержащихся въ $\lfloor r$, не можетъ быть дѣлителемъ n; поэтому необходимо, чтобы $(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ дѣлилось на $\lfloor r$. Отсюда заключаемъ, что каждый коэффиціентъ, за исключеніемъ перваго и послѣдняго, дѣлится на n.

712. *Если* n *будетъ какое нибудь первоначальное число, то коэффиціентъ каждаго члена въ разложеніи* $(a+b+c+d+\ldots)^n$, *за исключеніемъ коэффиціентовъ при* a^n, b^n, c^n, d^n, ... *дѣлится на* n.

Замѣнимъ $b+c+d+\ldots$ чрезъ β; тогда

$$(a+b+c+d+\ldots)^n=(a+\beta)^n.$$

По ст. 711, каждый коэффиціентъ разложенія $(a+\beta)^n$ дѣлится на n, за исключеніемъ коэффиціентовъ при a^n и β^n, причемъ эти послѣдніе коэффиціенты равны единицѣ. Положимъ также, что

$$\beta^n=(b+c+d+\ldots)^n=(b+\gamma)^n;$$

всякій коэффиціентъ въ разложеніи $(b+\gamma)^n$ дѣлится на n, исключая коэффиціенты при b^n и γ^n. Продолжая разсуждать такимъ образомъ, мы убѣдимся въ справедливости высказаннаго предложенія.

713. *Если* n *будетъ нѣкоторое первоначальное число и* N *будетъ первое съ* n, *то* $N^{n-1}-1$ *будетъ кратное для* n. (Теорема Фермата).

На основаніи предыдущей статьи

$$(a+b+c+d+\ldots+k)^n=a^n+b^n+c^n+d^n+\ldots.+k^n+M(n),$$

гдѣ $M(n)$ означаетъ нѣкоторое кратное отъ n. Положимъ, что каждая

изъ величинъ a, b, c, d,.... k равна единицѣ и допустимъ, что ихъ будетъ N; тогда $N^n = N + M(n)$; а потому $N(N^{n-1} - 1) = M(n)$.

Такъ какъ N и n первыя между собою, то отсюда слѣдуетъ, что $N^{n-1} - 1$ дѣлится на n.

Такимъ образомъ мы можемъ сказать, что $N^{n-1} = 1 + pn$, гдѣ p есть нѣкоторое цѣлое положительное число

714. Такъ какъ въ предыдущей статьѣ n есть первое число, то $n-1$, за исключеніемъ случая, когда $n=2$, будетъ *четнымъ*; поэтому мы можемъ выразить эту теорему еще такъ

$$(N^{\frac{n-1}{2}} - 1)(N^{\frac{n-1}{2}} + 1) = M(n).$$

поэтому или $N^{\frac{n-1}{2}} - 1$, или $N^{\frac{n-1}{2}} + 1$ должно дѣлиться на n, такъ что $N^{\frac{n-1}{2}} = pn + 1$ или-же $= pn - 1$, гдѣ p нѣкоторое положительное цѣлое число.

715. Слѣдующая теорема представляетъ распространеніе Ферматовой. Пусть n будетъ нѣкоторое число и пусть 1, a, b, c, ... $n-1$ будутъ числа меньшія n и первыя съ нимъ; положимъ, что такихъ чиселъ будетъ m. Тогда при подстановкѣ вмѣсто x одного изъ m предыдущихъ чиселъ, кромѣ единицы, будемъ имѣть $x^m - 1 = M(n)$. Дѣйствительно, помножимъ всѣ эти m чиселъ на одно какое нибудь изъ нихъ, исключая единицы и обозначимъ этотъ множитель буквою x; тогда мы получимъ $1.x$, ax, bx, cx, ... $(n-1)x$; всѣ эти произведенія будутъ различны между собою и первыя съ n. Легко показать, что по раздѣленіи этихъ произведеній на n, *всѣ* остатки будутъ *различными и первыми съ* n; такимъ образомъ остатки эти должны быть прежними числами 1, a, b, c, ... $n-1$; они могутъ быть не въ томъ-же самомъ порядкѣ, но это безразлично съ той точки зрѣнія, какую мы имѣли въ виду. Отсюда слѣдуетъ, что произведеніе новаго ряда m чиселъ x, ax, bx, cx, ... $(n-1)x$ можетъ отличаться отъ произведенія прежнихъ m чиселъ *только какимъ нибудь кратнымъ отъ n*; такимъ образомъ

$$x^m abc...(n-1) = abc....(n-1) + M(n).$$

Такъ какъ два изъ трехъ членовъ, входящихъ въ это тожество, дѣлятся на $abc....(n-1)$, то и третій членъ точно также долженъ дѣлиться на это произведеніе, и такъ какъ $abc....(n-1)$ первое съ n, то частное отъ дѣленія $M(n)$ на $abc....(n-1)$ должно быть опять нѣкоторымъ кратнымъ отъ n и можетъ быть обозначено чрезъ $M(n)$; такимъ образомъ

$$x^m = 1 + M(n) \text{ и } x^m - 1 = M(n).$$

716. Мы выведемъ теперь Ферматову теорему, пользуясь заключеніемъ, къ которому пришли въ предыдущей статьѣ. Положимъ, что

n первоначальное число; тогда числа 1, 2, 3, 4...(n—1) всѣ окажутся первыми съ n; такимъ образомъ $m=n-1$. Слѣдовательно $x^{n-1}-1=M(n)$, гдѣ x какое нибудь число, меньшее n. Пусть теперь y означаетъ нѣкоторое число, большее чѣмъ n и первое съ нимъ; тогда мы можемъ предположить, что $y=pn+x$, гдѣ p нѣкоторое цѣлое число, а x меньше n. Поэтому

$$y^{n-1}=(pn+x)^{n-1}=x^{n-1}+(n-1)x^{n-2}pn+\ldots=x^{n-1}+M(n);$$

но мы уже показали, что $x^{n-1}=1+M(n)$; такимъ образомъ

$$y^{n-1}=1+M(n) \text{ и } y^{n-1}-1=M(n).$$

Итакъ Ферматова теорема доказана.

717. *Если* n *какое нибудь первоначальное число, то* $1+\underline{|n-1}$ *дѣлится на* n. (Теорема Вильсона).

По ст. 549 мы имѣемъ

$$\underline{|n-1}=(n-1)^{n-1}-(n-1)(n-2)^{n-1}+$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}(n-3)^{n-1}-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}(n-4)^{n-1}+\ldots;$$

по теоремѣ Фермата мы имѣемъ

$$(n-1)^{n-1}=1+p_1n,\ (n-2)^{n-1}=1+p_2n,\ (n-3)^{n-1}=1+p_3n,\ldots$$

гдѣ $p_1, p_2, p_3,\ldots$ цѣлыя положительныя числа. Поэтому $\underline{|n-1}=M(n)$

$$+1-(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}+\ldots;$$

рядъ $1-(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}-\ldots$, состоящій изъ $n-1$ члена, равенъ $(1-1)^{n-1}-(-1)^{n-1}$, т. е. равенъ -1, такъ какъ $n-1$ всегда есть четное число. Такимъ образомъ $\underline{|n-1}=M(n)-1$; слѣдовательно $1+\underline{|n-1}$ дѣлится на n.

Если n *не есть* первоначальное число, то $1+\underline{|n-1}$ *не будетъ* дѣлиться на n. Дѣйствительно, положимъ, что p есть одинъ изъ множителей n; тогда p меньше, чѣмъ $n-1$, и слѣдовательно $\underline{|n-1}$ дѣлится на p; отсюда слѣдуетъ, что $1+\underline{|n-1}$ не дѣлится на p, а слѣдовательно не дѣлится и на n.

718. Изъ теоремы Вильсона можно вывести слѣдующее заключеніе: если $2p+1$ первоначальное число, то $\{\underline{|p}\}^2+(-1)^p$ дѣлится на $2p+1$.

По теоремѣ Вильсона, такъ какъ $2p+1$ первоначальное число, $1+\underline{|2p}$ дѣлится на $2p+1$. Поставимъ n вмѣсто $2p+1$; тогда $\underline{|2p}$ можно написать такъ: $1(n-1)2(n-2)3(n-3)\ldots p(n-p)$; предполагая, что эти множители перемножены на самомъ дѣлѣ, мы очевидно получимъ $(-1^p)\ 1^2 2^2 3^2\ldots p^2$ вмѣстѣ съ нѣкоторымъ кратнымъ отъ n.

Отсюда слѣдуетъ, что $1+(-1)^p\{\underline{|p}\}^2$ должно дѣлиться на n, а слѣдовательно $\{\underline{|p}\}^2+(-1)^p$ должно дѣлиться на n.

719. Пусть x означаетъ какое нибудь цѣлое число; тогда число цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ, меньшихъ x и первыхъ съ x мы будемъ означать чрезъ $L(x)$.

Возьмемъ напримѣръ цѣлое и положительное число 12; тогда будетъ 4 цѣлыхъ положительныхъ числа, меньшихъ 12 и первыхъ съ 12, именно 11, 7, 5, 1; такимъ образомъ $L(12)=4$.

720. *Если* m *первое съ* n, *то* $L(mn)=L(m)\times L(n)$.

Дѣйствительно, пусть 1, a, b, ... $m-1$ будутъ цѣлыя положительныя числа, меньшія m и первыя съ m; тогда, если одно изъ нихъ означимъ чрезъ r, то слѣдующія n цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ всѣ будутъ меньше mn и будутъ первыми съ m:

$$r,\ r+m,\ r+2m,\ \ldots\ r+(n-1)m.$$

И всякое положительное цѣлое число, меньшее чѣмъ mn и первое съ m, должно быть вида $r+pm$, гдѣ p можетъ быть нулемъ или какимъ нибудь цѣлымъ положительнымъ числомъ, меньшимъ n, а r какое нибудь изъ чиселъ 1, a, b, ... $m-1$ также цѣлыхъ и положительныхъ.

Отсюда мы видимъ, что число цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ, меньшихъ mn и первыхъ съ m равняется $n\times L(m)$.

Между цѣлыми и положительными числами, меньшими чѣмъ mn и первыми съ m, мы должны опредѣлить теперь тѣ, которыя будутъ первыми также и съ n.

Пусть r означаетъ то-же, что и прежде. Если мы раздѣлимъ каждый изъ членовъ ряда

$$r,\ r+m,\ r+2m,\ \ldots\ r+(n-1)m$$

на n, то остатки всѣ будутъ различными; это можно доказать по способу ст. 707; такимъ образомъ остатки должны быть 0, 1, 2, ... $n-1$; хотя они могутъ и не быть непремѣнно въ такомъ порядкѣ. Если какой нибудь остатокъ будетъ первымъ съ n, то и соотвѣтствующее дѣлимое будетъ такъ-же первымъ съ n; и наоборотъ, если какое нибудь дѣлимое будетъ первымъ съ n, то и соотвѣтствующій остатокъ будетъ первымъ съ n. Отсюда слѣдуетъ, что между n цѣлыми и положительными числами предыдущаго ряда находится $L(n)$ такихъ, которыя будутъ первыми съ n. И такъ какъ это справедливо для каждаго подобнаго ряда цѣлыхъ чиселъ, что мы уже видѣли, то отсюда слѣдуетъ, что $L(mn)=L(m)\times L(n)$.

Слѣдовательно, если l, m, n всѣ будутъ первыми между собою, то мы будемъ имѣть

$$L(lmn)=L(lm)\times L(n)=L(l)\times L(m)\times L(n);$$

то-же будетъ справедливо и для всякаго числа множителей взаимно первыхъ между собою.

721. *Найти число цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ, меньшихъ нѣкотораго даннаго числа и первыхъ между собою.*

Пусть это число будетъ N, и положимъ во-первыхъ, что $N=a^p$, гдѣ a есть нѣкоторое первоначальное число. Единственные члены ряда $1, 2, 3, 4....N$ не первые съ N будутъ $a, 2a, 3a, 4a....\frac{N}{a}a$; такихъ членовъ будетъ $\frac{N}{a}$. Отбросивъ эти кратныя a, мы получимъ въ остаткѣ $N-\frac{N}{a}$ т. е. $N\left(1-\frac{1}{a}\right)$ членовъ; итакъ всѣхъ цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ, меньшихъ N и первыхъ съ N будетъ $N\left(1-\frac{1}{a}\right)$.

Предположимъ теперь, что $N=a^pb^qc^r....$, гдѣ $a, b, c, \ldots$ первоначальныя числа.

Тогда на основ. ст. 720 имѣемъ, по первому случаю

$$L(N)=L(a^p)\times L(b^q)\times L(c^r)\times..$$

$$=a^p\left(1-\frac{1}{a}\right)\times b^q\left(1-\frac{1}{b}\right)\times c^r\left(1-\frac{1}{c}\right)\times\ldots$$

Такимъ образомъ окончательно, если $N=a^pb^qc^rd^s\ldots$ гдѣ $a, b, c, d...$ первоначальныя числа, то число цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ меньшихъ N и первыхъ съ N будетъ

$$N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\left(1-\frac{1}{d}\right)\ldots$$

Нужно замѣтить, что въ этой теоремѣ единица разсматривается также какъ одно изъ цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ, меньшихъ N и первыхъ съ N.

722. *Найти число дѣлителей какого нибудь даннаго числа.*

Пусть N означаетъ данное число и положимъ, что $N=a^pb^qc^r...$ гдѣ $a, b, c...$ первоначальныя числа. Очевидно, что N будетъ дѣлиться на всякое число, составленное изъ произведенія степеней $a, b, c...$, лишь бы показатель степени a заключался между 0 и p, показатель степени b—между 0 и q, показатель степени c—между 0 и r, и т. д.; и никакое другое число не будетъ дѣлить N. Слѣдовательно дѣлителями N будутъ различные члены произведенія

$$(1+a+a^2+...+a^p)(1+b+b^2+...+b^q)(1+c+c^2+...c^r)...;$$

и число такихъ дѣлителей поэтому будетъ $(p+1)(q+1)(r+1)...$ Между этими дѣлителями заключаются также единица и само число N.

723. *Найти, сколькими способами данное число можетъ быть разложено на два множителя.*

Пусть N означаетъ данное число, и положимъ, что $N=a^pb^qc^r...$ гдѣ $a, b, c...$ первоначальныя числа. Предположимъ во-первыхъ, что N

не есть точный квадратъ; тогда по крайней мѣрѣ *одинъ* изъ показателее p, q, r, ... будетъ нечетнымъ числомъ, и въ такомъ случаѣ искомой число будетъ $\frac{1}{2}(p+1)(q+1)(r+1)\ldots$, потому что будетъ два дѣлителя N, соотвѣтствующіе двумъ способамъ, которыми N можетъ быть разложено на два множителя. Теперь предположимъ, что N точный квадратъ; тогда всѣ показатели p, q, r, ... будутъ четные; искомое число найдется, если произведеніе $(p+1)(q+1)(r+1)\ldots$ мы увеличимъ на единицу и возьмемъ половину этой суммы; потому что въ этомъ случаѣ квадратный корень изъ N есть одинъ изъ дѣлителей, и если мы примемъ его за одинъ изъ множителей N, то и другой множитель равенъ ему-же, такъ что только *одинъ* дѣлитель остается отъ этого способа разложенія N на *два* множителя.

Нужно замѣтить, что въ этой теоремѣ $N\times 1$ разсматривается какъ одинъ изъ способовъ разложенія N на два множителя.

724. *Найти сумму дѣлителей даннаго числа.*

Согласно съ обозначеніемъ ст. 722 эта сумма равняется

$$(1+a+a^2+\ldots+a^p)(1+b+b^2+\ldots+b^q)(1+c+c^2+\ldots+c^r)$$

то-есть $$\frac{a^{p+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{q+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{r+1}-1}{c-1}\ldots.$$

725. *Найти, сколькими способами данное число можетъ быть разложено на два множителя, взаимно первые между собою.*

Пусть данное число будетъ $N=a^pb^qc^r\ldots$ какъ и раньше. Такъ какъ два множителя должны быть первыми между собою, то какія нибудь степени a не могутъ встрѣчаться въ обоихъ множителяхъ, но какая нибудь степень a^p должна встрѣчаться лишь въ одномъ изъ этихъ множителей. Подобнымъ образомъ b^q можетъ встрѣчаться также лишь въ одномъ изъ множителей, и такъ далѣе. Слѣдовательно искомое число способовъ равняется половинѣ числа дѣлителей $abc\ldots$ и слѣдовательно будетъ равняться 2^{n-1}, гдѣ n есть число *различныхъ* первыхъ множителей, встрѣчающихся въ N.

Примѣры изъ теоріи чиселъ.

1. Если p и q цѣлыя числа и $p+q$ число четное, то и $p-q$ также будетъ четное.

2. Найти наименьшій множитель числа 3234, чтобы произведеніе обратилось въ точный квадратъ.

3. Найти наименьшій множитель, чтобы произведеніе его и числа 1845 было точнымъ кубомъ.

4. Найти наименьшій множитель числа 6480, чтобы произведеніе обратилось въ точный кубъ.

5. Найти наименьшій множитель, чтобы произведеніе его и числа 13168 было точнымъ кубомъ.

6. Если сумма нѣкотораго нечетнаго квадратнаго числа и нѣкотораго четнаго квадратнаго числа есть также квадратное число, тогда четное квадратное число дѣлится на 16.

7. Всякое квадратное число бываетъ или вида $5n$, или вида $5n \pm 1$.

8. Всякое кубическое число бываетъ или вида $7n$, или вида $7n \pm 1$.

9. Если какое нибудь число одновременно и квадратъ, и кубъ, то оно имѣетъ видъ $7n$ или $7n+1$.

10. Никакое квадратное число не бываетъ вида $3n-1$.

11. Никакое треугольное число не бываетъ вида $3n-1$.

12. Если n какое нибудь число, a разность между n и ближайшимъ къ нему, но большимъ его квадратнымъ числомъ, и b разность между n и ближайшимъ къ нему, но меньшимъ его квадратнымъ числомъ, то $n-ab$ есть квадратное число.

13. Если разность двухъ взаимно простыхъ чиселъ будетъ какимъ нибудь нечетнымъ числомъ, то всякая степень ихъ суммы будетъ первою со всякой степенью ихъ разности.

14. Если имѣемъ три числа, изъ которыхъ одно есть сумма двухъ другихъ, то удвоенная сумма ихъ четвертыхъ степеней есть квадратное число.

15. Показать, что x^n-1 и $(x-1)^n$ даютъ одинаковые остатки при дѣленіи на n, если n первоначальное число.

16. Если $2p+1$ будетъ первоначальное число и если числа 1^2, 2^2,... p^2 будемъ дѣлить на $2p+1$, то всѣ остатки будутъ различны.

17. Всякая четная степень всякаго нечетнаго числа бываетъ вида $8n+1$.

18. Всякая нечетная степень 7 бываетъ вида $8n-1$.

19. Если n какое нибудь цѣлое число, то n^2-n+1 не можетъ быть квадратнымъ числомъ.

20. Если n какое нибудь нечетное цѣлое число, то n^3+1 не можетъ быть квадратнымъ числомъ.

21. Если a и x цѣлыя числа, то наибольшее значеніе выраженія $ax-2x^2$ есть цѣлое число, которое равно или меньше $\frac{a^2}{8}$.

22. Показать, что $n(n+1)(2n+1)$ всегда дѣлится на 6.

23. Если n нечетное число, то $(n-1)n(n+1)$ дѣлится на 24.

24. Если n нечетное число, не дѣлящееся на 3, то n^2+5 дѣлится на 6.

25. Если n нѣкоторое первоначальное число большее 5, то n^4-1 дѣлится на 240.

26. Показать, что $\frac{m^5}{120}-\frac{m^3}{24}+\frac{m}{30}$ будетъ цѣлымъ числомъ, если m цѣлое число.

27. Показать, что n^7-n всегда дѣлится на 42.

28. Если n нѣкоторое первоначальное число, а x какое нибудь цѣлое, то доказать, что x^n и x будутъ имѣть одинаковые остатки при дѣленіи на n.

29. Если n нѣкоторое первоначальное число и N первое съ n, то N^m-1 дѣлится на n^2, когда $m=n(n-1)$.

30. Если n какое нибудь первоначальное число большее 2, исключая 7, то n^6-1 дѣлится на 56.

31. Если n какое нибудь первоначальное число большее 2, а N какое нибудь нечетное число первое съ n, то $N^{n-1}-1$ дѣлится на $8n$.

32. Если n какое нибудь первоначальное число большее 3, и N первое съ n, то N^n-N дѣлится на $6n$.

33. Если n и N различныя первоначальныя числа, и каждое изъ нихъ больше 3, то $N^{n-1}-1$ дѣлится на $24n$.

34. Показать, что $1^n+2^n+3^n+\ldots+(rn)^n$ есть кратное отъ n, если n нѣкоторое первоначальное число большее 2.

35. Показать, что 10-я степень какого нибудь числа можетъ быть представлена въ видѣ $11n$ или $11n+1$.

36. Показать, что 12-я степень какого нибудь числа можетъ быть представлена въ видѣ $13n$ или $13n+1$.

37. Показать, что 9-я степень какого нибудь числа можетъ быть представлена въ видѣ $19n$ или $19n\pm1$.

38. Показать, что 11-я степень какого нибудь числа можетъ быть представлена въ видѣ $23n$ или $23n\pm1$.

39. Показать, что 20-я степень какого нибудь числа можетъ быть представлена въ видѣ $25n$ или $25n+1$.

40. Сколько есть цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ, меньшихъ 140 и первыхъ съ числомъ 140?

41. Сколько есть цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ, меньшихъ 360 и первыхъ съ 360.

42. Сколько есть цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ меньшихъ 1000 и первыхъ съ этимъ числомъ 1000?

43. Сколько есть цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ меньшихъ $3^4\times7^2\times11$ и первыхъ съ этимъ числомъ?

44. Сколько есть цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ меньшихъ чѣмъ 10^n и первыхъ съ этимъ числомъ?

45. Найти число дѣлителей 140.

46. Найти число дѣлителей 1845.

47. Найти, сколько дѣлителей въ числѣ $|\underline{9}$ и вычислить сумму этихъ дѣлителей.

48. Найти, сколькими способами число 1845 можетъ быть разложено на два множителя.

49. Сколькими способами можно раздѣлить линію въ 100800 дюймовъ длиною на равныя части, чтобы каждая изъ нихъ была кратной съ однимъ дюймомъ.

50. Сколькими способами можно раздѣлить четыре прямыхъ угла на равныя части, чтобы каждая изъ нихъ была кратною угловой единицы, если за единицу принимается a) градусъ и b) градъ.

51. Сколько различныхъ цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній имѣетъ уравненіе $xy=10^n$?

52. Если N какое нибудь число, n число его дѣлителей и P произведеніе этихъ дѣлителей, то показать, что $P=N^{\frac{n}{2}}$ и что N^n всегда полный квадратъ.

53. Найти наименьшее число, имѣющее 30 дѣлителей.

54. Найти наименьшее число, имѣющее 64 дѣлителя.

55. Предположимъ, что a первое съ b и пусть рядъ величинъ a, $2a$, $3a$, $\ldots(b-1)a$ раздѣленъ на b; доказать, что сумма частныхъ, происшедшихъ отъ какихъ нибудь двухъ членовъ, равно отстоящихъ отъ начала и конца ряда, будетъ равна $a-1$ и что сумма соотвѣтствующихъ остатковъ будетъ равна b.

56. Если произвольное число квадратныхъ чиселъ мы будемъ дѣлить на нѣкоторое данное число n, то при этомъ не можетъ быть больше чѣмъ $\frac{n}{2}$ различныхъ остатковъ.

57. Найти общее раціональное выраженіе для x и y, которое удовлетворяло-бы уравненію $140x=y^3$.

58. Если r, основаніе ариѳметической системы, будетъ первоначальное число большее 2, то будетъ существовать $\frac{r+1}{2}$ различныхъ цифръ, которыми могутъ оканчиваться квадраты чиселъ въ этой системѣ.

59. Если какое нибудь число n можетъ быть разложено на сумму p квадратовъ, то $2(p-1)n$ можетъ быть разложено на сумму $p(p-1)$ квадратовъ.

60. Если n нѣкоторое цѣлое положительное число, то $2^{2n}+15n-1$ дѣлится на 9.

61. Если P_r означаетъ сумму произведеній первыхъ n чиселъ, взятыхъ вмѣстѣ по r, то $1+P_1+P_2+\ldots+P_{n-1}$ есть кратное отъ $\underline{|n}$.

62. Показать, что 100-я степень нѣкотораго числа можетъ быть представлена въ видѣ $125n$ или $125n+1$.

ГЛАВА LIII.

Теорія вѣроятностей.

726. Если какое нибудь событіе можетъ произойти въ a случаяхъ и не произойти въ b случаяхъ и если всѣ эти случаи равно возможны, то вѣроятность того, что событіе случится, будетъ $\frac{a}{a+b}$, а вѣроятность того, что оно не случится, будетъ $\frac{b}{a+b}$. На это можно смотрѣть, какъ на опредѣленіе слова *вѣроятность* въ математическихъ сочиненіяхъ. Чтобъ показать соотвѣтствіе этого опредѣленія съ обыденнымъ понятіемъ о вѣроятности, даютъ иногда слѣдующее поясненіе: Вѣроятность того, что какое нибудь событіе случится, по самой сущности дѣла, должна относиться къ вѣроятности того, что оно не случится, какъ a къ b; поэтому вѣроятность того, что оно случится относится къ суммѣ всѣхъ случаевъ, когда оно можетъ и не можетъ случиться, какъ a къ $a+b$. Но событіе должно или случиться, или не случиться, слѣдовательно сумма вѣроятностей того, что оно случится, и того, что оно не случится должна быть достовѣрностью. Поэтому вѣроятность того, что событіе произойдетъ, должна относиться къ достовѣрности, какъ a къ $a+b$. Такъ что если мы примемъ эту несомнѣнность или достовѣрность за единицу, то вѣроятность того, что событіе случится, представится дробью $\frac{a}{a+b}$.

727. Отсюда слѣдуетъ, что если p есть вѣроятность въ пользу событія, то $1-p$ будетъ вѣроятность противъ событія.

728. Слово *шансъ* часто употребляется въ математическихъ сочиненіяхъ какъ синонимъ со словомъ *вѣроятность*.

729. Когда вѣроятность того, что событіе случится къ вѣроятности того что оно не случится относится, какъ a къ b, то въ обыкновенной рѣчи это выражаютъ такимъ образомъ: вѣроятность *въ пользу* событія равна $\frac{a}{b}$, а вѣроятность *противъ* событія равна $\frac{b}{a}$.

730. Положимъ, что ожидаются нѣсколько событій A, B, C, и пр. такъ что должно случиться одно событіе, и одно оно только и можетъ случиться; предположимъ еще, что a, b, c... будутъ числа случаевъ, въ которыхъ каждое изъ этихъ событій соотвѣтственно можетъ случиться, и что всѣ эти случаи одинаково возможны; тогда вѣроятности событій будутъ соотвѣтственно пропорціональны числамъ a, b, c, и пр. Будемъ для простоты разсматривать только три событія, тогда событіе A можетъ произойти въ a случаяхъ изъ всѣхъ $a+b+c$ случаевъ и можетъ не произойти въ $b+c$ случаяхъ; слѣдовательно по ст. 726 вѣроятность, что A произойдетъ будетъ $\frac{a}{a+b+c}$, а вѣроятность, что оно не произойдетъ, будетъ $\frac{b+c}{a+b+c}$. Подобнымъ образомъ вѣроятность, что случится событіе B, будетъ $\frac{b}{a+b+c}$ и вѣроятность, что случится событіе C будетъ $\frac{c}{a+b+c}$.

731. Поясним теперь примѣромъ математическое пониманіе слова *вѣроятность*.

Если n разныхъ шаровъ A, B, C,... положены въ мѣшокъ и если кто нибудь будетъ вынимать шары по одному, то вѣроятность, что онъ вынетъ шаръ A, будетъ $\frac{1}{n}$; вѣроятность того, что вынутый шаръ будетъ или A, или B, выразится $\frac{2}{n}$.

Если при томъ-же предположеніи вынимать въ разъ *два* шара, то вѣроятность, что это будутъ шары A и B, выразится дробью $\frac{2}{n(n-1)}$. Дѣйствительно, число разныхъ паръ шаровъ будетъ то-же самое, какъ число сочетаній n предметовъ по два, то-есть $\frac{1}{2}n(n-1)$; всякую изъ такихъ паръ одинаково возможно вынуть, поэтому вѣроятность вынуть какую нибудь опредѣленную пару будетъ $1:\frac{1}{2}n(n-1)$, то-есть $\frac{2}{n(n-1)}$.

Положимъ еще, что въ мѣшкѣ заключается 3 бѣлыхъ, 4 черныхъ и 5 красныхъ шаровъ, и кто нибудь будетъ вынимать ихъ по одному. Вѣроятность, что онъ вынетъ бѣлый шаръ, будетъ $\frac{3}{12}$, вѣроятность что это будетъ черный шаръ, равняется $\frac{4}{12}$ и вѣроятность, что это бу-

детъ красный шаръ, равняется $\frac{5}{12}$. Но положимъ, что нужно вынуть вразъ *два* шара: найдемъ вѣроятность различныхъ случаевъ, какіе могутъ произойти. Число паръ, какое можно составить изъ 12 предметовъ, будетъ $\frac{1}{2}.12.11$, то-есть 66. Число паръ, которыя можно составить изъ 3 бѣлыхъ шаровъ, есть 3; слѣдовательно вѣроятность вынуть два бѣлыхъ шара будетъ $\frac{3}{66}$. Подобнымъ образомъ вѣроятность вынуть два черныхъ шара будетъ $\frac{6}{66}$ и вѣроятность вынуть два красныхъ шара будетъ $\frac{10}{66}$. Точно также, такъ какъ каждый бѣлый шаръ можетъ войти въ сочетаніе съ каждымъ чернымъ шаромъ, то число паръ состоящихъ изъ бѣлаго и чернаго шара будетъ 3×4, то-есть 12; слѣдовательно вѣроятность вынуть вразъ бѣлый и черный шаръ будетъ $\frac{12}{66}$. Подобнымъ-же образомъ вѣроятность вынуть черный и красный шаръ будетъ $\frac{20}{66}$ и вѣроятность вынуть красный и бѣлый шаръ будетъ $\frac{15}{66}$. Сумма всѣхъ шести вѣроятностей, представляющихся намъ, въ точности равна единицѣ, т.-е. достовѣрности, какъ и должно конечно быть.

Дадимъ еще одинъ примѣръ изъ отрасли, представляющей важное приложеніе теоріи вѣроятностей. Изъ таблицы смертности Карлиля слѣдуетъ, что изъ 6335 лицъ, дожившихъ до 14 лѣтъ, только 6047 достигаетъ возраста въ 21 годъ. Такъ какъ мы можемъ предположить, что каждая личность имѣетъ одинаковую вѣроятность остаться въ живыхъ, то вѣроятность, что лицо, достигшее 14 лѣтъ, доживетъ до 21 года выразится дробью $\frac{6047}{6335}$, а $\frac{288}{6335}$ будетъ вѣроятность того, что это лицо не доживетъ до 21 года.

732. Положимъ, что могутъ произойти два независимыхъ другъ отъ друга событія, вѣроятность каждаго изъ которыхъ соотвѣтственно извѣстна; опредѣлимъ, какова вѣроятность того, что они случатся оба вмѣстѣ.

Пусть a будетъ число случаевъ, въ которыхъ можетъ произойти первое событіе, и b число случаевъ, въ которыхъ оно можетъ не произойти, причемъ всѣ эти случаи одинаково возможны; пусть a' будетъ число случаевъ, въ которыхъ можетъ произойти второе событіе, и b' число случаевъ, въ которыхъ оно можетъ не произойти, причемъ и эти всѣ случаи одинаково возможны. Каждый изъ $a+b$ случаевъ можетъ сочетаться съ каждымъ изъ $a'+b'$ случаевъ, такъ что все число оди-

наково возможныхъ случаевъ будетъ $(a+b)(a'+b')$. Въ aa' случаяхъ изо всѣхъ возможныхъ оба событія могутъ произойти, въ bb' случаяхъ оба событія могутъ не произойти, въ ab' случаяхъ можетъ произойти первое событіе и не произойти второе и въ $a'b$ случаяхъ можетъ не произойти первое событіе, но произойти второе. Такимъ образомъ

$\frac{aa'}{(a+b)(a'+b')}$ есть вѣроятность, что оба событія случатся,

$\frac{bb'}{(a+b)(a'+b')}$ есть вѣроятность, что оба событія не случатся,

$\frac{ab'}{(a+b)(a'+b')}$ есть вѣроятность, что случится первое событіе, но не случится второго.

$\frac{a'b}{(a+b)(a'+b')}$ есть вѣроятность, что случится второе событіе, но не случится перваго.

Итакъ, если p и p' будутъ соотвѣтственныя вѣроятности двухъ независимыхъ другъ отъ друга событій, то вѣроятность того, что оба они случатся вмѣстѣ, будетъ pp'.

733. Вѣроятность стеченія двухъ *зависящихъ* другъ отъ друга событій есть произведеніе вѣроятности перваго событія на вѣроятность того, что когда случится первое, послѣдуетъ также и второе. Это лишь незначительное измѣненіе правила, установленнаго въ предыдущей статьѣ, и доказывается тѣмъ-же самымъ способомъ. Нужно только предположить, что a' означаетъ число случаевъ, въ которыхъ вслѣдъ за первымъ событіемъ наступаетъ второе, а b'—число случаевъ, въ которыхъ за первымъ событіемъ не слѣдуетъ второе, причемъ предполагается, что всѣ эти событія одинаково могутъ случиться.

734. Подобнымъ образомъ, если ожидается какое нибудь число *независимыхъ* другъ отъ друга событій, то вѣроятность, что всѣ они произойдутъ, есть произведеніе соотвѣтственныхъ вѣроятностей, что случится каждое изъ нихъ. Положимъ напримѣръ, что ожидаются *три* независимыя событія и пусть p, p', p'' будутъ ихъ соотвѣтственныя вѣроятности. По ст. 732 вѣроятность стеченія перваго и второго событія есть pp'; затѣмъ изъ совершенно подобныхъ-же разсужденій слѣдуетъ, что вѣроятность стеченія первыхъ двухъ событій и третьяго будетъ $pp' \times p''$, то-есть $pp'p''$. Подобнымъ-же образомъ вѣроятность, что всѣ эти событія не случатся будетъ $(1-p)(1-p')(1-p'')$. Вѣроятность, что случится первое событіе и не случатся два другія, будетъ $p(1-p')(1-p'')$, и такъ далѣе.

735. Пояснимъ теперь на примѣрахъ опредѣленіе вѣроятности сложнаго событія.

1) Требуется опредѣлить вѣроятность выпаденія извѣстнаго числа очковъ въ первое только изъ двухъ послѣдовательныхъ бросаній одной игральной кости. Здѣсь мы ожидаемъ, что произойдетъ сложное событіе,

именно, что это число очковъ выпадетъ въ первое бросаніе и не выпадетъ во второе. Вѣроятность перваго простого событія есть $\frac{1}{6}$ и вѣроятность второго простого событія $\frac{5}{6}$; слѣдовательно искомая вѣроятность есть $\frac{5}{36}$.

2) Положимъ, что 3 бѣлыхъ, 4 черныхъ и 5 красныхъ шаровъ перемѣшаны въ одномъ мѣшкѣ. Требуется опредѣлить вѣроятность, что въ два послѣдовательные раза вынутся два красныхъ шара, *предполагая, что первый вынутый шаръ будетъ положенъ обратно въ мѣшокъ предъ вторымъ вынманіемъ*. Здѣсь вѣроятность вынуть красный шаръ въ первый разъ будетъ $\frac{5}{12}$ и такая-же вѣроятность будетъ вынуть его и во второй разъ; слѣдовательно вѣроятность вынуть два красныхъ шара подрядъ будетъ $\left(\frac{5}{12}\right)^2$.

3) Положимъ теперь, что мы желаемъ найти вѣроятность вынуть два красныхъ шара, *если вынутый въ первый разъ шаръ не класть обратно въ мѣшокъ предъ вторымъ вынманьемъ*. Это будетъ случай ст. 733. Здѣсь вѣроятность вынуть красный шаръ въ первый разъ равна $\frac{5}{12}$; если требуется вынуть красный шаръ сразу изъ одиннадцати шаровъ, въ которыхъ остается только четыре красныхъ, то вѣроятность этого, а слѣдовательно и вторичнаго вынутія краснаго шара будетъ $\frac{4}{11}$; отсюда слѣдуетъ, что вѣроятность вынуть два красныхъ шара въ два послѣдовательные раза будетъ $\frac{5}{12} \times \frac{4}{11}$. Это—тотъ-же самый выводъ, какой найденъ въ ст. 731 для вѣроятности вынутія двухъ красныхъ шаровъ *одновременно*, и немного подумавши, легко увидѣть, что результатъ дѣйствительно долженъ быть одинъ и тотъ-же.

4) Требуется опредѣлить вѣроятность выпаденія даннаго числа очковъ при одной кости въ два бросанія. Вѣроятность невыпаденія въ первый разъ есть $\frac{5}{6}$; и вѣроятность невыпаденія во второй разъ также $\frac{5}{6}$; слѣдовательно вѣроятность двукратнаго невыпаденія будетъ $\left(\frac{5}{6}\right)^2$, т.е. $\frac{25}{36}$. Отсюда слѣдуетъ, что вѣроятность двукратнаго выпаденія будетъ $1-\frac{25}{36}$, т. е. $\frac{11}{36}$.

5) Сколько разъ нужно бросать одну игральную кость, чтобы вѣроятность выпаденія даннаго числа очковъ на ней равнялась $\frac{1}{2}$? Положимъ, что число бросаній будетъ x; тогда вѣроятность послѣдовательныхъ неудачъ x разъ подъ рядъ будетъ $\left(\frac{5}{6}\right)^x$ (ст. 734). Слѣдовательно вѣроятность удачи будетъ $1-\left(\frac{5}{6}\right)^x$, поэтому $1-\left(\frac{5}{6}\right)^x=\frac{1}{2}$, откуда $\left(\frac{5}{6}\right)^x=\frac{1}{2}$, или $x\log\frac{5}{6}=\lg\frac{1}{2}$, а слѣдовательно $x=\frac{\log 2}{\lg 6-\lg 5}$. Съ помощью таблицы логариѳмовъ находимъ, что приблизительно $x=3.8$. Такимъ образомъ мы заключаемъ, что при 3 бросаніяхъ вѣроятность успѣха меньше $\frac{1}{2}$, а при 4 — больше $\frac{1}{2}$.

6) При сколькихъ бросаніяхъ получатся одинаковые шансы выпасть или нѣтъ шестеркѣ на каждой изъ двухъ бросаемыхъ костей? Вѣроятность выпаденія шестерки на обѣихъ костяхъ при одномъ бросаніи будетъ $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$ т. е. $\frac{1}{36}$; слѣдовательно вѣроятность невыпаденія шестерки будетъ $\frac{35}{36}$. Положимъ, что x будетъ число бросаній; тогда мы будемъ имѣть $1-\left(\frac{35}{36}\right)^x=\frac{1}{2}$, отсюда $\left(\frac{35}{36}\right)^x=\frac{1}{2}$; слѣдовательно $x=\frac{\lg 2}{\lg 36-\lg 35}$. Съ помощью логариѳмическихъ таблицъ найдемъ, что x заключается между 24 и 25, что̀ надо понимать подобно предыдущему.

7) Найти вѣроятность того, что два лица A и B, лѣта которыхъ извѣстны, оба будутъ живы по истеченіи года. Пусть p будетъ вѣроятность, что A будетъ въ живыхъ по истеченіи года и p' вѣроятность того, что B будетъ живъ по истеченіи года; тогда pp' будетъ вѣроятность того, что они оба будутъ живы по истеченіи года. Величины p и p' могутъ быть найдены изъ таблицъ смертности, какъ это пояснено на примѣрѣ ст. 731.

8) Найти вѣроятность того, что покрайней мѣрѣ одно изъ лицъ A и B, лѣта которыхъ извѣстны, останется въ живыхъ по истеченіи даннаго числа лѣтъ. Пусть p будетъ вѣроятность того, что A будетъ въ живыхъ черезъ данное число лѣтъ и p' вѣроятность того, что B будетъ также живъ. Тогда $1-p$ будетъ вѣроятность, что A умретъ, а $1-p'$ вѣроятность, что B умретъ. Слѣдовательно $(1-p)(1-p')$ будетъ вѣроятность того, что оба они умрутъ. Вѣроятность-же, что не оба они умрутъ, т.-е. что покрайней мѣрѣ одинъ изъ нихъ будетъ живъ, выразится $1-(1-p)(1-p')$, т.-е. $p+p'-pp'$.

736. Если какое нибудь событіе можетъ случиться нѣсколькими различными и независящими другъ отъ друга способами, то вѣроятность, что оно произойдетъ есть сумма вѣроятностей появленія его въ каждомъ изъ этихъ независимыхъ случаевъ.

Если всѣ эти независимые случаи, въ которыхъ можетъ произойти событіе, одинаково вѣроятны, то это предложеніе было-бы простымъ повтореніемъ опредѣленія вѣроятности, даннаго въ ст. 726; но если они и не одинаково-вѣроятны, то это предложеніе все-таки есть очевидное слѣдствіе опредѣленія и принимается часто безъ всякаго поясненія. Иногда-же употребляютъ такой способъ поясненія. Пусть мы имѣемъ двѣ урны A и B и пусть въ A находится 2 бѣлыхъ и 3 черныхъ шара, а въ B содержится 3 бѣлыхъ и 4 черныхъ шара; требуется найти вѣроятность вынуть бѣлый шаръ въ одинъ пріемъ изъ одной урны, какой попало. Такъ какъ одинаково возможно вынимать изъ обѣихъ урнъ, то вѣроятность избранія урны A равна $\frac{1}{2}$, а вѣроятность вынутія изъ нея бѣлаго шара равна $\frac{2}{5}$; слѣдовательно вѣроятность вынутія бѣлаго шара, по скольку это зависитъ отъ A, выразится чрезъ $\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}$. Подобно этому вѣроятность вынутія бѣлаго шара, по скольку это зависитъ отъ B, есть $\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}$. Слѣдовательно предложеніе наше утверждаетъ, что вѣроятность вынутія бѣлаго шара будетъ $\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}$, то-есть $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{7}\right)$. Вѣрность этого вывода можетъ быть подтверждена слѣдующими соображеніями; во-первыхъ, не измѣняя вопроса, мы можемъ замѣстить урну A другою урною A', содержащей какое угодно число шаровъ, *лишь-бы отношеніе бѣлыхъ шаровъ къ черными было какъ* 2 *къ* 3; подобнымъ-же образомъ мы можемъ замѣнить урну B урною B', содержащей какое угодно число шаровъ, *лишь-бы отношеніе бѣлыхъ шаровъ къ черными было какъ* 3 *къ* 4. Пусть-же A' содержитъ 14 бѣлыхъ и 21 черный шаръ и пусть B' содержитъ 15 бѣлыхъ и 20 черныхъ шаровъ. Такимъ образомъ A' и B' каждая содержитъ по 35 шаровъ. Во-вторыхъ, не измѣняя вопроса, мы можемъ теперь предположить, что шары въ A' и B' соединены въ одной урнѣ, такъ что въ ней будетъ 70 шаровъ, изъ которыхъ 29 будутъ бѣлые. Вѣроятность вынутія бѣлаго шара такимъ образомъ будетъ $\frac{29}{70}$, то-есть $\frac{14+15}{70}$, или $\frac{1}{2}\left(\frac{14}{35}+\frac{15}{35}\right)$ или $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{7}\right)$.

737. Вѣроятность того, что произойдетъ то или другое изъ двухъ событій, не могущихъ случиться вмѣстѣ, равняется суммѣ вѣроятностей случиться каждому изъ нихъ отдѣльно. Дѣйствительно, мы можемъ разсматривать сложное событіе случившимся, если случится первое событіе или если случится второе. Такимъ образомъ это предложеніе есть одинъ изъ случаевъ предыдущаго предложенія.

738. Если извѣстна вѣроятность событія въ случаѣ однократной попытки вызвать его, то какъ найти вѣроятность его въ случаѣ двухкратной, трехкратной ... вообще n-кратной попытки?

Пусть p означаетъ вѣроятность того, что событіе произойдетъ при одной попыткѣ, и q вѣроятность того, что оно не произойдетъ, такъ что $q=1-p$. Вѣроятность того, что при n попыткахъ событіе случится въ одинъ *опредѣленный разъ* и не случится въ $n-1$ разахъ будетъ pq^{n-1} (ст. 734); а такъ какъ будетъ сдѣлано n пробъ, то вѣроятность, что событіе случится въ *одну какую нибудь* изъ нихъ, и не случится въ остальныя, будетъ npq^{n-1}. Вѣроятность, что при n пробахъ событіе случится при *двухъ извѣстныхъ* пробахъ и не случится при остальныхъ $n-2$ пробахъ будетъ p^2q^{n-2}; при этомъ будетъ существовать $\frac{n(n-1)}{1.2}$ способовъ, въ которыхъ событіе можетъ случиться дважды и не случиться $n-2$ раза изъ n пробъ; слѣдовательно вѣроятность того, что оно въ точности случится дважды при n пробахъ будетъ $\frac{n(n-1)}{1.2}p^2q^{n-2}$.

Подобнымъ образомъ вѣроятность, что событіе случится въ точности три раза изъ n разъ, будетъ $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}p^3q^{n-3}$ и вообще вѣроятность, что оно случится въ точности въ r случаяхъ изъ n, будетъ

$$\frac{n(n-1)....(n-r+1)}{\lfloor r}p^rq^{n-r}.$$

Подобнымъ образомъ вѣроятность, что событіе не случится въ точности r разъ изъ n будетъ

$$\frac{n(n-1)....(n-r+1)}{\lfloor r}p^{n-r}q^r.$$

739. Такимъ образомъ, если $(p+q)^n$ разложимъ на основаніи теоремы Ньютона въ рядъ $p^n+np^{n-1}q+$ и проч., то члены этого ряда будутъ представлять соотвѣтственно вѣроятности того, что событіе случается въ точности n разъ, $n-1$ разъ, $n-2$ раза, и т. д. при n пробахъ. Отсюда мы можемъ опредѣлить наибольшее возможное число случаевъ, когда событіе случится или не случится при n пробахъ; для этого намъ нужно будетъ только опредѣлить *наибольшій членъ* въ предыдущемъ ряду. Предположимъ напримѣръ, что $p=\frac{a}{a+b}$, $q=\frac{b}{a+b}$,

$n=m(a+b)$, гдѣ a, b и m цѣлыя числа. Тогда по ст. 511 наиболѣе вѣроятный случай будетъ тотъ, когда будетъ r неудачъ и $n-r$ удачъ, гдѣ r есть наибольшее цѣлое число, содержащееся въ $\frac{n+1}{\frac{p}{q}+1}$, то-есть въ $mb+\frac{b}{a+b}$; такъ что $r=mb$ и $n-r=ma$. Такимъ образомъ, наиболѣе вѣроятный случай будетъ тотъ, въ которомъ числа удачъ и неудачъ будутъ пропорціональны соотвѣтственнымъ вѣроятностямъ удачи и неудачи при какой нибудь отдѣльной пробѣ.

740. Вѣроятность удачи событія по крайней мѣрѣ въ r случаяхъ при n пробахъ выражается рядомъ

$$p^n+np^{n-1}q+\frac{n(n-1)}{1.2}p^{n-2}q^2+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(r+1)}{\lfloor\underline{n-r}}p^rq^{n-r}.$$

Дѣйствительно, если событіе удается каждый разъ или не удается одинъ, два, три ... $(n+r)$ разъ, то оно удастся r разъ; слѣдовательно вѣроятность удачи *по крайней мѣрѣ* r разъ есть сумма вѣроятностей его удачи каждый разъ и неудачи однажды, дважды, ... $(n-r)$ разъ, но эта сумма и есть выше данное выраженіе.

Напримѣръ. Какова вѣроятность вскрытія трехъ очковъ при пяти бросаніяхъ одной кости? И какая вѣроятность вскрытія *по крайней мѣрѣ* трехъ очковъ?

Здѣсь $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{6}$, $n=5$, $r=3$; такимъ образомъ вѣроятность вскрытія какъ разъ трехъ очковъ будетъ $\frac{5.4.3}{1.2.3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{5}\right)^2$, то-есть $\frac{250}{7776}$; а вѣроятность вскрытія по крайней мѣрѣ трехъ очковъ будетъ

$$\left(\frac{1}{6}\right)^5+5\left(\frac{1}{6}\right)^4\frac{5}{6}+\frac{5.4}{1.2}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2;$$ то-есть $\frac{276}{7776}$.

Слѣдующія четыре статьи содержатъ задачи, поясняющія этотъ вопросъ.

741. A и B играютъ нѣсколько партій; вѣроятность выигрыша для A въ одну партію есть p, а вѣроятность для B равна q. Спрашивается, какова вѣроятность, что A выиграетъ m партій изъ $m+n$?

Если A выигралъ $m+r$ партій, то онъ можетъ выиграть послѣднюю партію и $m-1$ изъ предыдущихъ $m+r-1$ партій; вѣроятность этого будетъ $Mp^{m-1}q^rp$, гдѣ M число сочетаній изъ $m+r-1$ элементовъ по $m-1$, то-есть вѣроятность будетъ

$$\frac{\lfloor\underline{m+r-1}}{\lfloor\underline{m-1}\,\lfloor\underline{r}}p^mq^r.$$

Но чтобы A могъ выиграть m партій изъ $m+n$, онъ долженъ выиграть m разъ въ m игръ, или въ $m+1$ игръ; .... или въ $m+n$ игръ. Отсюда заключаемъ, что искомая вѣроятность есть сумма ряда, который мы получимъ, давая r въ выраженіи $\frac{\lfloor\underline{m+r-1}}{\lfloor\underline{m-1}\,\lfloor\underline{r}}p^m q^r$ значенія 0, 1, 2, ... n, то-есть искомая вѣроятность будетъ

$$p^m\left\{1+mq+\frac{m(m+1)}{1.2}q^2+\ldots+\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{\lfloor\underline{n}}q^n\right\}.$$

Если A, чтобы выиграть рядъ партій, долженъ выиграть m партій, прежде чѣмъ B выиграетъ n партій, то A долженъ выиграть m партій изъ $m+n-1$; вѣроятность такого событія дается предыдущимъ выраженіемъ, въ *которомъ нужно отбросить послѣдній членъ*. Подобнымъ образомъ вѣроятность, что B выиграетъ n партій изъ $m+n-1$, будетъ

$$q^n\left\{1+np+\frac{n(n+1)}{1.2}p^2+\ldots+\frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{\lfloor\underline{m-1}}p^{m-1}\right\}.$$

Задача эта знаменита въ исторіи вычисленія вѣроятностей, какъ первый изъ трудныхъ вопросовъ, получившихъ рѣшеніе. Она была предложена Паскалю въ 1654 г. въ нѣсколько упрощенномъ впрочемъ видѣ, такъ какъ p и q предполагались равными.

Изъ предыдущаго изслѣдованія очевидно, что вѣроятность для A выиграть r разъ изъ n выразится

$$p^r\left\{1+rq+\frac{r(r+1)}{1.2}q^2+\ldots.+\frac{r(r+1)\ldots(n-1)}{\lfloor\underline{n-r}}q^{n-r}\right\};$$

но эта вѣроятность по самой сущности вопроса должна быть тою-же самою, какъ и вѣроятность удачи извѣстнаго событія по крайней мѣрѣ r разъ при n пробахъ, когда вѣроятность событія есть p. Такимъ образомъ только-что данное выраженіе должно быть равнозначущимъ съ выраженіемъ, даннымъ въ ст. 740, что мы провѣримъ слѣдующимъ образомъ: Означимъ данное сейчасъ выраженіе чрезъ v_n, а данное въ ст. 740 чрезъ u_n, и пусть v_{n+1} и u_{n+1} означаютъ соотвѣтственно то, во что обратятся они, когда n измѣнится въ $n+1$; теперь мы должны показать, что если $u_n=v_n$, когда n имѣетъ нѣкоторое частное значеніе, то тогда также $u_{n+1}=v_{n+1}$.

Мы имѣемъ $u_n=u_n(p+q)$; но $u_n(p+q)$ даетъ два ряда и по соединеніи подобныхъ членовъ этихъ рядовъ мы получимъ $u_n(p+q)=n_{n+1}$

$$\frac{(n+1)n^6\ldots(r+1)}{\lfloor\underline{n+1-r}}p^r q^{n+1-r}+\frac{n(n-1)\ldots(r+1)}{\lfloor\underline{n-r}}p^r q^{n+1-r};$$

слѣдовательно $u_{n+1}=u_n(p+q)+\frac{n(n-1)\ldots r}{\underline{|n+1-r}}p^r q^{n+1-r}$;

и очевидно, что $v_{n+1}=v_n+\frac{n(n-1)\ldots r}{\underline{|n+1-r}}p^r q^{n+1-r}$.

Это показываетъ, что $u_{n+1}=v_{n+1}$, если $u_n=v_n$. Но, очевидно, u_n равно v_n, когда $n=r$; поэтому u_n равно v_n для всякаго значенія n, большаго чѣмъ r.

Нѣкоторыя болѣе подробныя замѣчанія по этому вопросу читатель найдетъ въ *Исторіи Вычисл. Вѣроятностей* Тодгентера, стр. 98.

742. Въ мѣшкѣ находится $n+1$ билетовъ, означенныхъ соотвѣтственно нумерами 0, 1, 2, ... n. Каждый билетъ вынимается и вкладывается опять. Требуется найти вѣроятность, что послѣ r вынманій сумма вынутыхъ нумеровъ будетъ s.

Число вынманій, какія могутъ быть сдѣланы, есть $(n+1)^r$, чтобы вынуть какой нибудь одинъ и тотъ-же билетъ каждый разъ. Число способовъ, при которыхъ сумма вынутыхъ билетовъ достигаетъ s, есть коэффиціентъ при x^s въ разложеніи выраженія $(x^0+x^1+x^2+\ldots+x^n)^r$,—такъ какъ этотъ коэффиціентъ происходитъ изъ различныхъ способовъ составленія s сложеніемъ r чиселъ ряда 0, 1, 2, ... n. Такимъ образомъ искомая вѣроятность найдется, если мы раздѣлимъ этотъ коэффиціентъ на $(n+1)^r$.

Предыдущій коэффиціентъ можетъ быть полученъ посредствомъ распространенія теоремы Ньютона на многочлены; и мы можемъ поступить такъ:

$$(x^0+x^1+x^2+\ldots+x^n)^r=\left\{\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right\}^r=(1-x^{n+1})^r(1-x)^{-r};$$

и $(1-x^{n+1})^r=1-rx^{n+1}+\frac{r(r-1)}{1.2}x^{2n+2}-\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}x^{3n+3}+\ldots$

$$(1-x)^{-r}=1+rx+\frac{r(r+1)}{1.2}x^2+\frac{r(r+1)(r+2)}{1.2.3}x^3+\ldots$$

Поэтому, чтобъ найти коэффиціентъ при x^s, мы должны взять произведеніе этихъ двухъ строкъ; оно будетъ

$$\frac{r(r+1)\ldots(r+s-1)}{\underline{|s}}-r\frac{r(r+1)\ldots(r+s-n-2)}{\underline{|s-n-1}}$$
$$+\frac{r(r-1)}{1.2}\frac{r(r+1)\ldots(r+s-2n-3)}{\underline{|s-2n-2}}-\text{и пр.}$$

Въ этомъ ряду нужно остановиться на $(i+1)$-мъ членѣ, гдѣ i есть наибольшее цѣлое число, содержащееся въ $\frac{s}{n+1}$; тогда искомая вѣроятность получится, если мы раздѣлимъ этотъ рядъ на $(n+1)^r$.

Не трудно опредѣлить вѣроятность того, чтобы послѣ r вынимані̆й сумма вынутыхъ чиселъ не превосходила-бы s. См. *Истор. Вычислен. Вѣроятностей*, стр. 208.

743. Ящикъ имѣетъ три равныхъ отдѣленія; въ него бросаются, какъ попало, четыре шара. Опредѣлить вѣроятность различныхъ размѣщеній шаровъ, принимая, что каждому шару одинаково возможно упасть въ каждое отдѣленіе.

Такъ какъ одинаково возможно, чтобы какой нибудь шаръ упалъ въ любое отдѣленіе, то мы имѣемъ 3 одинаково возможныхъ случая для *каждаго* шара, всего-же будетъ 3^4 одинаково возможныхъ случаевъ. Здѣсь возможны четыре размѣщенія.

I. Всѣ шары могутъ оказаться въ одномъ отдѣленіи, что можетъ произойти 3-разными способами.

II. *Какіе нибудь* три шара могутъ быть въ одномъ *какомъ нибудь* отдѣленіи, а остальной шаръ въ *другомъ* изъ остальныхъ отдѣленій. Это можетъ случиться на 4.3.2 манера.

III. *Какіе нибудь* два шара могутъ оказаться въ одномъ отдѣленіи, одинъ изъ остальныхъ шаровъ—въ одномъ изъ остальныхъ отдѣленій, а другой—въ другомъ; это можетъ случиться на 6.3.2 разныхъ манера.

IV. *Какіе нибудь* два шара могутъ быть въ одномъ отдѣленіи и другіе два въ другомъ изъ остальныхъ отдѣленій; это можетъ случиться 6.3 способами.

Такимъ образомъ вѣроятности различныхъ размѣщеній соотвѣтственно будутъ $\frac{3}{81}, \frac{24}{81}, \frac{36}{81}, \frac{18}{81}$; сумма этихъ дробей, понятно, равна единицѣ.

Въ предыдущемъ рѣшеніи заслуживаетъ особаго вниманія то, что равно возможны всѣ 81 случаевъ, потому что съ допущеніемъ этого все остальное является необходимымъ слѣдствіемъ. Если это не будетъ допущено, и читатель замѣнитъ это предположеніе другимъ, то ему придется тогда рѣшить другую задачу вмѣсто предложенной. Дѣйствительно, въ задачахъ, относящихся къ перестановкамъ, сочетаніямъ или вѣроятностямъ, не рѣдко можно встрѣтить, что получаются различные результаты, смотря по тому или другому пониманію вопроса. Особенное вниманіе нужно въ этомъ случаѣ обратить на то, что какое-бы толкованіе не было дано задачѣ, его уже нужно твердо держаться впродолженіе всего рѣшенія.

Теперь мы разсмотримъ общую задачу, по отношенію къ которой предыдущая представляетъ частный случай.

744. Ящикъ раздѣленъ на m отдѣленій; въ него бросаются какъ попало n шаровъ. Требуется найти вѣроятность того, что въ a отдѣленіяхъ будетъ по α шаровъ, въ b отдѣленіяхъ по β шаровъ, и такъ далѣе, причемъ $a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots = n$.

Такъ какъ *любой* шаръ можетъ упасть въ *любое* отдѣленіе, то можетъ всего представиться m^n одинаково возможныхъ случаевъ. Покажемъ сначала, что число *различныхъ* способовъ, которыми можно n шаровъ распредѣлить на $a+b+c\ldots$ группъ, содержащихъ соотвѣтственно α, β, γ, ... шаровъ представляется выраженіемъ

$$N=\frac{\lfloor\underline{n}}{\{\lfloor\underline{\alpha}\}^a\{\lfloor\underline{\beta}\}^b\{\lfloor\underline{\gamma}\}^c\ldots.\lfloor\underline{a}\,\lfloor\underline{b}\,\lfloor\underline{c}}.$$

Дѣйствительно, разберемъ сначала, сколькими способами можетъ быть выбрана изъ n шаровъ группа въ α шаровъ:она можетъ быть выбрана $\frac{n(n-1)\ldots.(n-\alpha+1)}{\lfloor\underline{\alpha}}$ способами. Потомъ разсмотримъ, сколькими способами вторая группа въ α шаровъ можетъ быть выбрана изъ *остальныхъ* $n-\alpha$ шаровъ; она можетъ быть выбрана $\frac{(n-\alpha)(n-\alpha-1)\ldots(n-2\alpha+1)}{\lfloor\underline{\alpha}}$ способами. Такимъ образомъ мы можемъ, во-первыхъ заключить, что число способовъ, которыми изъ n шаровъ могутъ быть подобраны *три* группы по α шаровъ каждая, будетъ $\frac{n(n-1)\ldots.(n-3\alpha+1)}{\lfloor\underline{\alpha}\,\lfloor\underline{\alpha}\,\lfloor\underline{\alpha}}$, и это имѣетъ совершенно опредѣленный смыслъ; но всѣхъ размѣщеній, въ которыхъ могутъ оказаться эти три группы, будетъ $\lfloor\underline{3}$; поэтому мы должны раздѣлить на $\lfloor\underline{3}$, чтобы получить число *различныхъ* способовъ, которыми *три* группы по α шаровъ могутъ быть подобраны изъ n шаровъ. Подобнымъ образомъ число *различныхъ* способовъ, которыми a группъ по α шаровъ могутъ быть подобраны изъ n шаровъ, будетъ $\frac{n(n-1)\ldots(n-a\alpha+1)}{\{\lfloor\underline{\alpha}\}^a\lfloor\underline{a}}$.

Поступая такимъ образомъ, мы придемъ къ предположенному результату.

Но число способовъ, которыми эти группы могутъ быть размѣщены по m отдѣленіямъ, есть $m(m-1)(m-2)\ldots.(m-s+1)$, гдѣ $s=a+b+c+\ldots$ Слѣдовательно искомая вѣроятность будетъ

$$\frac{Nm(m-1)(m-2)\ldots(m-s+1)}{m^n}.$$

Напримѣръ положимъ, что бросается шесть шаровъ въ ящикъ съ тремя отдѣленіями; тогда возможны слѣдующія семь различныхъ размѣщеній: 6, 0, 0; 1, 5, 0; 2, 4, 0; 3, 3, 0; 1, 1, 4; 1, 2, 3; 2, 2, 2; а ихъ соотвѣтственныя вѣроятности выразятся дробями, общій знаменатель которыхъ будетъ 243, а числители по порядку: 1, 12, 30, 20, 30, 120, 30.

745. Если p представляетъ вѣроятность успѣха даннаго лица въ какомъ нибудь предпріятіи и m—сумму денегъ, которую можетъ полу-

чить это лицо въ случаѣ успѣха, тогда сумма денегъ pm называется его *ожиданіемъ*. Въ этомъ смыслѣ мы и будемъ употреблять слово *ожиданіе*, и такое опредѣленіе могло-бы быть принято условно безъ всякихъ дальнѣйшихъ замѣчаній; впрочемъ обыкновенно поясняютъ вѣрность этого опредѣленія слѣдующимъ образомъ. Положимъ, что мы имѣемъ $m+n$ карточекъ, и пусть на каждой карточкѣ будетъ написано имя какого нибудь лица, и ни одно изъ этихъ именъ не повторяется. Положимъ всѣ карточки въ мѣшокъ и вынемъ изъ него на удачу одну карточку; предположимъ, что написанное на ней лицо имѣетъ получить a рублей. Ожиданія всѣхъ имѣютъ одинаковую величину, потому что каждое лицо имѣетъ *одинаковую* вѣроятность получить этотъ выигрышъ, и сумма ожиданій представляется a рублями, потому что если-бы одно лицо скупило билеты всѣхъ названныхъ лицъ, то оно было-бы увѣрено, что получитъ a рублей. Слѣдовательно, если означимъ чрезъ x рублей ожиданіе каждаго лица, то мы будемъ имѣть $(m+n)x=a$; такимъ образомъ

$$x=\frac{a}{m+n}.$$

Очевидно точно также, что величина ожиданія двухъ лицъ, есть сумма величинъ ихъ соотвѣтственныхъ ожиданій, то-же будетъ справедливо въ случаѣ трехъ и болѣе лицъ. Слѣдовательно величина ожиданія m лицъ будетъ $\frac{ma}{m+n}$. Теперь предположимъ, что на всѣхъ m карточкахъ написано имя одного лица; тогда ожиданіе его будетъ такое же, какъ сумма ожиданій m лицъ, которыхъ имена написаны на карточкахъ, т.-е. его ожиданіе равно $\frac{ma}{m+n}$. Но его вѣроятность выиграть призъ равняется $\frac{m}{m+n}$, такъ какъ онъ имѣетъ m случаевъ изъ $m+n$ въ свою пользу. Такимъ образомъ его ожиданіе есть произведеніе его вѣроятности выиграть на сумму денегъ, которую онъ получитъ въ случаѣ выигрыша.

746. Ожидается нѣкоторое событіе, которое должно зависѣть отъ одной какой нибудь изъ нѣсколькихъ данныхъ причинъ. Требуется опредѣлить вѣроятность существованія каждой изъ причинъ.

Пусть имѣется n причинъ, и положимъ, что вѣроятность существованія этихъ причинъ, прежде чѣмъ онѣ проявились, выражается соотвѣтственно числами $P_1, P_2, \ldots P_n$. Пусть p_1 означаетъ вѣроятность событія при предположеніи существованія первой причины, пусть p_2 означаетъ вѣроятность событія при предположеніи существованія второй причины, и такъ далѣе. Тогда вѣроятность существованія r-ной причины, опредѣленная послѣ событія, будетъ $\frac{P_r p_r}{\Sigma Pp}$, гдѣ ΣPp поставлено вмѣсто $P_1p_1+P_2p_2+\ldots+P_np_n$.

Изъ первыхъ нашихъ понятій о вѣроятности мы должны допустить, что вѣроятность того, что r-ная причина будетъ истинной причиной, *пропорціональна* предшествующей вѣроятности того, что событіе должно произойти отъ этой причины и можетъ быть поэтому представлено чрезъ CP_rp_r. И такъ какъ какая нибудь одна изъ причинъ должна быть истинной причиной, то мы имѣемъ $C\{P_1p_1+P_2p_2+\ldots+P_np_n\}=1$, а потому $C=\frac{1}{\Sigma Pp}$; слѣдовательно вѣроятность того, что r-ная причина есть истинная причина, будетъ

$$\frac{P_rp_r}{\Sigma Pp}.$$

747. Предыдущая статья трэбуетъ нѣкотораго поясненія примѣромъ, чтобы быть вполнѣ оцѣненной читателемъ. Пусть, напримѣръ, имѣется двѣ урны, изъ которыхъ одна содержитъ 7 бѣлыхъ и 3 черныхъ шара, а другая—5 бѣлыхъ шаровъ и одинъ черный. Положимъ, что нужно вынуть бѣлый шаръ, и мы желаемъ узнать, какова вѣроятность вынутія его изъ первой урны и какова вѣроятность вынутія его изъ второй урны. Вынутіе должно произойти изъ одной изъ двухъ урнъ, такъ что сумма искомыхъ вѣроятностей равна единицѣ. Вмѣсто данныхъ урнъ мы возьмемъ двѣ другія, въ каждой изъ которыхъ число шаровъ одно и то-же; причемъ каждая изъ урнъ содержитъ бѣлые и черные шары въ такомъ-же отношеніи, какъ та урна, которую она замѣщаетъ. Такъ положимъ, что въ одной урнѣ 21 бѣлый шаръ и 9 черныхъ шаровъ, а въ другой урнѣ 25 бѣлыхъ и 5 черныхъ шаровъ. Теперь каждая урна содержитъ по 30 шаровъ, а шансы вынутія каждаго шара остаются прежніе. Такъ какъ, по предположенію, нужно вынуть бѣлый шаръ, то мы можемъ допустить, что черные шары удалены, а всѣ бѣлые шары положены въ новую урну. Такимъ образомъ въ ней будетъ 46 бѣлыхъ шаровъ; вѣроятность, что вынутый бѣлый шаръ будетъ одинъ изъ 21 шара, равна $\frac{21}{46}$, а вѣроятность, что это будетъ одинъ изъ 25 шаровъ равна $\frac{25}{46}$. Но здѣсь $p_1=\frac{7}{10}$, $p_2=\frac{5}{6}$; тогда $\frac{p_1}{p_1+p_2}=\frac{21}{46}$ и $\frac{p_2}{p_1+p_2}=\frac{25}{46}$. Такимъ образомъ результатъ оказывается сходнымъ съ тѣмъ, который дается теоремой ст. 746, если предположить, что P_1 и P_2 равны между собою.

Теперь предположимъ, что мы имѣемъ 4 урны, изъ которыхъ каждая содержитъ 7 бѣлыхъ шаровъ и 3 черныхъ шара, и 3 урны, изъ которыхъ каждая содержитъ по 5 бѣлыхъ шаровъ и по 1 черному. Въ этомъ случаѣ, поступая какъ показано было сейчасъ, мы можемъ вывести, что вѣроятность вынутія бѣлаго шара изъ группы 4 одинаковыхъ

урнъ будетъ $\frac{4\times21}{4\times21+3\times25}$, а вѣроятность вынутія изъ группы 3 одинаковыхъ урнъ будетъ $\frac{3\times25}{4\times21+3\times25}$. Приложимъ теперь теорему ст. 746 къ опредѣленію вѣроятности того, что бѣлый шаръ вынется изъ первой группы, и вѣроятности того, что онъ вынется изъ второй группы. Такъ какъ здѣсь имѣется 7 урнъ, изъ которыхъ 4 одного рода и 3 другого, то мы принимаемъ $P_1=\frac{4}{7}$ и $P_2=\frac{3}{7}$, также $p_1=\frac{7}{10}$ и $p_2=\frac{5}{6}$. Такимъ образомъ

$$Q_1=\frac{\frac{4}{7}\times\frac{7}{10}}{\frac{4}{7}\times\frac{7}{10}+\frac{3}{7}\times\frac{5}{6}},\quad Q_2=\frac{\frac{3}{7}\times\frac{5}{6}}{\frac{4}{7}\times\frac{7}{10}+\frac{3}{7}\times\frac{5}{6}};$$

выводъ этотъ сходенъ съ указаннымъ нами раньше.

748. Величины P_1, P_2, ... P_n въ ст. 746 обыкновенно называются *апріорными* вѣроятностями существованія соотвѣтственныхъ причинъ, а величины Q_1, Q_2, ... Q_n—*апостеріорными* вѣроятностями. Учащіеся иногда испытываютъ затрудненіе при опредѣленіи величинъ P_1, P_2, ... P_n. Самое надежное средство заключается въ томъ, если мы будемъ помнить, что произведеніе P_rp_r означаетъ вѣроятность того, что событіе случится какъ слѣдствіе r-ой причины; вѣрность этого *произведенія* есть важная часть рѣшенія, потому что P_r и p_r не встрѣчаются въ выводѣ отдѣльно. Все предложеніе можетъ быть лучше понято, если мы расположимъ его слѣдующимъ образомъ. Во-первыхъ предположимъ, что *до* совершенія событія различныя причины одинаково вѣроятны; пусть $\tilde{\omega}_r$ означаетъ вѣроятность того, что событіе случится при предположеніи существованія r-ной причины; тогда вѣроятность r-ной причины, опредѣленная послѣ событія, будетъ $\frac{\tilde{\omega}_r}{\Sigma\tilde{\omega}}$. Это кажется почти само собою очевиднымъ, а если еще останется какое нибудь сомнѣніе, то оно можетъ быть устранено съ помощью поясненія, даннаго въ первой части ст. 747. Во-вторыхъ, положимъ, что члены въ $\Sigma\tilde{\omega}$ могутъ быть расположены въ группы и пусть будетъ μ_1 число членовъ въ первой группѣ, причемъ каждый членъ равенъ p_1; положимъ, что будетъ μ_2 членовъ во второй группѣ и каждый изъ членовъ равенъ p_2, и такъ далѣе, и что послѣдняя группа состоитъ изъ μ_n членовъ, изъ которыхъ каждый равенъ p_n. Тогда $\Sigma\tilde{\omega}$ можетъ быть написана въ видѣ $\Sigma\mu p$, гдѣ рядъ $\Sigma\mu p$ состоитъ изъ n членовъ. Такимъ образомъ вѣроятность r-ной причины будетъ $\frac{\tilde{\omega}_r}{\Sigma\mu p}$. Точно также вѣроятность пер-

вой группы причинъ есть сумма отдѣльныхъ вѣроятностей членовъ этой группы, то есть $\frac{\mu_1 p_1}{\Sigma \mu p}$. Подобныя же выраженія будутъ существовать для вѣроятностей другихъ группъ. Такимъ образомъ окончательно мы придемъ къ выводамъ, даннымъ въ ст. 746, гдѣ въ самомъ дѣлѣ

$$Q_1 = \frac{\mu_1 p_1}{\Sigma \mu p}, \quad Q_2 = \frac{\mu_2 p_2}{\Sigma \mu p}, \text{ и проч.}$$

749. Когда намъ предстоитъ наблюдать какое нибудь событіе, то мы можемъ по ст. 746 оцѣнить вѣроятность каждой причины, отъ которой событіе это могло-бы зависѣть; затѣмъ мы можемъ перейти къ оцѣнкѣ вѣроятности, что это событіе случится опять или что могутъ случиться нѣкоторыя другія событія. Дѣйствительно по ст. 736 мы умножаемъ вѣроятность каждой причины на вѣроятность возможности искомаго событія при предположеніи существованія этой причины, а сумма всѣхъ такихъ произведеній есть вѣроятность того, что искомое событіе произойдетъ.

Напримѣръ. Въ мѣшкѣ заключается 3 шара, и неизвѣстно, сколько изъ нихъ бѣлыхъ шаровъ; нужно вынуть бѣлый шаръ и положить его обратно. Какая вѣроятность того, что при другомъ вынманіи получится тоже бѣлый шаръ?

Здѣсь возможно сдѣлать три предположенія: 1) всѣ шары бѣлые, 2) только два изъ этихъ шаровъ бѣлые, 3) только одинъ изъ шаровъ бѣлый. Найдемъ сперва вѣроятность каждаго предположенія по способу ст. 746. При первомъ предположеніи искомое событіе несомнѣнно, то-есть вѣроятность его равна 1; при второмъ предположеніи вѣроятность событія равна $\frac{2}{3}$; при третьемъ предположеніи вѣроятность равна $\frac{1}{3}$. Слѣдовательно, допуская, что до наступленія искомаго событія всѣ три предположенія одинаково вѣроятны, мы имѣемъ *послѣ* этого событія:

$$\text{вѣроятность перваго предположенія} = 1 : \left\{1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{2},$$

$$\text{вѣроятность второго предположенія} = \frac{2}{3} : \left\{1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3},$$

$$\text{вѣроятность третьяго предположенія} = \frac{1}{3} : \left\{1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{6}.$$

Вѣроятность, что при вторичномъ вынманіи получится бѣлый шаръ, по скольку она зависитъ отъ перваго предположенія, будетъ $\frac{1}{2} \times 1$; вѣроятность того-же въ зависимости отъ второго предположенія будетъ $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$ и вѣроятность того-же въ зависимости отъ третьяго пред-

положенія будетъ $\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}$. Слѣдовательно искомая вѣроятность будетъ $\frac{1}{2}+\frac{2}{9}+\frac{1}{18}$, то-есть $\frac{7}{9}$.

Предположимъ, что въ предыдущей задачѣ вмѣсто словъ: „и неизвѣстно, сколько изъ нихъ бѣлыхъ шаровъ“ стояли-бы слова: „и извѣстно, что каждый шаръ будетъ или бѣлый, или черный“. Мы можемъ принять это новое выраженіе за равнозначущее со старымъ и дать то-же самое рѣшеніе, какъ раньше. Кромѣ того, мы можемъ, и пожалуй болѣе естественно, понимать новое выраженіе иначе, именно, что вѣроятность того, что каждый шаръ будетъ бѣлый, можетъ быть принимаема до событія за $\frac{1}{2}$. Въ такомъ случаѣ мы не можемъ допустить, что до наступленія событія всѣ три предположенія одинаково вѣроятны; вѣроятности должны быть соотвѣтственно $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$ и $\frac{3}{8}$ (ст. 734). Тогда *послѣ* наступленія событія мы должны получить для соотвѣтственныхъ вѣроятностей числа $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$. А вѣроятность получить бѣлый шаръ при другомъ вынииманіи будетъ $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$.

750. Дадимъ другой примѣръ. Положимъ, что въ мѣшкѣ отношеніе числа бѣлыхъ шаровъ ко всему числу шаровъ неизвѣстно и что *à priori* одинаково вѣроятно, что это отношеніе есть одно изъ слѣдующихъ количествъ: x, $2x$, $3x$, ... nx. Положимъ, что вынутъ бѣлый шаръ и положенъ вновь. Требуется опредѣлить вѣроятность того, что при другомъ вынииманіи получится бѣлый шаръ.

Здѣсь возможно сдѣлать n предположеній. По первому предположенію вѣроятность наблюдаемаго событія есть x, по второму предположенію она есть $2x$, по третьету $3x$ и т. д. Слѣдовательно вѣроятность перваго предположенія есть $\frac{x}{x(1+2+\ldots+n)}$, то-есть $\frac{2}{n(n+1)}$.

Вѣроятность второго предположенія будетъ $\frac{2\times 2}{n(n+1)}$. Вѣроятность третьяго предположенія будетъ $\frac{2\times 3}{n(n+1)}$. И такъ далѣе. Слѣдовательно вѣроятность получить бѣлый шаръ при вторичномъ вынииманіи по первому предположенію будетъ $\frac{2x}{n(n+1)}$, по второму предположенію $\frac{2x\times 2^2}{n(n+1)}$, по третьему предположенію $\frac{2x\times 3^2}{n(n+1)}$ и такъ далѣе. Поэтому искомая вѣроятность будетъ

*

$$\frac{2x}{n(n+1)}\{1^2+2^2+\ldots+n^2\};$$

то-есть $\frac{2x}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; то-есть $\frac{x(2n+1)}{3}$.

Когда n очень велико, это выраженіе приближается къ $\frac{2nx}{3}$. Если отношеніе числа бѣлыхъ шаровъ ко всему числу шаровъ à priori можетъ одинаково имѣть какую угодно величину, заключающуюся между нулемъ и единицей, тогда x неопредѣленно мало и $nx=1$, такъ что искомая вѣроятность будетъ $\frac{2}{3}$.

751. Слѣдующія задачи пояснятъ вопросъ.

1) Мѣшокъ содержитъ m бѣлыхъ и n черныхъ шаровъ; если вынуть $p+q$ шаровъ, то какова вѣроятность того, что p бѣлыхъ и q черныхъ шаровъ будутъ выниматься *въ извѣстномъ порядкѣ*? Положимъ при этомъ, что p меньше m и q меньше n, и что шары не кладутся назадъ послѣ вынутія.

Предположимъ, напримѣръ, что требуется, чтобы первый шаръ былъ бѣлый, второй—черный, третій—черный, четвертый—бѣлый и такъ далѣе въ томъ-же самомъ порядкѣ. Тогда искомая вѣроятность будетъ произведеніемъ дробей

$$\frac{m}{m+n}, \frac{n}{m+n-1}, \frac{n-1}{m+n-2}, \frac{m-1}{m+n-3}, \ldots.$$

слѣдовательно искомая вѣроятность будетъ

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)n(n-1)(n-2)\ldots(n-q+1)}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)\ldots(m+n-p-q+1)};$$

и нужно замѣтить, что пока ищется p бѣлыхъ и q черныхъ шаровъ, вѣроятность будетъ одна и та-же, *каковъ-бы ни былъ порядокъ*, въ которомъ они должны появляться.

2) При тѣхъ-же предположеніяхъ какъ въ предыдущей задачѣ, какова будетъ вѣроятность, что p бѣлыхъ и q черныхъ шаровъ будутъ появляться *въ какомъ нибудь порядкѣ*?

Пусть N представляетъ число различныхъ порядковъ, въ которыхъ могутъ появляться p бѣлыхъ и q черныхъ шаровъ; тогда искомая вѣроятность получится чрезъ умноженіе вѣроятности, найденной въ (1), на N, гдѣ $N=\frac{\underline{|p+q}}{\underline{|p}\,\underline{|q}}$.

Задачи (1) и (2) послужатъ введеніемъ къ слѣдующей задачѣ, которую мы теперь разсмотримъ.

3) Мѣшокъ содержитъ въ себѣ m шаровъ, и извѣстно, что всѣ

они бѣлые или черные, но сколько тѣхъ и другихъ—неизвѣстно. Положимъ, что вынуто p бѣлыхъ и q черныхъ, и они *не вложены обратно* въ мѣшокъ; найти вѣроятность, что при слѣдующемъ вынманіи получится бѣлый шаръ.

Наблюденное событіе здѣсь есть вынутіе p бѣлыхъ и q черныхъ шаровъ. Чтобы это было возможно, первоначальное число бѣлыхъ шаровъ должно заключаться между $m-q$ до p включительно, а число черныхъ шаровъ отъ q до $m-p$ включительно. Означимъ предположеніе, что существуетъ $m-q$ бѣлыхъ и q черныхъ шаровъ чрезъ H_1, предположеніе $m-q-1$ бѣлыхъ и $q+1$ черныхъ чрезъ H_2, и такъ далѣе. Тогда H_1 дастъ для вѣроятности наблюдаемаго событія

$$M\times\frac{(m-q)(m-q-1)\ldots(m-q-p+1).1.2.3\ldots q}{m(m-1)\ldots(m-q-p+1)},$$

гдѣ M означаетъ число различныхъ способовъ, которыми могутъ сочетаться p бѣлыхъ и q черныхъ шаровъ при $p+q$ вынманіяхъ. Замѣнимъ чрезъ C дробь $\frac{M}{m(m-1)\ldots(m-q-p+1)}$; тогда H_1 дастъ для наблюдаемаго событія вѣроятность CP_1Q_1, гдѣ

$$P_1=(m-q)(m-q-1)\ldots(m-q-p+1),$$

и

$$Q_1=1.2.3.4\ldots q.$$

Точно также H_2 дастъ для наблюдаемой вѣроятности CP_2Q_2, гдѣ

$$P_2=(m-q-1)\ldots(m-q-p),$$

и

$$Q_2=2.3.3.4\ldots q(q+1).$$

Такимъ образомъ, если $n=m-p-q+2$, то для вѣроятности H_1 мы находимъ $\frac{P_1Q_1}{P_1Q_1+P_2Q_2+\ldots+P_{n-1}Q_{n-1}}$; ее можно означить чрезъ $\frac{P_1Q_1}{S}$. Подобнымъ образомъ вѣроятность H_2 есть $\frac{P_2Q_2}{S}$, и такъ далѣе.

Теперь вѣроятность вынутія бѣлаго шара при другой пробѣ по гипотезѣ H_1 будетъ $\frac{P_1Q_1}{S}\times\frac{m-p-q}{m-p-q}$;

по гипотезѣ H_2 будетъ $\frac{P_2Q_2}{S}\times\frac{m-p-q-1}{m-p-q}$; и такъ далѣе.

Такимъ образомъ вся вѣроятность вынуть бѣлый шаръ будетъ

$$\frac{1}{S(m-p-q)}\{P_1Q_1(m-p-q)+P_2Q_2(m-p-q-1)+\text{ и проч.}\}$$

Строка, находящаяся въ скобкахъ, такая-же какъ и S, въ которой вмѣсто p поставлено $p+1$, причемъ число членовъ *однимъ* меньше, чѣмъ въ S.

Но по ст. 670, $S=\frac{\lfloor\underline{p}\ \lfloor\underline{q}}{\lfloor\underline{p+q+1}}\times\frac{\lfloor\underline{n-1+p+q}}{\lfloor\underline{n-2}}$, слѣдовательно строка внутри скобокъ есть $\frac{\lfloor\underline{p+1}\ \lfloor\underline{q}}{\lfloor\underline{p+q+2}}\times\frac{\lfloor\underline{n-1+p+q}}{\lfloor\underline{n-3}}$, и искомая вѣроятность будетъ $\frac{p+1}{p+q+2}\times\frac{n-2}{m-p-q}=\frac{p+1}{p+q+2}$.

Для болѣе общаго изслѣдованія, находящагося въ связи съ этой важной задачей, мы отсылаемъ читателя къ *Исторіи Вычисленія Вѣроятностей*, стр. 454.

752. Математическая теорія вѣроятностей прилагается также къ оцѣнкѣ вѣроятности положеній, поддерживаемыхъ извѣстными доводами или аргументами. Дадимъ нѣсколько примѣровъ этого.

Вѣроятность, что A говоритъ правду есть p, а вѣроятность, что B говоритъ правду—p', какова вѣроятность справедливости утвержденія, которое они дѣлаютъ совмѣстно? Здѣсь возможны два предположенія: 1) что показаніе вѣрно, 2) что оно не вѣрно. Если оно вѣрно, то вѣроятность, что оба свидѣтеля сдѣлаютъ это показаніе будетъ pp'; если же оно ложно, то вѣроятность, что они оба сдѣлаютъ его, будетъ $(1-p)(1-p')$. Слѣдовательно, по ст. 746 вѣроятности въ пользу правдивости и лживости показанія будутъ соотвѣтственно

$$\frac{pp'}{pp'+(1-p)(1-p')}\text{ и }\frac{(1-p)(1-p'}{pp'+(1-p)(1+p')}.$$

Подобнымъ образомъ, если показаніе сдѣлано будетъ третьимъ лицомъ, вѣроятность правдивости котораго p'', то вѣроятности справедливости или лживости утвержденія ихъ будутъ соотвѣтственно

$$\frac{pp'p''}{pp'p''+(1-p)(1-p')(1-p'')}\text{ и }\frac{(1-p)(1-p')(1-p'')}{pp'p''+(1-p)(1-p')(1-p'')}$$

и такъ далѣе, если большее число лицъ согласны въ показаніяхъ.

753. Сдѣлаемъ нѣсколько замѣчаній по поводу предыдущей статьи.

Когда мы говоримъ, что вѣроятность вѣрности показанія A есть p, то мы подразумѣваемъ, что изъ большого числа показаній, сдѣланныхъ A, число вѣрныхъ показаній относится къ числу невѣрныхъ, какъ p къ $1-p$; такимъ образомъ величина p зависитъ отъ вѣрности сужденія A и отъ его правдивости.

Выводъ ст. 752 даетъ вѣроятность вѣрности показанія, какъ скоро эта вѣрность зависитъ единственно отъ показанія свидѣтелей; но могутъ существовать добавочныя указанія въ пользу или противъ свидѣтельства. Такъ напримѣръ, лицо, оцѣнивающее вѣроятность показанія, само можетъ имѣть болѣе или менѣе рѣшительное убѣжденіе въ пользу показанія, независимо отъ показаній, получаемыхъ имъ отъ

свидѣтелей. Пусть предлагается сочетать это убѣжденіе съ показаніями, разсматриваемыми въ задачѣ. Тогда, если будутъ два свидѣтеля съ вѣроятностями p и p' относительно справедливости показаній и третье лицо оцѣниваетъ вѣроятность справедливости показанія съ степенью p'' изъ своихъ собственныхъ независимыхъ источниковъ довѣрія, въ такомъ случаѣ для него излишекъ въ пользу вѣрности свидѣтельства будетъ равняться отношенію $pp'p''$ къ $(1-p)(1-p')(1-p'')$.

Этотъ результатъ считается нѣкоторыми писателями неудовлетворительнымъ: они основательно возражаютъ противъ такого рѣшенія по существу, что въ немъ опускается всякое разсмотрѣніе того обстоятельства, что всѣ показанія свидѣтелей совпадаютъ. Въ слѣдующей задачѣ это именно обстоятельство и будетъ разсмотрѣно.

754. Два лица, для которыхъ вѣроятность показанія правды представляется соотвѣтственно числами p и p', увѣряютъ, что *данный* билетъ вынутъ изъ мѣшка, содержащаго n билетовъ; требуется опредѣлить вѣроятность справедливости этого увѣренія.

Наблюдаемое событіе здѣсь состоитъ въ совпаденіи показаній A и B въ пользу извѣстнаго билета.

Здѣсь вѣроятность вынутія извѣстнаго билета a priori равняется $\frac{1}{n}$. Вѣроятность наблюдаемаго событія при предположеніи, что извѣстный билетъ, есть $\frac{pp'}{n}$. Вѣроятность наблюдаемаго событія при предположеніи, что онъ не вынутъ, можетъ быть во-первыхъ положена $(1-p)(1-p')\frac{n-1}{n}$; но если данныя лица не имѣютъ никакого побужденія выбирать означенный билетъ изъ числа невынутыхъ, то выраженіе это нужно помножить на $\frac{1}{(n-1)^2}$, представляющее вѣроятность ихъ выбора между невынутыми билетами.

Такимъ образомъ вѣроятность наблюдаемаго событія при второмъ предположеніи будетъ $\frac{(1-p)(1-p')}{n(n-1)}$. Поэтому избытокъ въ пользу справедливости увѣренія выразится отношеніемъ

$$\frac{pp'}{n} \text{ къ } \frac{(1-p)(1-p')}{n(n-1)}, \text{ или } pp' \text{ къ } \frac{(1-p)(1-p')}{n-1}.$$

755. Вопросъ ст. 752 касается правдоподобности *совпаденія* показаній; мы можемъ теперь разсмотрѣть вѣрность свидѣтельства, основаннаго на *преданіи*. A говоритъ, что B утверждаетъ, будто имѣло мѣсто извѣстное событіе. Требуется опредѣлить вѣроятность того, что сказанное событіе имѣло мѣсто. Пусть p и p' вѣроятности показыванія правды A и B соотвѣтственно. Сказанное событіе имѣло мѣсто, если оба они

говорятъ правду или оба лгутъ; и событіе не имѣло мѣста, если только одинъ изъ нихъ говоритъ правду. Такимъ образомъ излишекъ вѣроятности въ пользу того, что событіе имѣло мѣсто, выразится отношеніемъ

$$pp' + (1-p)(1-p') \text{ къ } p(1-p') + p'(1-p).$$

756. Если будетъ n свидѣтелей, каждый изъ которыхъ передавалъ сообщеніе о происшествіи слѣдующему, и если p есть вѣроятность вѣрности показанія каждаго свидѣтеля, то вѣроятность вѣрности ихъ утвержденія относится къ вѣроятности лживости того-же, какъ сумма нечетныхъ членовъ разложенія $(p+q)^n$ къ суммѣ четныхъ членовъ, причемъ q должно положить равнымъ $1-p$ послѣ того, какъ разложеніе будетъ произведено. Дѣйствительно, утвержденіе это вѣрно, если всѣ свидѣтели говорятъ правду или если двое, или четверо, или какое нибудь *четное* число свидѣтелей лгутъ.

757. Положимъ, что извѣстные *доводы* логически основательны и что вѣроятность вѣрности ихъ соотвѣтственныхъ большихъ посылокъ извѣстна; требуется найти вѣроятность спреведливости заключенія. Напримѣръ, предположимъ, что существуетъ три довода и пусть p, p', p'' означаютъ соотвѣтственно вѣроятности ихъ большихъ посылокъ. Заключеніе остается дѣйствительнымъ, если только не всѣ доводы ложны. Вѣроятность, что всѣ они ложны есть $(1-p)(1-p')(1-p'')$; отсюда вѣроятность, что они не всѣ ложны, будетъ $1-(1-p)(1-p')(1-p'')$, что и будетъ такимъ образомъ искомою вѣроятностью.

758. Въ этомъ начальномъ курсѣ Алгебры мы могли дать лишь краткій очеркъ такого обширнаго предмета, какъ Теорія Вѣроятностей. Читатель, подготовленный къ дальнѣйшему изученію вопроса, найдетъ списокъ необходимыхъ книгъ въ статьѣ *Вѣроятность* (*Probability*) въ *English Cyclopoedia* (Англійской Энциклопедіи); къ этому списку можно прибавить сочиненіе профессора Буля *Законы Мышленія* (*Laws of Thought*). Для критическаго разбора первыхъ началъ предмета учащійся можетъ обратиться къ *Формальной Логикѣ* Моргана, гл. IX и X и къ Logic of Chance Венна. Мы можемъ отослать также читателя къ *Исторіи Математ. Теоріи Вѣроятностей отъ временъ Паскаля до временъ Лапласа* (Тотгентера); это сочиненіе познакомитъ читателя съ большинствомъ способовъ и съ каждымъ родомъ вопросовъ, какіе можетъ представить литература предмета.

Примѣры на вычисленіе вѣроятностей.

1. Противъ извѣстнаго событія можно поставить 3 противъ 2, а въ пользу другого, независящаго отъ перваго событія, можно поставить 4 противъ 3. Найти шансы за и противъ того, что они случатся вмѣстѣ.

2. Предполагая, что можно биться объ закладъ 8 противъ 7, что лицо, которому теперь 30 лѣтъ, доживетъ до 60 лѣтъ, и 2 противъ 1, что лицо, имѣющее теперь 40 лѣтъ, доживетъ до 70 лѣтъ, найти вѣроятность, что одно изъ этихъ лицъ останется въ живыхъ черезъ 30 лѣтъ.

3. Общество изъ 23 лицъ садится за круглый столъ; показать, что можно поставить 10 противъ 1, что двое загаданныхъ лицъ не сядутъ рядомъ другъ съ другомъ.

4. Вѣроятность, что A можетъ рѣшить извѣстную задачу равна $\frac{1}{4}$; вѣроятность того-же для B равна $\frac{2}{3}$; найти вѣроятность того, что задача будетъ рѣшена, если они оба примутся за нее.

5. Найти вѣроятность вынутія двухъ черныхъ шаровъ и одного краснаго изъ урны, содержащей пять черныхъ, три красныхъ и два бѣлыхъ шара.

6. Найти вѣроятность, что на одной и той же кости въ два бросанія выпадетъ одно и то-же число очковъ.

7. Найти вѣроятность выпаденія одного какого нибудь числа очковъ по крайней мѣрѣ въ два бросанія одной кости.

8. Найти вѣроятность того, что одно изъ двухъ чиселъ 7 или 11 не выпадетъ при одномъ бросаніи двухъ костей.

9. Въ двухъ кошелькахъ находится по одинаковому числу соверenовъ и по неодинаковому числу шиллинговъ; изъ одного какого нибудь изъ кошельковъ вынимается монета; показать, что въ этомъ случаѣ вѣроятность вынуть соверенъ будетъ больше, чѣмъ въ томъ случаѣ, когда-бы всѣ монеты находились въ одномъ кошелькѣ.

10. Силы четырехъ человѣкъ A, B, C, D представляются соотвѣтственно числами 6, 7, 8, 9; двое изъ нихъ по жребію выбраны и посажены въ весла на одну лодку, а другіе двое—на другую. Найти шансы каждаго изъ нихъ оказаться побѣдителемъ въ состязаніи между лодками.

11. При одномъ бросаніи пары костей найти вѣроятность того, что не выпадетъ ни одно очко, ни одно и то-же число очковъ на обѣихъ костяхъ.

12. Въ лотереѣ имѣется 30 билетовъ, означенныхъ цифрами 1, 2, 3, ..; если требуется вынуть четыре билета, то найти вѣроятность того, что между ними будутъ билеты 1 и 2.

13. A имѣетъ три билета въ лотерею, въ которой всего 9 билетовъ: 3 выигрышныхъ и 6 пустыхъ; B имѣетъ одинъ билетъ въ другой лотереѣ, гдѣ имѣется одинъ выигрышный билетъ и два пустыхъ. Показать, что шансы выигрыша для A относятся къ шансамъ выигрыша для B какъ 16 къ 7.

14. Въ каждомъ изъ двухъ мѣшковъ находится по 4 черныхъ и

по 3 бѣлыхъ шара; кто нибудь вынимаетъ на удачу шаръ изъ перваго мѣшка, и если это будетъ бѣлый шаръ, кладетъ его во второй мѣшокъ и затѣмъ вынимаетъ шаръ изъ этого мѣшка. Найти вѣроятность вынутія двухъ бѣлыхъ шаровъ.

15. Монета бросается послѣдовательно n разъ; найти вѣроятность того, что орелъ выпадетъ нечетное число разъ.

16. Если подбросить n монетъ, то найти вѣроятность того, что только одна изъ монетъ ляжетъ орломъ вверхъ.

17. Предполагая, что англійская палата общинъ состоитъ изъ m торіевъ и изъ n виговъ, найти вѣроятность, что комитетъ изъ $p+q$ членовъ, выбранныхъ по жребію, будетъ состоять изъ p торіевъ и q виговъ.

18. Найти вѣроятность того, что игрокъ выброситъ по одному очку на двухъ костяхъ покрайней мѣрѣ четыре раза при шести бросаніяхъ.

19. Найти вѣроятность выпаденія одного очка на одной кости покрайней мѣрѣ одинъ разъ при шести бросаніяхъ.

20. Если среднимъ числомъ изъ 10 кораблей 9 возвращаются въ портъ невредимыми, то найти вѣроятность того, что изъ 5 ожидаемыхъ кораблей, покрайней мѣрѣ возвратятся три.

21. При трехъ бросаніяхъ пары костей найти вѣроятность выпаденія одинаковаго числа очковъ на обѣихъ костяхъ одинъ или болѣе разъ.

22. Найти вѣроятность выпаденія двухъ шестерокъ одинъ или больше разъ при троекратномъ бросаніи двухъ костей.

23. Въ лотереѣ, содержащей большое число билетовъ, причемъ выигрышные билеты относятся къ пустымъ какъ 1 къ 6, найти вѣроятность вынуть покрайней мѣрѣ 2 выигрышныхъ билета при 5—кратномъ вынниманіи.

24. Если изъ колоды нужно вынуть четыре карты, то найти вѣроятность того, что всѣ онѣ будутъ разныхъ мастей.

25. Если изъ колоды вынимается 4 карты, то найти вѣроятность того, что это будетъ тузъ, двойка, тройка и четверка одной и той-же масти.

26. Если искусство A въ извѣстной игрѣ вдвое больше сравнительно съ B, то можно ставить 131 противъ 112, что A выиграетъ 4 игры, прежде чѣмъ B выиграетъ двѣ.

27. Два лица A и B начинаютъ играть въ извѣстную игру, въ которой умѣнье ихъ играть выражается соотвѣтственно числами 2 и 3. Найти вѣроятность того, что A выиграетъ покрайней мѣрѣ 2 игры изъ 5.

28. Въ мѣшкѣ находятся три бѣлыхъ шара и пять черныхъ, и три

лица вынимаютъ послѣдовательно по шару, причемъ шары не кладутся обратно назадъ, пока не вынется бѣлый шаръ. Показать, что ихъ соотвѣтственныя вѣроятности будутъ относиться какъ 27, 18 и 11.

29. При каждой новой игрѣ вѣроятность въ пользу выигрывшаго предыдущую игру равна отношенію 2 къ 1. Найти вѣроятность того, что выигравшій первую игру, выиграетъ три или болѣе изъ четырехъ игръ сряду.

30. Извѣстная ставка должна быть выиграна тѣмъ, кто первый выброситъ одинъ очекъ на кости съ n гранями. Играющихъ p человѣкъ. Найти шансъ выигрыша для r-аго игрока по порядку.

31. Въ другой комнатѣ находятся 3 связки книгъ, и въ одной изъ связокъ должна быть извѣстная книга. Вѣроятность, что она находится въ извѣстной связкѣ равна $\frac{3}{5}$, но если она не въ этой пачкѣ, то равно вѣроятно, что она будетъ въ той или другой изъ остальныхъ. Если я посылаю за этой пачкой, указывая на ея примѣты и если вѣроятность что мнѣ принесутъ ту связку, на которую я указалъ, равняется $\frac{2}{3}$, то найти вѣроятность того, что я получу желаемую книгу.

32. Въ одномъ кошелькѣ десять монетъ—всѣ двугривенники, кромѣ одной, которая червонецъ; въ другомъ-же кошелькѣ всѣ десять монетъ двугривенники. Изъ перваго кошелька берутъ 9 монетъ и кладутъ во второй, а затѣмъ берутъ 9 монетъ изъ второго и кладутъ ихъ въ первый. Послѣ этого предлагаютъ кому нибудь взять тотъ кошелекъ, который ему угодно. Найти, какой изъ кошельковъ онъ выберетъ.

33. Одна урна содержитъ 5 бѣлыхъ и 5 черныхъ шаровъ; въ другой урнѣ 10 бѣлыхъ и 10 черныхъ шаровъ; одинъ шаръ, цвѣтъ котораго неизвѣстенъ, вынутъ изъ одной урны, но изъ которой—неизвѣстно, и положенъ въ другую. Теперь, если вынимается шаръ изъ которой нибудь урны по произволу, то какова будетъ вѣроятность вынуть бѣлый шаръ?

34. Найти вѣроятность выпаденія 15 очковъ въ одно бросанье на 3 костяхъ.

35. Найти вѣроятность выпаденія 17 очковъ въ одно бросанье на 3 костяхъ.

36. Найти вѣроятность выпаденія не больше 10 очковъ на 3 костяхъ.

37. Когда бросаются $2n$ костей, то доказать, что сумма чиселъ, обращенныхъ вверхъ, съ большею вѣроятностью будетъ $7n$, чѣмъ другое какое нибудь число.

38. Когда бросаются $2n+1$ костей, то доказать, что вѣроятность того, что сумма чиселъ, обращенныхъ вверхъ, будетъ $7n+4$, равняется вѣроятности того, что сумма обращенныхъ вверхъ чиселъ будетъ $7n+3$,

и что эта вѣроятность больше вѣроятности того, что названная сумма будетъ какимъ нибудь другимъ числомъ.

39. Изъ ряда карточекъ, означенныхъ нумерами отъ 1 до 10, вынимается одна и кладется снова; послѣ десяти такихъ вынниманій, какова будетъ вѣроятность того, что сумма вынутыхъ чиселъ будетъ равняться 24?

40. Жетоны, означенные нумерами 0, 1, 2, ... n, положены въ ящикъ; послѣ вынутія каждый вынутый жетонъ кладется снова въ ящикъ. Найти вѣроятность, что m вынниманій дадутъ жетонъ, означенный нумеромъ s.

41. Изъ 10 билетовъ пять обозначены нумерами 1, 2, 3, 4, 5, а остальные не обозначены ничѣмъ; найти вѣроятность вынуть 10 въ три пріема, если вынутые билеты кладутся обратно.

42. Найти вѣроятность въ предыдущемъ примѣрѣ, если билеты не кладутся обратно.

43. Изъ мѣшка, содержащаго n шаровъ, нужно вынуть p шаровъ, положить ихъ обратно и затѣмъ вынуть q шаровъ. Показать, что вѣроятность того, что r шаровъ будутъ одни и тѣ-же въ обоихъ случаяхъ, равняется

$$\frac{\lfloor\underline{p}\ \lfloor\underline{q}\ \lfloor\underline{n-p}\ \lfloor\underline{n-q}}{\lfloor\underline{n}\ \lfloor\underline{r}\ \lfloor\underline{p-r}\ \lfloor\underline{q-r}\ \lfloor\underline{n-p-q+r}}.$$

44. Восемь одинаково искусныхъ игроковъ въ шахматы выбираются партнерами по жребію и играютъ четыре игры; четверо игроковъ вынимаютъ вновь жребій и играютъ двѣ игры, и двое игроковъ изъ этихъ играютъ послѣднюю игру. Найти вѣроятность того, что два намѣченные игрока будутъ играть вмѣстѣ.

45. Въ мѣшкѣ m бѣлыхъ и n черныхъ шаровъ. Найти вѣроятность вынуть сперва бѣлый, потомъ черный шаръ, и такъ далѣе попеременно, пока всѣ остальные шары не будутъ одинаковаго цвѣта.

Если вынуть сразу m шаровъ, то найти вѣроятность вынуть всѣ бѣлые шары сразу.

46. Въ мѣшкѣ находится n шаровъ m разныхъ цвѣтовъ, причемъ p_1 шаровъ одного цвѣта, p_2—другого... p_m—m-аго цвѣта. Если шары вынимать одинъ за другимъ, то найти вѣроятность того, что вынутся сперва всѣ шары одного цвѣта, затѣмъ всѣ шары другого цвѣта, и такъ далѣе и наконецъ всѣ шары m-аго цвѣта.

47. Въ мѣшкѣ находится n шаровъ; вынимаютъ одинъ шаръ и кладутъ обратно, что дѣлается n разъ; найти вѣроятность того, что въ рукѣ вынимающаго перебываютъ всѣ шары, содержащіеся въ мѣшкѣ.

48. Двое одинаково искусныхъ игроковъ A и B играютъ рядъ игръ. Для окончанія игры A нужно выиграть 2 партіи, а B—3 партіи. Сравнить шансы A и B выиграть игру.

49. Если три лица обѣдаютъ вмѣстѣ, то найти, сколькими различными способами они могутъ сѣсть рядомъ. Когда они обѣдаютъ въ точности столько разъ, занимая мѣста случайно, то найти вѣроятность того, что они будутъ сидѣть, размѣщаясь всѣми возможными способами.

50. Дано число N, и предлагается выбрать какое угодно меньшее число на удачу. Найти вѣроятность, что выбранное число окажется дѣлителемъ числа N.

51. Изъ мѣшка съ пулями берутъ ихъ горсть, сколько попадетъ; найти вѣроятность того, что число пуль въ горсти будетъ первое съ числомъ пуль въ мѣшкѣ. Положимъ напримѣръ, что число пуль въ мѣшкѣ 105.

52. Если $n=a^r$, и если взять на удачу какое нибудь число не больше чѣмъ n, то вѣроятность того, что оно содержитъ въ себѣ a множителемъ s разъ, и не больше, равна $\frac{1}{a^s}-\frac{1}{a^{s+1}}$.

53. Два лица играютъ въ нѣкоторую игру, не могущую кончиться розыгрышемъ, и условились продолжать играть до тѣхъ поръ, пока тотъ или другой изъ нихъ не выиграютъ двухъ игръ сряду. Если дана вѣроятность того, что одинъ изъ нихъ выиграетъ одну партію, то найти вѣроятность того, что онъ выиграетъ игру при упомянутыхъ условіяхъ. Напримѣръ, если шансы его за и противъ выигрыша одной партіи будутъ 2 и 1, то вѣроятность, что онъ выиграетъ игру будетъ $^{16}|_{21}$, т. е. 16—за и 5 противъ.

54. Имѣется двѣ кости: одна правильный тетраедръ, другая правильный октаедръ. Найти вѣроятность, что при одномъ метаніи сумма выпавшихъ очковъ будетъ больше 6.

55. Ожидаются три независимыя событія, вѣроятности которыхъ соотвѣтственно выражаются чрезъ p_1, p_2, p_3; найти вѣроятность того, что случится покрайней мѣрѣ одно изъ этихъ событій; а такъ-же вѣроятность, что случатся покрайней мѣрѣ два событія.

56. Извѣстная сумма денегъ будетъ получена тѣмъ изъ трехъ игроковъ A, B, C, кто первый выброситъ 10 очковъ на трехъ костяхъ; предполагая, что они бросаютъ кости послѣдовательно другъ за другомъ въ азбучномъ порядкѣ, пока не случится упомянутаго выпаденія, найти вѣроятности полученія денегъ каждымъ изъ нихъ.

57. Десятичныя части логариѳмовъ двухъ чиселъ, взятыхъ на удачу, выписываются изъ семизначныхъ таблицъ; найти вѣроятность того, что вторая мантисса можетъ быть вычтена изъ первой, цифра изъ цифры, безъ *заниманія* единицъ высшаго разряда.

58. A берется двумя костями выбросить 6 очковъ раньше чѣмъ B выброситъ 7; они бросаютъ поочередно, причемъ A начинаетъ. Сравнить ихъ шансы.

59. Нѣкто получилъ позволеніе вынуть двѣ монеты изъ кошелька, содержащаго четыре соверена и четыре шиллинга; найти выраженіе для его ожиданія (соверенъ = 20 шиллинговъ).

60. Въ мѣшокъ положено шесть червонцевъ, шесть двугривенниковъ и шесть копѣечныхъ монетъ; найти величину ожиданія.

61. Въ портѣ ожидается прибытіе 10 русскихъ, 12 французскихъ и 14 англійскихъ кораблей. Найти, какъ велико ожиданіе купца, который долженъ пріобрѣсть 2100 рублей, если одинъ изъ первыхъ двухъ прибывшихъ кораблей будетъ русскій, а другой французскій?

62. Изъ мѣшка, содержащаго 3 червонца, 2 двугривенныхъ и 4 копѣйки, нѣкто вынимаетъ три монеты, какія попадутся; найти величину его ожиданія (червон. = 10 р.).

63. Найти цѣну лотерейнаго билета въ лотереѣ, въ которой имѣется 100 билетовъ и назначается 4 выигрыша по 100 рублей, 10 выигрышей по 50 р. и 20 выигрышей по 5 рублей.

64. Въ мѣшкѣ находится 9 монетъ, изъ которыхъ пять англійскіе фунты стерлинговъ, а остальныя 4 другія монеты равной взаимной цѣнности; найти какой цѣнчости эти монеты должны быть, чтобы ожиданіе вынуть двѣ монеты изъ мѣшка имѣло цѣнность 24 шиллинговъ. (Отношеніе фунта къ шиллингу равно 20).

65. Изъ мѣшка, содержащаго 4 монеты по 1 шиллингу, три неизвѣстныя серебряныя англійскія монеты одинаковой цѣнности и одну неизвѣстную золотую англійскую монету, нужно вынуть четыре монеты. Если величина ожиданія вынимающаго равна 15 шиллингамъ, то найти цѣнность каждой изъ неизвѣстныхъ монетъ въ шиллингахъ.

66. *A* и *B* ставятъ извѣстную сумму денегъ, которую долженъ выиграть тотъ, у кого въ первый разъ выпадетъ орелъ при бросаніи монеты, причемъ игру начинаетъ *A*. Въ какомъ отношеніи должны быть ихъ ставки? Если они ставятъ поровну, то сколько долженъ одинъ изъ нихъ дать другому за право бросать монету первому?

67. Въ мѣшкѣ находится нѣсколько жетоновъ, изъ которыхъ одинъ означенъ цифрой 1, два—цифрой 2, три—цифрой 3, ... r означены цифрой r; данное лицо вынимаетъ на удачу нѣсколько жетоновъ и получаетъ за это столько рублей, сколько показываетъ его цифра. Найти величину ожиданія этого лица.

68. Въ мѣшкѣ нѣсколько билетовъ, изъ которыхъ одинъ означенъ нумеромъ 1, четыре—нумеромъ 2, девять—нумеромъ 3 и т. д. до r^2, означенныхъ нумеромъ r. Предлагается вынуть изъ мѣшка одинъ билетъ, за который вынимающій получаетъ столько рублей, сколько единицъ въ нумерѣ билета. Найти величину ожиданія вынимающаго.

69. Нѣкто долженъ получить извѣстное число рублей; онъ знаетъ

что цифры этого числа 1, 2, 3, 4, 5, но ему неизвѣстенъ порядокъ, въ которомъ стоятъ эти цифры. Найти величину его ожиданія.

70. Изъ мѣшка, содержащаго a жетоновъ, изъ которыхъ иные означены нумерами, нужно вынуть b жетоновъ, причемъ вынимающій получитъ число рублей, равное суммѣ нумеровъ на вынутыхъ жетонахъ; если сумма нумеровъ на всѣхъ жетонахъ n, то найти величину ожиданія вынимающаго.

71. Изъ двухъ урнъ одна содержитъ 8 бѣлыхъ шаровъ и 4 черныхъ а другая содержитъ 12 черныхъ шаровъ и 4 бѣлыхъ. Изъ одной урны, но неизвѣстно—изъ которой, вынимается одинъ шаръ, оказывающійся бѣлымъ. Найти вѣроятность того, что онъ вынутъ изъ урны, содержащей 8 бѣлыхъ шаровъ.

72. Въ мѣшкѣ находятся пять шаровъ, причемъ неизвѣстно, сколько изъ нихъ бѣлыхъ; но два изъ нихъ по вынутіи оказались бѣлыми. Найти вѣроятность того, что всѣ они—бѣлые.

73. Въ кошелькѣ имѣется n монетъ, но неизвѣстно, сколько изъ нихъ рублей; вынутая монета оказалась рублемъ; найти вѣроятность того, что это былъ единственный рубль.

74. Въ мѣшкѣ 4 бѣлыхъ и 4 черныхъ шара; изъ нихъ вынимаютъ на удачу два, и не смотря на нихъ, кладутъ въ другой меньшій мѣшокъ; затѣмъ изъ послѣдняго мѣшка вынимаютъ одинъ шаръ—оказывается, что онъ бѣлый; его кладутъ обратно въ маленькій мѣшокъ и снова вынимаютъ одинъ шаръ—опять оказывается, что онъ бѣлый. Найти вѣроятность того, что оба шара въ маленькомъ мѣшкѣ бѣлые.

75. Изъ двухъ кошельковъ одинъ сначала заключалъ въ себѣ 25 золотыхъ монетъ, а другой—10 золотыхъ и 15 серебряныхъ; берутъ на удачу одинъ изъ кошельковъ и вынимаютъ изъ него 4 монеты, которыя оказываются золотыми. Найти вѣроятность того, что въ этомъ кошелькѣ всѣ монеты золотыя и опредѣлить величину ожиданія для слѣдующей, вынимаемой изъ этого кошелька монеты, принимая за единицу золотую монету и считая отношеніе цѣнностей золотой и серебряной монетъ $=20$.

76. Въ мѣшкѣ заключается три банковыхъ билета, и извѣстно, что въ немъ могутъ быть билеты въ 5, или въ 10, или въ 20 фунтовъ стерлинговъ. Три раза одинъ за другимъ—причемъ билеты клались обратно въ мѣшокъ—вынимался билетъ въ 5 фунтовъ. Найти вѣроятную цѣнность содержимаго въ мѣшкѣ.

77. Существуетъ 3 шанса за и 1 противъ того, что A говоритъ правду, 4 за и 1 противъ того, что B говоритъ правду и 6 за и 1 противъ того, что C говоритъ правду. Найти вѣроятность того, что произошло событіе, утверждаемое показаніями A и B и отрицаемое показаніемъ C.

78. A говоритъ правду 3 раза изъ 4, а B то-же 4 разъ изъ 5; оба они согласно утверждаютъ, что изъ мѣшка, содержащаго 9 шаровъ, всѣ различнаго цвѣта, былъ вынутъ бѣлый шаръ. Показать, что вѣроятность истины ихъ утвержденія равна $\frac{96}{97}$.

79. Положимъ, что тринадцать свидѣтелей, каждый изъ которыхъ дѣлаетъ одно невѣрное показаніе изъ одиннадцати, утверждаютъ, что произошло извѣстное событіе; показать, что вѣроятность истины ихъ показанія равна $^{10}/_{11}$, если даже вѣроятность этого событія сама по себѣ меньше $\frac{1}{10^{12}+1}$.

80. Одна карта изъ колоды въ 52 карты отброшена; изъ оставшихся картъ вынимаютъ двѣ, которыя оказываются пиковками; найти вѣроятность того, что отброшенная раньше карта то-же пиковка.

81. Два человѣка ходятъ по одной дорогѣ въ противоположномъ направленіи втеченіи $a+b+c$ минутъ, причемъ одинъ оканчиваетъ путь въ a минутъ, а другой—въ b минутъ; найти вѣроятность ихъ встрѣчи.

82. Найти, сколько нечетныхъ чиселъ, взятыхъ наудачу, должны быть перемножены между собою, чтобы могъ быть по крайней мѣрѣ какой нибудь четный шансъ въ пользу того, что послѣдняя цифра будетъ 5. Дано, что $\log_{10}2=0.30103$.

ГЛАВА LIV.

Различныя уравненія.

759. Можно предложить такія уравненія, которыя требуютъ особыхъ искусственныхъ пріемовъ для ихъ рѣшенія; въ нижеслѣдующемъ подборѣ примѣровъ читатель найдетъ большой матеріалъ для упражненія, причемъ пусть онъ предварительно самъ попытается рѣшать предлагаемыя уравненія, и только послѣ этого справится съ даннымъ здѣсь рѣшеніемъ.

1. $$\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3}.$$

Здѣсь $$x+1+\frac{1}{x+1}+x+4+\frac{4}{x+4}=x+2+\frac{2}{x+2}+x+3+\frac{3}{x+3},$$

или $\frac{1}{x+1}+\frac{4}{x+4}=\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}$, т.-е. $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+2}=\frac{3}{x+3}-\frac{4}{x+4}$,

слѣдовательно $-\frac{x}{x^2+3x+2}=-\frac{x}{x^2+7x+12}$; откуда

или $x=0$, или $x^2+3x+2=x^2+7x+12$; изъ послѣдняго находимъ

$$4x=-10, \text{ и значитъ } x=-2\tfrac{1}{2}.$$

2. $$\frac{1}{(x+a)^2-b^2}+\frac{1}{(x+b)^2-a^2}=\frac{1}{x^2-(a+b)^2}+\frac{1}{x^2-(a-b)^2}.$$

Здѣсь $\frac{1}{x+a+b}\left\{\frac{2x}{x^2-(a-b)^2}\right\}=\frac{1}{x^2-(a+b)^2}+\frac{1}{x^2-(a-b)^2}$;

слѣдовательно $\frac{1}{x+a+b}\cdot\frac{x-(a+b)}{x^2-(a-b)^2}=\frac{1}{x^2-(a+b)^2}$, а потому

$\frac{x-(a+b)}{x^2-(a+b)^2}=\frac{1}{x-(a+b)}$; откуда $\{x-(a+b\}^2=x^2-(a-b)^2$;

слѣдовательно $2x(a+b)=(a+b)^2+(a-b)^2$; откуда $x=\frac{a^2+b^2}{a+b}$.

3. $$\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right).$$

Здѣсь $3\left(\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}\right)=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$; означимъ $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}$ чрезъ y; тогда

$$3\left(y^2+\frac{8}{3}\right)=10y, \text{ такъ что } y^2-\frac{10y}{3}+\frac{25}{9}=\frac{1}{9},$$

слѣдовательно $y=2$, или $\frac{4}{3}$; а потому $x^2-12=6x$ или $4x$;

и слѣдовательно $x=6$, или -2, или $3\pm\sqrt{(21)}$.

4. $$\frac{(5x^4+10x^2+1)(5a^4+10a^2+1)}{(x^4+10x^2+5)(a^4+10a^2+5)}=ax.$$

Здѣсь $$\frac{5x^4+10x^2+1}{x^5+10x^3+5x}=\frac{a^5+10a^3+5a}{5a^4+10a^2+1}.$$

Складывая и вычитая числитель и знаменатель обѣихъ дробей, мы получимъ

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^5=\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^5;$$

слѣдовательно $\frac{x+1}{x-1}=\frac{1+a}{1-a}$, а потому $x=\frac{1}{a}$.

5. $$(x-1)^3+(2x+3)^3=27x^3+8.$$

Такъ какъ $(x-1)+(2x+3)=3x+2$, то раздѣливъ обѣ части на $3x+2$, изъ котораго для одного значенія x получается $x=-\frac{2}{3}$; мы получимъ

$$(x-1)^2-(x-1)(2x+3)+(2x+3)^2=9x^2-6x+4;$$

то-есть $$3x^2+9x+13=9x^2-6x+4,$$

слѣдовательно $$6x^2-15x=9;$$

а потому $$x^2-\frac{5x}{2}+\frac{25}{16}=\frac{25}{16}+\frac{3}{2}=\frac{49}{16};$$

слѣдовательно $x-\frac{5}{4}=\pm\frac{7}{4}$; откуда $x=3$, или $-\frac{1}{2}$.

6. $$31\left\{\frac{24-5x}{x+1}+\frac{5-6x}{x+4}\right\}+370=29\left\{\frac{17-7x}{x+2}+\frac{8x+55}{x+3}\right\}.$$

Здѣсь $$31\left\{\frac{24-5x}{x+1}+\frac{5-6x}{x+4}+11\right\}=29\left\{\frac{17-7x}{x+2}+\frac{8x+55}{x+3}-1\right\},$$

или $$31\left\{\frac{24-5x}{x+1}+5+\frac{5-6x}{x+4}+6\right\}=29\left\{\frac{17-7x}{x+2}+7+\frac{8x+55}{x+3}-8\right\},$$

слѣдовательно $$31\left\{\frac{29}{x+1}+\frac{29}{x+4}\right\}=29\left\{\frac{31}{x+2}+\frac{31}{x+3}\right\},$$

или $$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3};$$

или $$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4},$$

слѣдовательно $(x+1)(x+2)=(x+3)(x+4)$; откуда

$$3x+2=7x+12;$$

поэтому $4x=-10$ и наконецъ $x=-2\frac{1}{2}$.

7. $$\frac{1}{5}\frac{(x+1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}+\frac{1}{9}\frac{(x+3)(x-5)}{(x+4)(x-6)}-\frac{2}{13}\frac{(x+5)(x-7)}{(x+6)(x-8)}=\frac{92}{585}.$$

Очевидно, что числитель и знаменатель каждой дроби заключаютъ въ себѣ выраженіе x^2-2x; положимъ поэтому $(x-1)^2=y$; тогда уравненіе будетъ

$$\frac{1}{5}\frac{y-4}{y-9}+\frac{1}{9}\frac{y-16}{y-25}-\frac{2}{13}\frac{y-36}{y-49}=\frac{92}{585}.$$

Но $$\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{2}{13}=\frac{92}{585};$$

вычитая соотвѣтствующіе члены, будемъ имѣть

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{y-9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{9}{y-25}-\frac{2}{13}\cdot\frac{13}{y-49}=0,$$

то-есть $$\frac{1}{y-9}+\frac{1}{y-25}-\frac{2}{y-49}=0;$$

слѣдовательно $$\frac{1}{y-9}-\frac{1}{y-49}=\frac{1}{y-49}-\frac{1}{y-25};$$ то-есть

$$\frac{-40}{y-9}=\frac{24}{y-25};$$

слѣдовательно $3(y-9)+5(y-25)=0$, или $8y=152$,

откуда $y=19$ и $x=1\pm\sqrt{(19)}$.

8. $$x\frac{x+3a}{c+3x}=\sqrt{(ac)}\frac{a+3x}{x+3c}.$$

Здѣсь $$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{x+3a}{a+3x}=\frac{c^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{c+3x}{x+3c},$$ т.-е. $$\frac{x^{\frac{3}{2}}+3ax^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+3a^{\frac{1}{2}}x}=\frac{c^{\frac{3}{2}}+3c^{\frac{1}{2}}x}{x^{\frac{3}{2}}+3cx^{\frac{1}{2}}}.$$

Складывая и вычитая числитель и знаменатель каждой дроби, получимъ $$\frac{(x^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}})^3}{(x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}})^3}=\frac{(c^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})^3}{(c^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}})^3};$$ слѣдовательно

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}=\frac{c^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}};$$ откуда $$\frac{x}{a}=\frac{c}{x};$$

слѣдовательно $$x=\pm\sqrt{(ac)}.$$

9. $$(x+a)\left(1+\frac{1}{x^2+a^2}\right)+\sqrt{(2ax)}\left(1-\frac{1}{x^2+a^2}\right)=2.$$

Здѣсь $$\{x+\sqrt{(2ax)}+a\}+\frac{x-\sqrt{(2ax)}+a}{x^2+a^2}=2,$$

слѣдовательно $$x+\sqrt{(2ax)}+a+\frac{1}{x+\sqrt{(2ax)}+a}=2;$$ откуда

$$\{x+\sqrt{(2ax)}+a\}^2-2\{x+\sqrt{(2ax)}+a\}+1=0,$$

слѣдовательно $$x+a+\sqrt{(2ax)}=1;$$

а потому $$(x+a)^2-2(x+a)+1=2ax;$$

откуда $$x^2-2x+1=2a-a^2,$$

и наконецъ $$x=1\pm\sqrt{(2a-a^2)}.$$

10. $$(x+a)(x+2a)(x-3a)(x-4a)=c^4.$$

Здѣсь $$(x+a)(x-3a)(x+2a)(x-4a)=c^4,$$

то-есть $$(x^2-2ax-3a^2)(x^2-2ax-8a^2)=c^4.$$

Положимъ $x^2-2ax=ya^2$; тогда $(y-3)(y-8)=\frac{c^4}{a^4}$.

слѣдовательно $y^2-11y+\frac{121}{4}=\frac{c^4}{a^4}+\frac{25}{4}$; откуда

$$y=\frac{11}{2}\pm\frac{(4c^4+25a^4)^{\frac{1}{2}}}{2a^2};$$

и слѣдовательно $x^2-2ax=\frac{11a^2}{2}\pm\frac{(4c^4+25a^4)^{\frac{1}{2}}}{2}$, откуда

$$x=a\pm\sqrt{\left\{\frac{13a^2}{2}\pm\frac{(4c^4+25a^4)^{\frac{1}{2}}}{2}\right\}}.$$

11. $$\frac{1}{6x^2-7x+2}+\frac{1}{12x^2-17x+6}=8x^2-6x+1.$$

Здѣсь $\frac{1}{(2x-1)(3x-2)}+\frac{1}{(3x-2)(4x-3)}=(2x-1)(4x-1)$, или

$$\frac{1}{3x-2}\times\frac{6x-4}{(2x-1)(4x-3)}=(2x-1)(4x-1);$$

слѣдовательно $2=(2x-1)^2(4x-1)(4x-3)$

$=(2x-1)^2\{2(2x-1)+1\}\{2(2x-1)-1\}$.

Пусть $y=2x-1$; тогда

$$y^2(4y^2-1)=2;$$

слѣдовательно $y^4-\frac{y^2}{4}+\frac{1}{64}=\frac{1}{64}+\frac{2}{4}=\frac{33}{64}$;

откуда $y^2=\frac{1}{8}(1\pm\sqrt{33})$;

а слѣдовательно $x=\frac{1+y}{2}=\frac{1}{2}\left[1\pm\sqrt{\left\{\frac{1}{8}(1\pm\sqrt{33})\right\}}\right]$.

12. $$\left(\frac{x+6}{x-6}\right)\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2+\left(\frac{x-6}{x+6}\right)\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2=2\frac{x^2+36}{x^2-36}.$$

Здѣсь $\frac{x+6}{x-6}\left(\frac{x-4}{x+4}\right)+\frac{x-6}{x+6}\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2=\frac{x+6}{x-6}+\frac{x-6}{x+6}$;

слѣдовательно $\frac{x-6}{x+6}\left\{\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2-1\right\}=\frac{x+6}{x-6}\left\{1-\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2\right\}$; то-есть

$$\frac{x-6}{x+6}\times\frac{36x}{(x-9)^2}=\frac{x+6}{x-6}\,\frac{16x}{(x+4)^2};$$

а потому одно изъ значеній будетъ $x=0$; а для другихъ значеній мы будемъ имѣть уравненіе

$\left(\frac{x-6}{x+6}\right)^2=\frac{16}{36}\left(\frac{x-9}{x+4}\right)^2$, слѣдовательно $\frac{x-6}{x+6}=\pm\frac{2x-9}{3x+4}$;

слѣдовательно $3(x^2-2x-24)=\pm 2(x^2-3x-54)$;

а эти квадратныя уравненія могутъ быть рѣшены обыкновеннымъ способомъ.

13. $$\frac{x^2+2ax+ac}{x^2+2cx+ac}=\frac{ax}{(x+a)(x+c)}.$$

Положимъ $(x+a)(x+c)=xy$; тогда $\frac{x^2+2ax+ac}{x^2+2cx+ac}=\frac{a}{y}$; поэтому

$$\frac{2(x^2+ax+cx+ac)}{2x(a-c)}=\frac{a+y}{a-y}, \text{ или } \frac{(x+a)(x+c)}{x(a-c)}=\frac{a+y}{a-y};$$

и такъ $\frac{y}{a-c}=\frac{a+y}{a-y}$; слѣдовательно $y^2-yc=ac-a^2$;

слѣдовательно $y=\frac{1}{2}c\pm\frac{1}{2}\sqrt{(c^2+4ac-4a^2)}=\alpha$ (положимъ);

тогда $x^2+x(a+c)+ac=x\alpha$,

откуда $x^2+x(a+c-\alpha)=-ac$;

а слѣдовательно $x=-\frac{a+c-\alpha}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\{a+c-\alpha)^2-4ac\}}$.

14. $$2(x+a)(x+c)+(a-c)^2=\frac{(x+c)^4}{c(2x+a+c)}.$$

Здѣсь $$(x+a)^2+(x+c)^2=\frac{(x+c)^4}{c\{(x+a)+(x+c)\}}.$$

Положимъ $$x+a=y(x+c). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha);$$

тогда $$y^2+1=\frac{x+c}{c(y+1)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta).$$

Изъ (α) находимъ $x+c+a-c=y(x+c)$,

слѣдовательно $x+c=\frac{a-c}{y-1}$;

поэтому (β) обратится въ $y^2+1=\frac{a-c}{c}\cdot\frac{1}{y^2-1}$;

откуда $y^4=\frac{a-c}{c}+1=\frac{a}{c}$; слѣдовательно $y=\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{4}}$;

а потому $x=\frac{yc-a}{1-y}=\frac{a^{\frac{1}{4}}c-ac^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{4}}}=(ac)^{\frac{1}{4}}\frac{a^{\frac{3}{4}}-c^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-c^{\frac{1}{4}}}$.

15. $$\frac{(x+a+b)^5+(x+c+d)^5}{(x+a+c)^5+(x+b+d)^5}=\frac{m}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Положимъ $\left.\begin{aligned} a+b&=\alpha+\beta \\ c+d&=\alpha-\beta \end{aligned}\right\}$; слѣдовательно $\alpha=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$,
$\beta=\frac{1}{2}(a+b-c-d)$,

$\left.\begin{aligned} a+c&=\alpha_1+\beta_1 \\ b+d&=\alpha_1-\beta_1 \end{aligned}\right\}$; слѣдовательно $\alpha_1=\frac{1}{2}(a+b+c+d)=\alpha$,
$\beta_1=\frac{1}{2}(a-b+c-d)$.

Слѣдовательно, полагая $x+\alpha=y$, мы можемъ привести (1) къ виду

$$\frac{(y+\beta)^5+(y-\beta)^5}{(y+\beta_1)^5+(y-\beta_1)^5}=\frac{m}{n} \text{ или } \frac{y^5+10y^3\beta^2+5y\beta^4}{y^5+10y^3\beta_1{}^2+5y\beta_1{}^4}=\frac{m}{n},$$

или $$y^4(n-m)+10y^2(n\beta^2-m\beta_1{}^2)=5(m\beta_1{}^4-n\beta^4). \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

которое приводится къ обыкновенному квадратному уравненію.

Если $\frac{m}{n}=\frac{\beta^2}{\beta_1{}^2}=\frac{(a+b-c-d)^2}{(a-b+c-d)^2}$, то уравненіе (2) приметъ видъ

$y^4=5\beta^2\beta_1{}^2$; слѣдовательно $y=(5)^{\frac{1}{4}}(\beta\beta_1)^{\frac{1}{2}}$, или

$$x=y-\alpha=\tfrac{1}{2}[5^{\frac{1}{4}}\sqrt{\{(a-d)^2-(b-c)^2\}}-(a+b+c+d)].$$

16. $$x^2+a^2+y^2+b^2=\sqrt{2}\{x(a+y)-b(a-y)\}.$$
$$x^2-a^2-y^2+b^2=\sqrt{2}\{x(a-y)+b(a+y)\}.$$

Складывая и вычитая, получимъ

$$x^2+b^2=\sqrt{2}(ax+by) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$
$$y^2+a^2=\sqrt{2}(xy-ab);$$

перемножимъ ихъ между собою:

$$(x^2+b^2)(y^2+a^2)=2(ax+by)(xy-ab)$$

или $$(ax+by)^2+(xy-ab)^2=2(ax+by)(xy-ab);$$

слѣдовательно $ax+by=xy-ab$; откуда $y=a\frac{x+b}{x-b}$.

Подставивъ это въ (α), найдемъ

$$x^2+b^2=a\sqrt{2}\left\{x+\frac{bx+b^2}{x-b}\right\}=a\sqrt{2}\frac{x^2+b^2}{x-b};$$

слѣдовательно, пренебрегая невозможнымъ корнемъ, найдемъ $x-b=a\sqrt{2}$;

слѣдовательно $x=a\sqrt{2}+b$ и $y=a\frac{x+b}{x-b}=b\sqrt{2}+a$.

17. $$(x^2+y^2+c^2)^{\frac{1}{3}}+(x-y+c)^{\frac{2}{3}}=2(4xy)^{\frac{1}{3}} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$\frac{1}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Такъ какъ $(x-y+c)^2=x^2+y^2+c^2-2xy+2xc-2yc$,

а изъ (2) $xc-xy-yc=0$. . . . . (α)

то слѣдовательно $(x-y+c)^2=x^2+y^2+c^2$;

слѣдовательно (1) обратится въ $(x-y+c)^2=4xy=4c(x-y)$, если принять во вниманіе (α); поэтому

$$(x-y-c)^2=0, \text{ откуда } y=x-c,$$

но $y=\frac{cx}{x+c}$; слѣдовательно $x^2-c^2=cx$; а потому $x^2-cx+\frac{c^2}{4}=\frac{5c^2}{4}$;

слѣдовательно $x=\frac{c}{2}(1\pm\sqrt{5})$ и $y=\frac{c}{2}(-1\pm\sqrt{5})$.

18. $2(x^2+xy+y^2-a^2)+\sqrt{3}(x^2-y^2)=0$. . . . (1),

$2(x^2-xz+z^2-b^2)+\sqrt{3}(x^2-z^2)=0$ . . . (2),

$y^3-c^3+3(yz^2-c^3)=0$ . . . (3).

Умноживъ (1) на (2) найдемъ,

$$3(x+y)^2+(x-y)^2+2\sqrt{3}(x^2-y^2)=4a^2;$$

откуда $\sqrt{3}(x+y)+x-y=\pm 2a$.

Подобнымъ-же образомъ изъ (2)

$$\sqrt{3}(x-z)+x+z=\pm 2b.$$

Вычитая, мы получимъ въ лѣвой части $(\sqrt{3}-1)(y+z)$, а въ правой части $\pm 2(a-b)$ или $\pm 2(a+b)$; такимъ образомъ мы получаемъ четыре значенія для $y+z$; выберемъ одно изъ нихъ и означимъ его черезъ m.

Изъ (3) $2y^3+6yz^2=8c^3$, то-есть $(y+z)^3+(y-z)^3=8c^3$;

отсюда $(y-z)^3=8c^3-m^3$, поэтому $y-z=(8c^3-m^3)^{\frac{1}{3}}$;

слѣдовательно $y=\frac{1}{2}\{m+(8c^3-m^3)^{\frac{1}{3}}\}$ и $z=\frac{1}{2}\{m-(8c^3-m^3)^{\frac{1}{3}}\}$.

А потому $x\{\sqrt{3}+1\}=\pm 2a-y\{\sqrt{3}-1\}$

$$=\pm 2a-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\{m+(8c^3-m^3)^{\frac{1}{3}}\};$$

такимъ образомъ x становится извѣстнымъ.

19. $3x+3y-z=3$ . . . . . (1)

$x^2+y^2-z^2=\frac{14-9z}{2}$ . . . . . (2)

$x^3+y^3+z^3=3xyz+\frac{17z+44}{4}$ . . . . . (3)

Изъ (1) $3(x+y+z)=4z+3$ . . . . . (α)

Изъ (2) $x^2+y^2+z^2=2z^2+7-\frac{9z}{2}$. . . . . ($\beta$)

Изъ (3) $$2(x^3+y^3+z^3-3xyz)=\frac{17z+44}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

Затѣмъ, умножая (α) на (β) и вычитая отсюда (γ), найдемъ

$$x^3+y^3+z^3+3(x^2y+xy^2+xz^2+x^2z+y^2z+yz^2)+6xyz$$
$$=8z^3-12z^2+6z-1;$$

или $$(x+y+z)^3=(2z-1)^3;$$

слѣдовательно $$x+y=z-1.$$

Изъ (1) $x+y=\frac{z}{3}+1$; слѣдовательно $z-1=\frac{z}{3}+1$; откуда $z=3$; слѣдовательно $x+y=2$, $x^2+y^2=z^2+\frac{14-9z}{2}=\frac{5}{2}$; отсюда

$2(x^2+y^2)-(x+y)^2=5-4=1$; слѣдовательно $x-y=\pm 1$;

такимъ образомъ $x=1^1|_2$ или $^1|_2$ и $y=^1|_2$ или $1^1|_2$

20. $$\frac{(ac+1)(x^2+1)}{x+1}=\frac{(a^2+1)(xy+1)}{y+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\frac{(ac+1)(y^2+1)}{y+1}=\frac{(c^2+1)(xy+1)}{x+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Изъ (2) $$\frac{x^2+1}{xy+1}=\frac{x+1}{y+1}\cdot\frac{a^2+1}{ac+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Изъ (2) $$\frac{y^2+1}{xy+1}=\frac{y+1}{x+1}\cdot\frac{c^2+1}{ac+1};$$

слѣдовательно $$\frac{(x^2+1)(y^2+1)}{(xy+1)^2}=\frac{(a^2+1)(c^2+1)}{(ac+1)^2}.$$

Вычтя знаменателей изъ числителей, получимъ

$$\frac{(x-y)^2}{(xy+1)^2}=\frac{(a-c)^2}{(ac+1)^2};$$ слѣдовательно $$\frac{x-y}{xy+1}=\pm\frac{a-c}{ac+1} \quad . \quad (\beta);$$

слѣдовательно $x-y=(xy+1)\frac{a-c}{ac+1}$ или $(xy+1)\frac{c-a}{ac+1}$;

отсюда, пользуясь первымъ значеніемъ и полагая $\frac{a-c}{ac+1}=m$, мы получимъ

$$y(1+mx)=x-m, \text{ откуда } y=\frac{x-m}{1+mx}.$$

Но изъ (α) $$\frac{x^2+1}{x+1}=\frac{xy+1}{y+1}\cdot\frac{a^2+1}{ac+1};$$

слѣдовательно $$\frac{x^2+1}{x+1}=\frac{a^2+1}{ac+1}\cdot\frac{\frac{x^2-mx}{1+mx}+1}{\frac{x-m}{1+mx}-1}=\frac{a^2+1}{ac+1}\cdot\frac{x^2+1}{1+mx+x-m},$$

а потому $(ac+1)(1+mx+x-m)=(a^2+1)(x+1)$, откуда

$$1+ac+x(a-c)+x(1+ac)-(a-c)=(a^2+1)+x(a^2+1),$$

а потому $x(a-c)-ax(a-c)=a(a-c)+(a-c)$, слѣдовательно

$$x(1-a)=1+a, \text{ откуда } x=\frac{1+a}{1-a}, \text{ а потому}$$

$$y=\frac{x-m}{x+mx}=\frac{\dfrac{1+a}{1-a}-\dfrac{a-c}{a+ac}}{1+\dfrac{(1+a)(a-c)}{(1-a)(1+ac)}}=\frac{1+c}{1-c}.$$

Подобнымъ-же образомъ, если въ (β) мы возьмемъ отрицательный знакъ, то для соотвѣтственныхъ значеній x и y получимъ $\frac{1-a}{1+a}$ и $\frac{1-c}{1+c}$.

21. $$(2y-1)(x^4+4x+3)^{\frac{1}{2}}-(2x-1)(y^4+4y+3)^{\frac{1}{2}}$$
$$=(x-y)(x+y)-2xy-4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$\sqrt{\left(\frac{y+1}{xy-1}\right)}-\sqrt{\left(\frac{2y-1}{2x-1}\right)}=\frac{y+1}{x+1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Изъ (1) $$(2y-1)(x^4+4x+3)^{\frac{1}{2}}-(2x-1)(y^4+4y+3)^{\frac{1}{2}}$$
$$=x^2-y^2-2x^2y+2xy^2+4x-4y.$$
$$=y^2(2x-1)-x^2(2y-1)+2(2x-1)-2(2y-1)$$
$$=(y^2+2)(2x-1)-(x^2+2)(2y-1);$$

слѣдовательно

$$(2y-1)\{x^2+2+\sqrt{(x^4+4x+3)}\}=(2x-1)\{y^2+2+\sqrt{(y^4+4y+3)}\}.$$

или $$\frac{x^2+2+\sqrt{(x^4+4x+3)}}{2x-1}=\frac{y^2+2+\sqrt{(y^2+4y+3)}}{2y-1} \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Но $$x^4+4x+3=(x^2+2x+1)(x^2-2x+3)=uv,$$

если $$u=x^2+2x+1 \text{ и } v=x^2-2x+3;$$

то слѣдовательно $u+v=2(x^2+2)$ и $u-v=2(2x-1)$.

Поэтому (α) принимаетъ видъ

$$\frac{(\sqrt{u}+\sqrt{v})^2}{u-v}=\frac{(\sqrt{u_1}+\sqrt{v_1})}{u_1-v_1},$$

гдѣ $$u_1=y^2+2y+1 \text{ и } v_1=y^2-2y+3;$$

такимъ образомъ $\frac{\sqrt{u}+\sqrt{v}}{\sqrt{u}-\sqrt{v}}=\frac{\sqrt{u_1}+\sqrt{v_1}}{\sqrt{u_1}-\sqrt{v_1}}$, слѣдовательно $\frac{u}{v}=\frac{u_1}{v_1}$;

а слѣдовательно $$\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+3}=\frac{y^2+2y+1}{y^2-2y+3}.$$

Складывая и вычитая числитель и знаменатель каждой дроби, получимъ

$$\frac{x^2+2}{2x-1}=\frac{y^2+2}{2y-1};$$

слѣдовательно $2yx^2+4y-x^2-2=2xy^2+4x-y^2-2;$

или $2yx(x-y)-(x^2-y^2)-4(x-y)=0;$

слѣдовательно $x=y$, или $2xy=x+y+4$, такъ что $y=\frac{x+4}{2x-1}$.

Подставляя значеніе $y=x$ въ (2), получимъ

$$\sqrt{\left(\frac{x+1}{x^2-1}\right)}=2, \text{ или } \frac{1}{x-1}=4, \text{ откуда } x=1\tfrac{1}{4} \text{ и } y=1\tfrac{1}{4}.$$

А если $y=\frac{x+4}{2x-1}$, то $\frac{y+1}{xy-1}=\frac{3(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{3}{x+1}$;

такимъ образомъ $\frac{2y-1}{2x-1}=\frac{9}{(2x-1)^2}$ и $\frac{y+1}{x+1}=\frac{3}{2x-1}$.

Слѣдовательно уравненіе (2) будетъ

$$\sqrt{\left(\frac{3}{x+1}\right)}-\frac{3}{2x-1}=\frac{3}{2x-1} \text{ или } \sqrt{\left(\frac{3}{x+1}\right)}=\frac{6}{2x-1};$$

поэтому $\frac{1}{x+1}=\frac{12}{(2x-1)^2}$, или $4x^2-16x=11;$

откуда $4x^2-16x+16=27$, а потому $2x-4=\pm 3\sqrt{3};$

такимъ образомъ $x=\frac{1}{2}(4\pm 3\sqrt{3})$ и $y=\frac{x+4}{2x-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{4\pm\sqrt{3}}{1\pm\sqrt{3}}\right)$.

Разные примѣры.

1. Рѣшить уравненіе $\sqrt{(1+x^2)}-\sqrt{(1-x^2)}=\sqrt{(1-x^4)}$.
2. Рѣшить уравн. $x^2(b-y)=ay(y-n)$, $y^2(a-x)=bx(x-n)$.
3. Если
$$x^2+xy+y^2=c^2,$$
$$x^2+xz+z^2=b^2,$$
$$y^2+yz+z^2=a^2,$$
то доказать, что
$$xy+yz+zx=\sqrt{\left\{\tfrac{1}{3}(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4)\right\}};$$
и показать, какъ рѣшить эти уравненія.
4. Рѣшить уравненіе $\frac{x^2-4x-8}{\sqrt{(x^2+2x+11)}}=2\sqrt{2}$.
5. Опредѣлить c такимъ образомъ, чтобы уравненіе $5x+4y=c$ могло имѣть *десять* цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній, исключая нулевыя, причемъ c должно быть такъ велико, какъ возможно.

6. Если $\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-xz}{y(1-xz)}$ и x, y, z не равны между собою, тогда каждая часть этого уравненія будетъ равняться $\frac{z^2-xy}{z^2(1-xy)}$, $x+y+z$ и $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

7. Показать, что если n и N будутъ близки къ равенству, то $\left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{N}{N+n}+\frac{n+N}{4n}$ съ большимъ приближеніемъ, и что ошибка приблизительно будетъ $\frac{(N-n)^4}{8n(N+n)^3}$.

8. Доходъ нѣкотораго лица состоитъ частью изъ жалованья въ 2000 рублей въ годъ и частью изъ процентовъ на капиталъ, считая 3 на 100, къ которому онъ ежегодно прибавляетъ сдѣланныя сбереженія; его издержки въ каждый годъ на 950 рублей меньше пяти четвертей его дохода. Показать, что, каковъ-бы ни былъ первоначальный капиталъ, постепенно накопляясь, онъ приближается къ 60000 рублей. Если первоначальный капиталъ былъ 10000 р., то показать, что онъ удвоится въ промежутокъ времени около тридцати лѣтъ, если дано $\log 2=0.301030$ и $\log 397=2.598790$.

9. Если n будетъ величина цѣлая и положительная и $c=\frac{m}{(m+1)^2}$, то показать, что

$$1-(n-1)c+\frac{(n-2)(n-3)}{2}c^2-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{\lfloor 3}c^3+\ldots$$
$$=\frac{m^{n+1}-1}{m-1}\cdot\frac{1}{(m+1)^n}.$$

10. Если x нѣкоторое первоначальное число, исключая 2, то цѣлая часть $(1+\sqrt{2})^x$, уменьшенная 2 единицами, будетъ дѣлиться на $4x$.

11. Если взять наудачу нѣсколько цѣлыхъ чиселъ и перемножить ихъ между собою, то показать, что вѣроятность того, что послѣдняя цифра ихъ произведенія будетъ 5, постоянно уменьшается по мѣрѣ возрастанія числа цѣлыхъ чиселъ, перемножающихся между собою.

12. Два кошелька содержатъ въ себѣ англійскіе гинеи и шиллинги; если общее число монетъ въ обоихъ кошелькахъ или одинаково, или число гиней къ числу шиллинговъ въ обоихъ кошелькахъ относится одинаково, то показать, что вѣроятность вынуть гинею, беря на удачу одну монету изъ одного изъ этихъ кошельковъ, такая-же какъ и въ томъ случаѣ, когда-бы всѣ эти монеты лежали въ одномъ кошелькѣ и

вынималась-бы одна изъ нихъ. Если не существуетъ ни одного изъ этихъ условій, то вѣроятность будетъ въ пользу кошелька, взятаго по произволу всякій разъ, когда при *большемъ* числѣ монетъ въ немъ будетъ относительно *меньше* гиней.

ГЛАВА LV.

Разныя задачи.

760. Въ предыдущихъ главахъ мы уже дали подборъ задачъ, приводящихъ къ простымъ или квадратнымъ уравненіямъ; здѣсь мы присоединимъ къ прежнимъ еще нѣсколько примѣровъ, рѣшеніе которыхъ представляетъ нѣсколько больше трудностей.

1. Каждый изъ трехъ кубическихъ сосудовъ A, B, C, вмѣстимости которыхъ относятся какъ $1:8:27$, содержитъ въ себѣ воду, причемъ количества воды въ сосудахъ относятся соотвѣтственно, какъ $1:2:3$. Изъ сосуда A выливается въ сосудъ B и изъ сосуда B въ сосудъ C столько воды, что послѣ этого глубина воды въ каждомъ изъ сосудовъ становится одинаковою. Послѣ того выливается $128\frac{4}{7}$ кубическихъ футовъ воды изъ C въ B, а затѣмъ изъ B въ A выливается столько, что глубина воды въ A становится вдвое больше, чѣмъ глубина въ B. Теперь количество воды въ A на 100 кубическихъ футовъ меньше, чѣмъ было въ началѣ. Сколько воды содержалъ каждый изъ сосудовъ въ началѣ?

Пусть x = числ. кубическ. футовъ воды въ A въ началѣ,
тогда $2x$ = числ. кубическ. футовъ воды въ B въ началѣ,
и $3x$ = числ. кубическ. футовъ воды въ C въ началѣ.

Теперь, когда глубина жидкости одинакова во всѣхъ сосудахъ, то очевидно, что *количества* жидкости будутъ пропорціональны площадямъ основаній сосудовъ, то-есть будутъ относиться, какъ $1:4:9$. Слѣдовательно, такъ какъ все количество воды есть $6x$, то количество ея въ $A = \frac{6x}{9+4+1} = \frac{3x}{7}$, а количества, содержащіяся въ B и C, соотвѣтственно будутъ $\frac{12x}{7}$ и $\frac{27x}{7}$.

Далѣе, когда глубина въ A становится *въ два раза* болѣе, чѣмъ въ B, то въ A будетъ содержаться лишь *половина* того количества, которое содержится въ B.

Но A содержитъ $x-100$, слѣдовательно B будетъ содержать $2(x-100)$, а въ C будетъ $\frac{27x}{7}-128\frac{4}{7}$. Поэтому

$$3(x-100)+\frac{27x}{7}-128\frac{4}{7}=6x, \text{ или } \frac{6x}{7}=300+128\frac{4}{7},$$

откуда $$x=350+\frac{900}{7}\times\frac{7}{6}=500.$$

Итакъ, количества воды въ A, B и C будутъ соотвѣтственно 500, 1000, 1500 кубич. футовъ.

2. Три лошади A, B, C бѣгутъ на скачкахъ на разстояніи 2640 саженъ. Когда B пробѣгла 880 саженъ, то опередила A на разстояніе въ три раза большее, чѣмъ то, на которое она опередила C. Теперь лошади бѣгутъ равномѣрно и когда B остается еще 440 саж. до выигрышнаго столба, то C оказывается настолько позади A, на сколько A позади B, но разстояніе между A и B составляетъ $\frac{1}{11}$-ю часть того, которое было въ моментъ, когда B пробѣжала первыя 880 саж. Теперь C увеличила скорость своего бѣга на $\frac{1}{53}$ часть начальной скорости и опережаетъ B въ тотъ моментъ, когда она находится въ разстояніи 176 саженъ отъ выигрышнаго столба, причемъ скорость бѣга A и B остается неизмѣнною. Какое было разстояніе между A и C при концѣ состязанія?

Пусть $11x$ будетъ разстояніе между B и C въ моментъ какъ B кончаетъ первыя 880 саженъ; тогда $33x$ будетъ разстояніе въ саженяхъ между B и A въ тотъ же моментъ. Когда B пробѣжала 2200 саж., она находится впереди A на $3x$ саженъ и впереди C на $6x$ саженъ. Слѣдовательно, когда B пробѣжала 1320 саженъ, въ это время A пробѣжала $1320+30x$ саженъ и C пробѣжала $1320+5x$ саженъ.

Слѣдовательно, послѣ того какъ C ускорила свой бѣгъ, скорости A, B, C будутъ соотвѣтственно пропорціональны числамъ $1320+30x$, 1320 и $\frac{54}{53}(1320+5x)$.

Такъ какъ C опережаетъ B, когда послѣдняя находится въ 176 саженяхъ отъ столба, то B пробѣгла $440-176$ или 264 сажени въ то время, когда C пробѣгла $264+6x$ саженъ;

слѣдовательно $$1320:\frac{54}{53}(1320+5x)=264:264+6x,$$

слѣдовательно $$1320+30x=\frac{54}{53}(1320+5x),$$

откуда $$x(1590-270)=1320,$$

слѣдовательно $$x=1;$$

такъ же найдемъ, что увеличенная скорость C равняется скорости A;

слѣдовательно между ними при концѣ состязанія будетъ такое-же разстояніе, какое было въ моментъ, когда B находилась на 440 саженъ отъ столба, а именно $3x$, или 3 сажени.

3. Одинъ безчестный торговецъ придумалъ употреблять свои *невѣрные* вѣсы какъ при покупкѣ, такъ и при продажѣ извѣстнаго товара и чрезъ это сталъ пріобрѣтать на 11 процентовъ больше того, что онъ имѣлъ-бы при *вѣрныхъ* вѣсахъ. Но если-бы помѣнять мѣстами чашки вѣсовъ, на которыхъ соотвѣтственно вѣшается товаръ при покупкѣ и при продажѣ, то онъ-бы ни пріобрѣлъ, ни потерялъ въ товарѣ. Опредѣлить законную прибыль на товаръ въ процентахъ.

Пусть w и w_1 будутъ кажущіеся вѣсы одного и того-же товара при *покупкѣ* и при *продажѣ*

Пусть p = первоначальная цѣна единицы вѣса,
x = законная прибыль въ процентахъ;

тогда товаръ, стоящій pw, продается за $w_1\left(p+\frac{px}{100}\right)$;

слѣдовательно по условію вопроса

$$w_1\left(p+\frac{px}{100}\right)-wp=\frac{(x+11)pw}{100} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Затѣмъ въ предполагаемомъ случаѣ цѣна товара $=pw_1$, а продажная цѣна $=pw\left(1+\frac{x}{100}\right)$.

слѣдовательно $$pw_1=pw\left(1+\frac{x}{100}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Изъ (1) $$w_1\left(1+\frac{x}{100}\right)=w\left(1+\frac{x+11}{100}\right);$$

изъ (2) $$w\left(1+\frac{x}{100}\right)=w_1;$$

поэтому $$\left(1+\frac{x}{100}\right)^2=1+\frac{x+11}{100};$$

слѣдовательно $x^2+100x=1100$, такъ что $(x+50)^2=3600$;

отсюда $x+50=\pm 60$, а потому $x=10$.

4. Нѣкто покупаетъ извѣстное количество зернового хлѣба, который намѣревается продать по извѣстной цѣнѣ. Послѣ того какъ онъ продалъ половину своего запаса, цѣна хлѣба внезапно упала на 20 процентовъ, и продавая остальной хлѣбъ по этой уменьшенной цѣнѣ, онъ получилъ отъ всей продажи прибыль на 30 процентовъ меньше той, которую ожидалъ. Если-бы до паденія цѣны онъ продалъ $^3/_4$ своего запаса, а уменьшеніе въ цѣнѣ равнялось-бы отношенію 200 рублей къ той суммѣ, за которую онъ самъ покупалъ то количество хлѣба, кото-

рое продавалъ при прежней цѣнѣ за 1000 рублей, то онъ заработалъ-бы на всемъ дѣлѣ столько полтинниковъ, сколько четвериковъ хлѣба у него было въ началѣ. Найти, сколько стоилъ ему самому хлѣбъ за четверикъ и сколько процентовъ онъ надѣялся заработать.

Пусть x = первоначальная цѣна въ рубляхъ за четверикъ,
y = прибыль, ожидаемая торговцемъ въ процентахъ;

тогда $x\left(1+\frac{y}{100}\right)$ = цѣна четверика, по которой онъ продалъ половину своего запаса; $\frac{4}{5}x\left(1+\frac{y}{100}\right)$ = цѣна четверика, по которой онъ продаетъ другую половину; слѣдовательно средняя цѣна за четверикъ будетъ $\frac{9x}{10}\left(1+\frac{y}{100}\right)$; а слѣдовательно его прибыль за четверикъ $\frac{9x}{10}\left(1+\frac{y}{100}\right)-x$.

Еслибы онъ продалъ все по той-же цѣнѣ, по какой продавалъ первую половину, то прибыль на четверикъ была-бы $\frac{yx}{100}$; слѣдовательно по условію вопроса $\frac{9x}{10}\left(1+\frac{y}{100}\right)-x=\frac{7}{10}\ \frac{yx}{100}$;

слѣдовательно $\frac{y}{500}=\frac{1}{10}$, а потому $y=50$.

Но первоначальная цѣна того количества, которое онъ продавалъ по прежней цѣнѣ за 1000 рублей, будетъ $\frac{1000}{1+\frac{y}{100}}$, т. е. $\frac{2000}{3}$; и если-бы онъ на этомъ потерялъ 200 рублей, то его потеря въ процентахъ была-бы $\frac{200\times100}{\frac{2000}{3}}$, то-есть 30.

Такимъ образомъ въ предполагаемомъ случаѣ средняя продажная цѣна за четверикъ будетъ

$\frac{3x}{4}\left(1+\frac{y}{100}\right)+\frac{x}{4}\left(1+\frac{y}{100}\right)\times\frac{7}{10}=\frac{x}{4}\left(\frac{9}{2}+\frac{21}{20}\right)$; такъ что прибыль на четверикъ будетъ $=\frac{x}{4}\times\frac{111}{20}-x=\frac{31x}{80}$, что по условію равняется полтиннику; слѣдовательно

$$\frac{31x}{80}=\frac{1}{2};\ \text{а потому}\ x=\frac{40}{31}\ \text{рубл.}$$

5. Два лица A и B, имѣя въ своемъ распоряженіи только одну лошадь, проѣзжаютъ отъ одного верстоваго столба до другого нѣкоторое четное число верстъ въ $2\frac{62}{63}$ часа, верхомъ на лошади поперемѣнно верста за верстой, причемъ каждый оставляетъ лошадь привязанной къ верстовому столбу, пока не подойдетъ къ столбу другой. Скорость лошади вдвое болѣе скорости B; B ѣдетъ первый, и оба они вмѣстѣ достигаютъ седьмого столба. Находя необходимымъ увеличить ихъ скорость, оба путника, послѣ этого стали проходить полверстою больше чѣмъ прежде; теперь скорость лошади стала вдвое больше скорости A, причемъ первымъ поѣхалъ опять B. Найти скорости передвиженія и разстояніе между крайними верстовыми столбами.

Пусть $2x$ = пройденному разстоянію въ верстахъ. Теперь во-первыхъ замѣтимъ, что A проходитъ 4 версты и проѣзжаетъ 3, между тѣмъ какъ B проходитъ 3 и проѣзжаетъ 4 версты, или A проходитъ 4 версты, когда B проходитъ 3 и проѣзжаетъ 1 версту,—иначе, такъ какъ скорость лошади вдвое больше B—когда B проходитъ $3^1/_2$ версты. Такимъ образомъ скорости A и B сначала можно представить соотвѣтственно чрезъ $8y$ и $7y$.

Далѣе, A проходитъ $x-3$ и проѣзжаетъ $x-4$ версты въ то время, какъ B проходитъ $x-4$ и проѣзжаетъ $x-3$ версты. Такимъ образомъ A проходитъ $x-3$ версты, когда B проходитъ $x-4$ и проѣзжаетъ 1 версту, т. е. когда B проходитъ $x-4$, A проходитъ $\frac{1}{2}$ версты; такимъ образомъ A проходитъ $x-\frac{7}{2}$, когда B проходитъ $x-4$ версты.

Но A проходитъ $8y+\frac{1}{2}$, когда B проходитъ $7y+\frac{1}{2}$;

слѣдовательно $\dfrac{x-\frac{7}{2}}{x-4}=\dfrac{8y+\frac{1}{2}}{7y+\frac{1}{2}}$, откуда $y=\dfrac{1}{4x-30}$.

Но все время, которое употребляетъ A, выраженное въ часахъ, будетъ $\dfrac{4}{8y}+\dfrac{3}{14y}+\dfrac{x-3}{8y+\frac{1}{2}}+\dfrac{x-4}{2\left(8y+\frac{1}{2}\right)}=2\frac{62}{63}$.

поэтому $\dfrac{5}{7y}+\dfrac{3x-10}{16y+1}=2\frac{62}{63}$;

слѣдовательно $\dfrac{5}{7}+\dfrac{3x-10}{4x-14}=\dfrac{188}{63}\times\dfrac{1}{4x-30}$;

откуда $\dfrac{41x-140}{4x-14}=\dfrac{94}{9}\times\dfrac{1}{2x-15}$;

слѣдовательно $9(82x^2-895x+2100)=376x-1316$;

откуда $738x^2-8431x+20216=0$;

отсюда $x=8$, и слѣдовательно $y=\frac{1}{2}$.

Такимъ образомъ разстояніе=16 верстамъ, а начальныя скорости ходьбы соотвѣтственно 4 и $3^1/_2$ версты.

6. A и B начали одновременно обходъ арены, имѣющей одну версту въ окружности, по одному направленію, причемъ A идетъ скорѣе B. Черезъ 12 минутъ послѣ того, какъ A встрѣтилъ B въ третій разъ; A повернулся и пошелъ въ противоположномъ направленіи и шелъ такъ втеченіе 6 минутъ послѣ того, какъ встрѣтилъ B въ третій разъ; послѣ этого онъ вернулся къ своему прежнему направленію и догналъ B еще 4 раза. Все время, протекшее отъ момента ихъ отправленія, равно 3 часамъ, и A прошелъ 8 верстами больше B. Оба, A и B, уменьшали скорость своей ходьбы на 1 версту въ каждый часъ соотвѣтственно по истеченіи одного и двухъ часовъ. Опредѣлить скорость, съ которой они начали ходьбу сначала.

Пусть x=число верстъ, проходимыхъ A сначала, въ часъ.

y=число верстъ, проходимыхъ B въ часъ въ началѣ.

Въ 3 часа A пройдетъ $x+2(x-1)$ или $3x-2$ версты,

а B пройдетъ $2y+(y-1)$ или $3y-1$ верстъ;

слѣдовательно по условію вопроса $3x-2-(3y-1)=8$, а потому $x-y=3$, то-есть *относительная* скорость A и B равна 3 верстамъ въ часъ. Поэтому A выигрываетъ въ сравненіи съ B при каждомъ кругѣ $\frac{1}{3}$ версты въ часъ, и потому пройдетъ мимо B въ третій разъ къ концу перваго часа.

Точно также, такъ какъ *относительная* скорость A и B въ послѣдній часъ та-же самая, какъ въ первый, и такъ какъ A проходитъ мимо B въ *четвертый* разъ въ концѣ третьяго часа, то слѣдовательно всѣ *четыре* раза онъ пройдетъ мимо B втеченіе послѣдняго часа, причемъ первый разъ придется въ точности въ началѣ третьяго часа.

Но чрезъ 12 минутъ послѣ перваго часа разстояніе между A и B будетъ $\frac{1}{5}(x-y-1)=\frac{2}{5}$ версты; слѣдовательно время первой встрѣчи будетъ $\frac{2}{5}:(x+y-1)$, а время встрѣчи *вдвое* большее $=2:(x+y-1)$.

Черезъ 6 минутъ разстояніе между ними будетъ $\frac{1}{10}(x+y-1)$; слѣдовательно, если A теперь оборачивается назадъ, то время, когда онъ догонитъ B, будетъ

$$\frac{\frac{1}{10}(x+y-1)}{x-y-1}=\frac{1}{20}(x+y-1);$$

слѣдовательно $\frac{1}{5}+\frac{\frac{2}{5}}{x+y-1}+\frac{2}{x+y-1}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}(x+y-1)=1,$

то-есть $\frac{12}{5u}+\frac{u}{20}=\frac{7}{10}$, если $u=x+y-1$;

слѣдовательно $u^2-14u=-48$, откуда $u-7=\pm 1$, а потому $u=8$ или 6; слѣдовательно $x+y=9$ или 7 и $x-y=3$;
а потому $x=6$ или 5, $y=3$ или 2.

761. Уравненія, данныя въ предыдущей главѣ съ ихъ рѣшеніями, а также и рѣшенія, предложенныя въ настоящей главѣ, принадлежатъ патеру Буэру (Bower), покойному члену коллегіи св. Іоанна. Если кто-либо изъ учащихся пожелаетъ имѣть больше упражненій въ этомъ родѣ, то мы посовѣтуемъ ему обратиться къ собранію алгебраическихъ уравненій и задачъ, изданныхъ W. Rotherham'омъ (изъ коллегіи св. Іоанна).

Различные примѣры.

1. Представить $\{n\sqrt{(a^2+b^2)}-a\sqrt{(m^2+n^2)}\}^2+b^2m^2$ въ видѣ квадрата.

2. Извлечь квадратный корень изъ $6+\sqrt{6+\sqrt{14+\sqrt{21}}}$.

3. Найти основаніе системы счисленія, въ которой число 16640 обыкновенной системы представляется въ видѣ 40400.

4. Показать, что $\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\frac{6}{32}+\ldots$ *до безконечн.* $=2$.

5. При нѣкоторомъ состязательномъ избраніи число кандидатовъ больше чѣмъ въ два раза превышало число лицъ, которое нужно было избрать, и каждый избиратель, подавая голосъ за одного, двухъ, трехъ,... за всѣхъ, сколькихъ нужно было выбрать, могъ подать свой голосъ 15-ю разными способами. Опредѣлить число кандидатовъ.

6. Сколькими способами можно уплатить сумму въ 24 фунта 15 шиллинговъ—шиллингами и франками, если 26 франковъ равняются 21 шиллингу, а отношеніе фунту къ шиллингу $=20$?

7. Найти сумму n членовъ ряда

$$\frac{1}{1+z}+\frac{z}{(1+z)(1+z^2)}+\frac{z^3}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)}+\frac{z^7}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)}+\ldots$$

8. Показать, что $1+2x^4$ никогда не можетъ быть меньше x^2+2x^3.

9. Если между какими нибудь двумя величинами будетъ вставлено одинаковое число среднихъ ариѳметическихъ и среднихъ геометриче-

скихъ членовъ, то показать, что средній ариѳметическій членъ всегда больше соотвѣтственнаго средняго геометрическаго.

10. Если x будетъ какое нибудь первоначальное число, исключая 2, то цѣлая часть выраженія $(2+\sqrt{3})^x - 2^{x+1} + 1$ дѣлится на $12x$.

11. Показать, что если $n = pq$, гдѣ p и q цѣлыя и положительныя числа, то

$$\frac{\lfloor\underline{n}}{\{\lfloor\underline{p}\}^q \lfloor\underline{q}}$$ будетъ цѣлое число.

12. Показать, что $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$ будетъ конечною величиной при n безконечномъ.

13. Если p есть вѣроятность вѣрности теоріи a priori, а q—вѣроятность того, что опытъ произойдетъ такъ, какъ показываетъ теорія, даже если она ложна, то показать, что послѣ опыта, предполагая, что онъ подтвердилъ ожиданія, вѣроятность справедливости теоріи будетъ

$$\frac{p}{p + q - pq}.$$

14. Извѣстно, что въ одномъ изъ кошельковъ (но неизвѣстно—въ какомъ именно) лежатъ двѣ гинеи и шиллингъ, а въ другомъ—одна гинея и шиллингъ; вынимаютъ одну монету изъ одного котораго нибудь кошелька, причемъ монета оказывается гинеей; ее не кладутъ обратно. Показать, что вѣроятность снова вынуть гинею изъ того-же кошелька равняется половинѣ вѣроятности вынуть ее изъ другого кошелька. Предполагая, что вынимающій могъ-бы взять монету себѣ, найти величину его ожиданія. (Гинея = 20 шиллинговъ).

15. Все, что извѣстно о двухъ кошелькахъ—бѣломъ и красномъ, это—что одинъ изъ нихъ, но который—неизвѣстно, содержитъ одинъ соверенъ (20 шиллинговъ) и 4 шиллинга, другой-же—два соверена и три шиллинга; когда вынуто было по монетѣ изъ каждаго кошелька, то оказалось, что изъ бѣлаго вынулся соверенъ, а изъ краснаго кошелька—шиллингъ. Эти монеты были снова положены въ кошельки, одна—въ одинъ, другая—въ другой, но неизвѣстно въ который изъ кошельковъ положенъ соверенъ. Показать, что вѣроятность вновь вынуть соверенъ изъ краснаго кошелька относится къ вѣроятности вынуть его изъ бѣлаго какъ 13 къ 9.

16. Если n есть число лѣтъ, которыхъ данному лицу не достаетъ до 86 лѣтъ, то принимая предположеніе Муавра, что изъ 86 одновременно родившихся человѣкъ ежегодно умираетъ по одному, пока не умрутъ всѣ, найти какая сумма должна быть положена въ банкъ, чтобы это лицо могло ежегодно во всю жизнь получать одинъ рубль.

ГЛАВА LVI.

Сходимость и расходимость рядовъ.

762. Въ главѣ XI мы уже разбирали вопросъ о сходимости и расходимости рядовъ. Главнѣйшій общій выводъ, полученный тогда, можетъ быть выраженъ такимъ образомъ: *Безконечный рядъ будетъ сходящимся, если начиная съ какого нибудь опредѣленнаго члена, отношеніе каждаго члена къ слѣдующему за нимъ будетъ больше нѣкоторой величины, которая сама численно больше единицы; и будетъ расходящимся, если это отношеніе равняется единицѣ или будетъ меньше единицы, а между тѣмъ всѣ члены будутъ имѣть одинъ и тотъ-же знакъ.*

Есть одинъ случай, къ которому это правило неприложимо, и который необходимо замѣтить, это именно случай, когда упомянутое отношеніе больше единицы, но непрерывно приближается къ единицѣ. См. ст. 559, 560 и 561. Теоремы этихъ статей мы воспроизведемъ здѣсь вновь, но въ другомъ видѣ, такъ какъ для настоящей цѣли удобнѣе будетъ разсматривать отношеніе какого нибудь члена къ слѣдующему за нимъ члену, чѣмъ къ предыдущему.

763. Разсмотримъ теперь теоремы, доставляющія признаки сходимости или расходимости въ томъ случаѣ, къ которому прежніе признаки не примѣнимы. Въ томъ безконечномъ ряду, который мы будемъ разсматривать, мы будемъ предполагать всѣ члены положительными, покрайней мѣрѣ, начиная съ какого нибудь опредѣленнаго члена, если не съ самаго начала.

764. *Рядъ будетъ сходящимся, если начиная съ какого нибудь опредѣленнаго члена отношеніе каждаго члена къ слѣдующему за нимъ никогда не меньше соотвѣтственнаго отношенія въ другомъ ряду, сходимость котораго извѣстна.*

Очевидно въ такомъ случаѣ, что предложенный рядъ не больше извѣстнаго сходящагося ряда; а слѣдовательно онъ будетъ сходящимся.

765. *Рядъ будетъ расходящимся, если начиная съ какого нибудь опредѣленнаго члена отношеніе каждаго члена къ слѣдующему за нимъ никогда не больше соотвѣтственнаго отношенія въ другомъ ряду, расходимость котораго извѣстна.*

Очевидно, что при этомъ условіи предложенный рядъ не можетъ быть меньше извѣстнаго расходящагося ряда, а слѣдовательно онъ будетъ расходящимся.

766. *Пусть* u_n *означаетъ* n-й *членъ нѣкотораго ряда; тогда если, начиная съ какого нибудь опредѣленнаго значенія* n, *величина*

$\mathrm{n}\left(\frac{\mathrm{u_n}}{\mathrm{u_{n+1}}}-1\right)$ *будетъ постоянно больше нѣкоторой положительной величины, которая сама больше единицы,—то рядъ этотъ будетъ сходящійся.*

Положимъ, что начиная съ опредѣленнаго значенія n величина $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$ постоянно остается больше γ, гдѣ γ есть нѣкоторая положительная величина большая единицы. Тогда $\frac{u_n}{u_{n+1}}-1$ будетъ больше $\frac{\gamma}{n}$, а слѣдовательно $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ больше $1+\frac{\gamma}{n}$.

Но по ст. 686 можно найти положительную величину p большую единицы, чтобы при достаточно большомъ n величина $\left(\frac{n+1}{n}\right)^p$ была меньше, чѣмъ $1+\frac{\gamma}{n}$. Слѣдовательно, когда n достаточно велико, то $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ будетъ больше $\left(\frac{n+1}{n}\right)^p$. Но по ст. 562 рядъ, n-ый членъ котораго будетъ $\frac{1}{n^p}$, будетъ сходящимся, если p величина положительная и бо́льшая единицы; слѣдовательно по ст. 764 рядъ, котораго n-ый членъ есть u_n, будетъ сходящимся.

767. *Пусть* $\mathrm{u_n}$ *означаетъ* n*-ый членъ ряда; тогда, если начиная съ нѣкотораго опредѣленнаго значенія* n, *величина выраженія* $\mathrm{n}\left(\frac{\mathrm{u_n}}{\mathrm{u_{n+1}}}-1\right)$ *никогда не будетъ положительной и больше единицы, то рядъ будетъ расходящійся.*

Дѣйствительно, здѣсь послѣ нѣкотораго опредѣленнаго значенія n величина $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ равна $1+\frac{1}{n}$ или меньше $1+\frac{1}{n}$. Но по ст. 562 рядъ, въ которомъ n-ый членъ есть $\frac{1}{n}$, будетъ расходящимся; слѣдовательно по ст. 765 рядъ, въ которомъ n-ый членъ есть u_n, будетъ расходящимся.

768. Правила, изложенныя въ статьяхъ 766 и 767, часто дадутъ намъ возможность рѣшить вопросъ о сходимости или расходимости ряда въ случаѣ, указанномъ въ ст. 762, къ которому наши прежнія правила оказываются неприложимыми. Есть одинъ случай, къ которому не будутъ имѣть приложенія и новыя правила, и его необходимо замѣтить; это случай, въ которомъ, начиная съ извѣстнаго значенія n, величина $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$ постоянно остается положительной и больше

единицы, но непрерывно приближается къ единицѣ. Мы перейдемъ теперь къ изложенію теоремъ, изъ которыхъ можно вывести признаки въ этомъ случаѣ.

769. По свойству логариѳма очевидно, что если n будетъ неопредѣленно возрастать, то неопредѣленно-же будетъ возрастать и $\log n$. Но важно замѣтить, что $\log n$ возрастаетъ менѣе быстро, чѣмъ возрастаетъ n, такъ что $\frac{\log n}{n}$ на самомъ дѣлѣ можетъ быть какъ угодно малымъ, если n будетъ взято достаточно большимъ. Дѣйствительно, положимъ $n=e^x$, такъ что $\log n=x$; тогда, по мѣрѣ безпредѣльнаго возрастанія n будетъ безпредѣльно-же возрастать и x. Но $\frac{\log n}{n}=\frac{x}{e^x}$ $=\frac{x}{1+x+\frac{x^2}{|\underline{2}}+\frac{x^3}{|\underline{3}}+\ldots}$, а это меньше чѣмъ $\frac{x}{x+\frac{x^2}{|\underline{2}}+\frac{x^3}{|\underline{3}}+\ldots}$ т.-е. меньше $\frac{1}{1+\frac{x}{|\underline{2}}+\frac{x^2}{|\underline{3}}+\ldots}$; и очевидно, что это можетъ быть сдѣлано какъ угодно малымъ, если взять достаточно большое значеніе для n.

Замѣчанія эти окажутся полезными при изученіи остальной части этой главы. Для краткости мы примемъ слѣдующее обозначеніе: $\log n$ будемъ означать чрезъ $\lambda(n)$, $\log(\log n)$ чрезъ $\lambda^2(n)$, $\log\{\log(\log n)\}$ чрезъ $\lambda^3(n)$, и такъ далѣе.

770. *Рядъ, въ которомъ общій членъ есть*

$$\frac{1}{n\lambda(n)\lambda^2(n)\ldots\lambda^r(n)\{\lambda^{r+1}(n)\}^p}, \qquad (1)$$

будетъ сходящимся, если p *больше единицы, и расходящимся, если* p *равно единицѣ или меньше единицы.*

Мы предполагаемъ, что n такъ велико, что $\lambda^{r+1}(n)$ возможно и представляетъ положительную величину.

Справедливость этой теоремы, когда $r=0$, доказана въ ст. 563; мы докажемъ ее вообще помощью наведенія.

По ст. 563 рядъ, въ которомъ выраженіе (1) есть общій членъ, будетъ сходящимся или расходящимся одновременно съ рядомъ, въ которомъ общій членъ будетъ

$$\frac{m^n}{m^n\lambda(m^n)\lambda^2(m^n)\ldots\lambda^r(m^n)\{\lambda^{r+1}(m^n)\}^p}, \qquad (2)$$

гдѣ m нѣкоторая цѣлая положительная величина.

I. Положимъ, что p больше единицы. Пусть m будетъ нѣкоторое цѣлое положительное число, *большее* чѣмъ основаніе Неперовыхъ ло-

гариѳмовъ; тогда $\lambda(m^n)$ *больше* n. Отсюда слѣдуетъ, что общій членъ (2) будетъ *меньше*, чѣмъ

$$\frac{1}{n\lambda(n)\lambda^2(n)\ldots\lambda^{r-1}(n)\{\lambda^r(n)\}^p}; \qquad (3)$$

такимъ образомъ по ст. 764, если рядъ, въ которомъ общимъ членомъ служитъ выраженіе (3), будетъ сходящимся, то сходящимися будутъ также и ряды съ общими членами (2) и (1). Слѣдовательно, если рядъ съ общимъ членомъ (3) будетъ сходящимся, когда r имѣетъ какое нибудь частное значеніе, то онъ будетъ сходящимся и тогда, когда r измѣнится въ $r+1$. Но такъ какъ p больше единицы, то по ст. 563 рядъ съ общимъ членомъ (3) *будетъ* сходящимся, когда $r=1$, а слѣдовательно и когда $r=2$, а значитъ и когда $r=3$, и такъ далѣе. Такимъ образомъ рядъ съ общимъ членомъ (1) есть сходящійся.

II. Положимъ, что p равно единицѣ. Пусть $m=2$, что представляетъ цѣлое положительное число, которое *меньше* основанія Непероваго логариѳмовъ; тогда $\lambda(m^n)$ *меньше* n. Отсюда слѣдуетъ, что общій членъ (2) будетъ *больше*, чѣмъ

$$\frac{1}{n\lambda(n)\lambda^2(n)\ldots\lambda^{r-1}(n)\lambda^r(n)}.$$

Отсюда, поступая какъ въ I случаѣ, мы можемъ показать, что рядъ съ общимъ членомъ (1) будетъ расходящимся.

III. Положимъ, что p меньше единицы. Тогда общій членъ (1) больше того, чѣмъ-бы онъ былъ, если-бы p было равно единицѣ, покрайней мѣрѣ при достаточно большомъ n, а слѣдовательно и подавно рядъ будетъ расходящимся.

Простое доказательство этой теоремы съ помощью интегральнаго вычисленія дано нами въ курсѣ *Интегральнаго Вычисленія*, гл. IV.

771. Означимъ чрезъ u_n общій членъ даннаго ряда. Если, начиная съ нѣкотораго значенія n, величина выраженія

$$u_n n\lambda(n)\lambda^2(n)\ldots\lambda^r(n)\{\lambda^{r+1}(n)\}^p$$

постоянно будетъ конечною, когда p остается опредѣленною величиною большею чѣмъ единица, то данный рядъ будетъ сходящимся.

Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ члены даннаго ряда имѣютъ конечное отношеніе къ членамъ ряда, сходимость котораго доказана.

Если, начиная съ нѣкотораго значенія n, величина выраженія

$$u_n n\lambda(n)\lambda^2(n)\ldots\lambda^r(n)\lambda^{r+1}(n)$$

будетъ постоянно конечною или безконечно большою, то предложенный рядъ будетъ расходящимся.

Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ члены даннаго ряда имѣютъ покрайней мѣрѣ конечное отношеніе къ членамъ такого ряда, расходимость котораго доказана.

772. Теорема, изложенная въ ст. 771, можетъ употребляться въ случаяхъ, въ которыхъ данные раньше признаки сходимости или расходимости не могутъ имѣть приложенія; но вообще будетъ болѣе удобно пользоваться правилами, которыя мы докажемъ въ слѣдующей статьѣ.

773. *Означимъ* $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$ *чрезъ* P_0; *тогда если, начиная съ нѣкотораго опредѣленнаго значенія* n, *величина выраженія* $\lambda(n)(P_0-1)$ *постоянно будетъ больше нѣкоторой положительной величины, которая сама больше единицы, то рядъ, въ которомъ* n-*й членъ есть* u_n, *будетъ сходящимся; а если, начиная съ нѣкотораго опредѣленнаго значенія* n, *величина* $\lambda(n)(P_0-1)$ *никогда не будетъ положительною величиною большею единицы, то рядъ будетъ расходящимся.*

I. Положимъ, что начиная съ нѣкотораго опредѣленнаго значенія n, величина выраженія $\lambda(n)(P_0-1)$ остается всегда больше γ, гдѣ γ положительная величина больше единицы. Тогда P_0-1 будетъ больше чѣмъ $\frac{\gamma}{\lambda(n)}$; а потому $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ будетъ больше $1+\frac{1}{n}+\frac{\gamma}{n\lambda(n)}$.

Пусть $v_n=\frac{1}{n\{\lambda(n)\}^p}$; тогда $\frac{v_n}{v_{n+1}}=\frac{n+1}{n}\left\{\frac{\lambda(n+1)}{\lambda(n)}\right\}^p$.

Но $\lambda(n+1)=\lambda(n)+\lambda\left(1+\frac{1}{n}\right)$; слѣдовательно $\lambda(n+1)$ меньше, чѣмъ $\lambda(n)+\frac{1}{n}$ (ст. 687); а слѣдовательно $\frac{v_n}{v_{n+1}}$ меньше, чѣмъ $\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{1+\frac{1}{n\lambda(n)}\right\}^p$; а потому, когда n будетъ достаточно велико, то $\frac{v_n}{v_{n+1}}$ будетъ меньше $\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{1+\frac{q}{n\lambda(n)}\right\}$, если только q будетъ больше p. (ст. 686). Такимъ образомъ $\frac{v_n}{v_{n+1}}$ меньше $1+\frac{1}{n}+\frac{q}{n\lambda(n)}+\frac{q}{n^2\lambda(n)}$; и когда n взято достаточно большимъ, то послѣдній изъ написанныхъ четырехъ членовъ будетъ несравненно меньше третьяго, и слѣдовательно $\frac{v_n}{v_{n+1}}$ меньше, чѣмъ $1+\frac{1}{n}+\frac{r}{n\lambda(n)}$, если только r больше q.

Выводъ этотъ остается справедливымъ, какъ-бы ни былъ малъ избытокъ q надъ p и какъ-бы ни былъ малъ избытокъ r надъ q; слѣдовательно, такъ какъ γ больше единицы то мы можемъ предположить, что γ больше r и что p положительное и больше единицы.

Такъ какъ γ больше r, то мы будемъ имѣть $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ больше $\frac{v_n}{v_{n+1}}$. Но по ст. 770 рядъ, въ которомъ общій членъ есть v_n, будетъ сходящимся, когда p величина положительная и больше единицы; слѣдовательно по ст. 764 рядъ, въ которомъ n-ый членъ есть u_n, будетъ сходящимся.

II. Положимъ, что начиная съ нѣкотораго опредѣленнаго значенія n, величина выраженія $\lambda(n)(P_0-1)$ никогда не бываетъ положительною и большею единицы. Тогда P_0-1 есть положительная величина, не превышающая $\frac{1}{\lambda(n)}$, или отрицательная. Въ обоихъ случаяхъ $\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$ меньше $1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\lambda(n)}$.

Положимъ $v_n=\frac{1}{n\lambda(n)}$; тогда $\frac{v_n}{v_{n+1}}=\frac{n+1}{n}\,\frac{\lambda(n+1)}{\lambda(n)}$. Но $\lambda(n+1)=\lambda(n)+\lambda\left(1+\frac{1}{n}\right)$; поэтому $\lambda(n+1)$ больше, чѣмъ $\lambda(n)+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}$ по ст. 688; а значитъ $\frac{v_n}{v_{n+1}}$ больше, нежели $\left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{1+\frac{1}{n\lambda(n)}-\frac{1}{2n^2\lambda(n)}\right\}$; и слѣдовательно, когда n достаточно велико, то $\frac{v_n}{v_{n+1}}$ больше, чѣмъ $1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\lambda(n)}$.

Такимъ образомъ, когда n достаточно велико, $\frac{u_{n+1}}{n_{n+2}}$ будетъ меньше $\frac{v_n}{v_{n+1}}$. Но по ст. 770 рядъ съ общимъ членомъ v_n есть рядъ расходящійся; слѣдовательно по ст. 765 и рядъ съ общимъ членомъ u_n будетъ расходящимся.

774. Теорема ст. 773 не приложима къ случаю, когда $\lambda(n)(P_0-1)$ постоянно остается положительной и большей, чѣмъ единица, но при этомъ непрерывно приближается къ единицѣ; тогда нужно пользоваться другою теоремой, которая оказывается также неприложимой въ извѣстномъ случаѣ. Такимъ образомъ можно получить рядъ теоремъ, каждая изъ которыхъ можетъ быть испытана, если всѣ предыдущія не будутъ имѣть приложенія. Теоремы эти можно найти въ *Интегральномъ Вычисленіи* (Тодгентера) гл. IV; онѣ могли-бы быть доказаны по способу ст. 773, но такъ какъ для элементарныхъ цѣлей онѣ не нужны, то мы и не сочли нужнымъ разсматривать ихъ здѣсь. Въ видѣ упражненія для учащагося, теорема слѣдующая за тою, что дана въ ст. 773, предложена нами какъ послѣдній изъ примѣровъ, заканчивающихъ эту главу.

Пояснимъ доказанныя правила примѣненіемъ ихъ въ слѣдующихъ трехъ статьяхъ.

775. Слѣдующій рядъ называется *гипергеометрическимъ*:

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots$$

Опредѣлимъ, когда рядъ этотъ будетъ сходящимся и когда—расходящимся.

Означимъ его чрезъ $u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots$; тогда

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{(n+1)(n+\gamma)}{(n+\alpha)(n+\beta)x}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)x};$$

такимъ образомъ по ст. 762, если x меньше единицы, то рядъ будетъ сходящимся, а если x больше единицы—рядъ будетъ расходящимся. Положимъ $x=1$; тогда

$$P_0=\frac{1+\gamma-\alpha-\beta+\frac{\gamma-\alpha\beta}{n}}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)};$$

такимъ образомъ, если $\gamma-\alpha-\beta$ будетъ положительною величиною, то рядъ будетъ сходящимся, а если $\gamma-\alpha-\beta$ будетъ величиною отрицательною, то рядъ будетъ расходящимся. См. ст. 766 и 767 Если $\gamma-\alpha-\beta$ будетъ нулемъ, то мы должны пользоваться ст. 773; тогда будемъ имѣть

$$\lambda(n)(P_0-1)=-\frac{\frac{\alpha\beta}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lambda(n)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)};$$

эта дробь, если возьмемъ n достаточно большимъ, можетъ быть сдѣлана какъ угодно малою, а слѣдовательно рядъ будетъ расходящимся.

776. Положимъ, что $\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n^k+an^{k-1}+bn^{k-2}+cn^{k-3}+\ldots}{n^k+An^{k-1}+Bn^{k-2}+Cn^{k-3}+\ldots}$, гдѣ k цѣлое положительное число, и ни одинъ изъ показателей не дѣлается отрицательнымъ; величины-же a, b, $c\ldots$ A, B, C,... нѣкоторыя постоянныя количества. Мы покажемъ, что рядъ, въ которомъ n-ый членъ есть u_n, будетъ сходящимся, если $a-A-1$ будетъ величиною положительною, и расходящимся, если $a-A-1$ будетъ величиною отрицательною или нулемъ.

Здѣсь $$P_0=\frac{(a-A)n^k+(b-B)n^{k-1}+(c-C)n^{k-2}+\ldots}{n^k+An^{k-1}+Bn^{k-2}+\ldots};$$

такимъ образомъ, если $a-A-1$ будетъ положительной величиной, то рядъ—сходящійся, а если $a-A-1$ величина отрицательная, то рядъ—расходящійся. См. ст. 766 и 767. Если-же $a-A-1$ равняется нулю, то мы имѣемъ

$$P_0=\frac{n^k+(b-B)n^{k-1}+\ldots}{n^k+An^{k-1}+Bn^{k-2}+\ldots};$$

въ нѣкоторыхъ случаяхъ мы можемъ еще опредѣлить, будетъ-ли рядъ сходящимся или расходящимся, не прибѣгая ни къ какому новому правилу; напримѣръ, если $b-B-A$ величина отрицательная, то рядъ по ст. 767 будетъ расходящимся. Но будетъ удобнѣе пользоваться ст. 773; тогда мы будемъ имѣть

$$\lambda(n)(P_0-1=\frac{\lambda(n)\{(b-B-A)n^{k-1}+(c-C-B)n^{k-2}+\ldots\}}{n^k+An^{k-1}+Bn^{k-2}+\ldots};$$

при достаточно большомъ n это выраженіе можетъ быть сдѣлано какъ угодно малымъ, а слѣдовательно рядъ—сходящійся.

777. Изслѣдуемъ теперь разложеніе $(1+x)^m$ по теоремѣ Ньютона и опредѣлимъ, будетъ-ли этотъ рядъ сходящимся или расходящимся при $x=1$ или -1.

Означимъ чрезъ u_r, r-ный членъ разложенія двучлена $(1+x)^m$; тогда

$$u_{r+1}+u_{r+2}+u_{r+3}+\ldots$$
$$=u_r\left\{\frac{m-r+1}{r}x+\frac{(m-r+1)(m-r)}{r(r+1)}x^2+\ldots\right\}.$$

Намъ нужно будетъ разсмотрѣть рядъ, заключенный въ скобки.

I. Положимъ $x=1$. Пусть r будетъ по численной величинѣ не меньше m; тогда члены въ скобкахъ будутъ поперемѣнно положительными и отрицательными.

Если m положительное или отрицательное и меньше единицы, то каждый членъ будетъ по численной величинѣ меньше предыдущаго члена, и рядъ будетъ, по ст. 558, сходящимся.

Если $m=-1$, то рядъ внутри скобокъ принимаетъ видъ

$$-1+1-1+1-\ldots,$$

который по опредѣленію ст. 554 будетъ сходящимся.

Если m величина отрицательная и больше единицы, то каждый членъ ряда внутри скобокъ будетъ численно больше предыдущаго, и рядъ будетъ расходящимся.

II. Положимъ $x=-1$. Тогда рядъ внутри скобокъ будетъ

$$\frac{r-m-1}{r}+\frac{(r-m-1)(r-m)}{r(r+1)}+\frac{(r-m-1)(r-m)(r-m+1)}{r(r+1)(r+2)}+\ldots$$

Пусть r будетъ по численной величинѣ не меньше m; тогда члены этого ряда всѣ будутъ имѣть одинаковый знакъ. Въ ст. 775 положимъ $\alpha=1$, $\beta=r-m-1$ и $\gamma=r$; тогда найдемъ, что рядъ будетъ сходящимся, если m положительная, и расходящимся, если m отрицательная величина.

Примѣры сходимости и расходимости рядовъ.

1. Показать, какъ можно опредѣлить, будетъ-ли произведеніе безконечнаго числа множителей $u_1, u_2, u_3, u_4 \ldots$ конечнымъ или нѣтъ.

2. Показать, что при n безконечно-большомъ, величина

$$\frac{\lfloor\underline{n}\, n^x}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$$

будетъ конечною, исключая случай, когда x цѣлое и отрицательное.

3. Показать, что при $x=1$, значеніе члена u_n въ ст. 775, безпредѣльно возрастаетъ съ возрастаніемъ n, если $\alpha+\beta-\gamma-1$ величина положительная.

4. Показать, что когда $x=1$, значеніе u_n въ ст. 775 будетъ конечнымъ при безпредѣльномъ возрастаніи n, если $\alpha+\beta-\gamma-1$ равняется нулю.

5. Показать, что когда $x=1$, то значеніе u_n въ ст. 775 будетъ безконечно малымъ при безпредѣльномъ возрастаніи n, если $\alpha+\beta-\gamma-1$ будетъ отрицательною величиной.

6. Опредѣлить, будетъ-ли слѣдующій рядъ сходящимся или расходящимся, при положительномъ x:

$$ax+\frac{a(a+1)}{\lfloor\underline{2}}x^2+\frac{a(a+1)(a+2)}{\lfloor\underline{3}}x^3+\ldots$$

7. Если $u_n=\frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}$, то показать, что рядъ расходящійся.

8. Опредѣлить, будетъ-ли при x положительномъ, слѣдующій рядъ сходящимся или расходящимся

$$1+\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{x^4}{7}+\ldots$$

9. Опредѣлить, будетъ-ли слѣдующій рядъ сходящимся или расходящимся, если β будетъ положительная правильная дробь.

$$1+\frac{\beta(1-\beta)}{1^2}+\frac{(1+\beta)\beta(1-\beta)(2-\beta)}{1^2.2^2}+\frac{(2+\beta)(1+\beta)\beta(1-\beta)(2-\beta)(3-\beta)}{1^2 2^2 3^2}+\ldots$$

10. Если $u_n=\frac{n^p}{(n-1)^q}$, гдѣ p и q положительныя величины, то опредѣлить будетъ-ли этотъ рядъ сходящимся или расходящимся.

11. Показать, что если, начиная съ какого нибудь опредѣленнаго значенія n, величина выраженія $n\log\frac{u_n}{u_{n+1}}$ постоянно будетъ больше нѣкоторой положительной величины, которая сама больше единицы, то рядъ будетъ сходящійся.

12. Показать, что если, начиная съ какого нибудь опредѣленнаго значенія n, величина выраженія $n\log\frac{u_n}{u_{n+1}}$ никогда не будетъ положи-

тельною величиною, большею единицы, то этотъ рядъ будетъ расходящимся.

13. Опредѣлить, будетъ-ли слѣдующій рядъ сходящимся или расходящимся при положительномъ x:

$$\frac{a+x}{1}+\frac{(a+2x)^2}{\underline{|2}}+\frac{(a+3x)^3}{\underline{|3}}+\ldots$$

14. Изслѣдовать выводы ст. 775, не пользуясь ст. 773.

15. Изслѣдовать выводы ст. 776, не пользуясь ст. 773.

16. Если $\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n^\alpha+an^\beta+bn^\gamma+\ldots}{n^\alpha+An^\beta+Bn^\gamma+\ldots}$, гдѣ α, β, γ положительныя постоянныя величины, расположенныя въ нисходящемъ порядкѣ, причемъ a, b... A, B, ... какія угодно постоянныя, то опредѣлить, будетъ-ли рядъ, котораго n-ый членъ есть u_n, сходящимся или расходящимся.

17. Показать, что два ряда

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots.$$

и

$$\frac{u_1}{u_0}+\frac{u_2}{u_1+u_0}+\frac{u_3}{u_2+u_1+u_0}+\frac{u_4}{u_3+u_2+u_1+u_0}+\ldots,$$

гдѣ u_0, u_1, u_2, ... всѣ количества положительныя, будутъ оба сходящимися или оба расходящимися.

18. Означимъ $\lambda(n)(P_0-1)$ чрезъ P_1; тогда, если начиная съ нѣкотораго опредѣленнаго значенія n, величина $\lambda^2(n)(P_1-1)$ постоянно остается больше нѣкоторой положительной величины, которая сама больше единицы, то рядъ, въ которомъ n-ый членъ есть u_n, будетъ сходящимся; а если начиная съ нѣкотораго опредѣленнаго значенія n, величина $\lambda^2(n)(P_1-1)$ никогда не будетъ положительною и большею единицы, то рядъ—расходящійся.

ГЛАВА LVII.

Непрерывныя дроби.

778. Болѣе общій видъ непрерывныхъ дробей—слѣдующій:

$$\cfrac{b_1}{a_1\pm\cfrac{b_2}{a_2\pm\cfrac{b_3}{a_2\pm\ldots}}}.$$

Здѣсь a_1, a_2, a_3. ... и b_1, b_2, b_3, ... могутъ означать какія угодно величины—цѣлыя или дробныя, положительныя или отрицательныя. Простыя дроби $\frac{b_1}{a_1}$, $\frac{b_2}{a_2}$, $\frac{b_3}{a_3}$, ... можно называть *составляющими* непрерывной дроби. Если встрѣчается знакъ $\pm$, то можно брать тотъ или другой изъ нихъ; но мы разсмотримъ только два случая, именно случай когда всѣ знаки будутъ $+$, и случай, когда всѣ знаки будутъ $-$. Такимъ образомъ мы будемъ имѣть два рода непрерывныхъ дробей, которыя будемъ называть соотвѣтственно дробями перваго и второго рода.

Въ главахъ XLIV и XLV мы ограничивались непрерывными дробями перваго рода, въ которыхъ числитель каждой составляющей есть единица, а знаменатель положительное цѣлое число; теперь-же мы дадимъ нѣкоторыя предложенія, имѣя въ виду дроби болѣе общаго вида.

779. Дроби, полученныя при остановкѣ на первой, второй, третьей, ... составляющей дроби, называются первою, второю, третьею, ... *подходящими* дробями.

Такимъ образомъ первая подходящая дробь будетъ $\frac{b_1}{a_1}$; вторая $\frac{b_1}{a_1 \pm \frac{b_2}{a_2}}$, то-есть $\frac{a_2 b_1}{a_1 a_2 \pm b_2}$; и такъ далѣе.

780. Въ статьяхъ 781...785 мы разсмотримъ непрерывныя дроби *перваго* рода, а въ статьяхъ 786...793—непрерывныя дроби второго рода. Во всѣхъ этихъ статьяхъ мы будемъ допускать, что числители и знаменатели всѣхъ составляющихъ дробей будутъ *положительными*.

781. Означимъ послѣдовательныя составляющія чрезъ $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$, $\frac{p_3}{q_3}$, ... Тогда мы можемъ по ст. 604 доказать, что послѣдовательныя подходящія дроби могутъ быть получены по слѣдующимъ правиламъ:

$$p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2},\quad q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}.$$

Здѣсь $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = -\frac{b_{n+1} q_{n-1}}{q_{n+1}} \left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right)$;

и $\frac{b_{n+1} q_{n-1}}{q_{n+1}} = \frac{b_{n+1} q_{n-1}}{a_{n+1} q_n + b_{n+1} q_{n-1}}$, что представляетъ *правильную дробь*.

Такимъ образомъ $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}$ будетъ численно меньше $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ и будетъ имѣть обратный съ нею знакъ.

Но $\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{b_1}{a_1} - \frac{a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_2} = \frac{b_1 b_2}{q_1 q_2}$, и это есть величина положитель-

ная. Отсюда мы видимъ, что слѣдующій рядъ состоитъ изъ *положительныхъ* членовъ, расположенныхъ въ нисходящемъ порядкѣ ихъ величины:

$$\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2},\ \frac{p_3}{q_3}-\frac{p_2}{q_2},\ \frac{p_3}{q_3}-\frac{p_4}{q_4},\ \frac{p_5}{q_5}-\frac{p_4}{q_4},\ \frac{p_5}{q_5}-\frac{p_6}{q_6},\ \ldots$$

Этотъ выводъ заключаетъ въ себѣ слѣдующія свойства непрерывныхъ дробей перваго рода:

Подходящія дроби нечетнаго порядка непрерывно уменьшаются, а подходящія четнаго порядка непрерывно возрастаютъ.

Всякая подходящая дробь нечетнаго порядка будетъ больше, а всякая подходящая четнаго порядка—меньше, чѣмъ слѣдующія подходящія.

782. Предположимъ теперь, что число составляющихъ дробей безконечно. Можетъ случиться, что беря n достаточно большимъ, мы въ состоянiи будемъ сдѣлать разность между n-й подходящей и слѣдующей за нею меньше всякой величины; или можетъ случиться, что какъ-бы ни было велико n, разность между n й подходящей дробью и слѣдующей за нею будетъ всегда больше нѣкоторой данной величины.

Въ первомъ случаѣ величина, къ которой приближаются нечетныя подходящія, непрерывно уменьшаясь, а четныя—непрерывно возрастая, можетъ быть названа *величиною* или *значенiемъ* безконечной непрерывной дроби; мы будемъ говорить, что въ этомъ случаѣ значенiе безконечной непрерывной дроби *опредѣлено*. Здѣсь нельзя будетъ говорить, что безконечная непрерывная дробь имѣетъ только одно значенiе, но ее должно разсматривать какъ представляющую двѣ величины, изъ которыхъ одна будетъ та, къ которой приближаются подходящія дроби нечетнаго порядка, а другая та, къ которой стремятся подходящія четнаго порядка.

783. *Если, начиная съ какого нибудь опредѣленнаго значенiя* r, *величина* $\frac{a_r a_{r+1}}{b_{r+1}}$ *будетъ больше нѣкоторой опредѣленной положительной величины, то безконечная непрерывная дробь опредѣлена.*

Пусть γ означаетъ опредѣленную положительную величину.

Послѣдовательно прилагая правило ст. 781, мы получимъ

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}=(-1)^n\left(\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2}\right)\frac{b_3 q^1}{q_3}\cdot\frac{b_4 q_2}{q_4}\cdots\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}}.$$

Но $$\frac{b_{r+1}q_{r-1}}{q_{r+1}}=\frac{b_{r+1}q_{r-1}}{a_{r+1}q_r+b_{r+1}q_{r-1}}=\frac{b_{r+1}q_{r-1}}{a_{r+1}(a_r q_{r-1}+b_r q_{r-2})+b_{r+1}q_{r-1}}$$

$$=\frac{1}{1+\dfrac{a_r a_{r+1}}{b_{r+1}}+\dfrac{a_{r+1}b_r q_{r-2}}{b_{r+1}q_{r-1}}},$$

а это меньше $\frac{1}{1+\gamma}$, такъ какъ $\frac{a_r a_{r+1}}{b_{r+1}}$ больше γ.

Слѣдовательно $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}$ будетъ по численной величинѣ меньше $\frac{c}{(1+\gamma)^{n-r+1}}$, гдѣ c нѣкоторая постоянная величина; и если взять n достаточно большимъ, то величина эта можетъ быть сдѣлана меньше всякой данной величины. Слѣдовательно безконечная непрерывная дробь теперь *опредѣлена*.

Мы видимъ теперь, что поставленное условіе является *достаточнымъ* для того, чтобы какая нибудь безконечная непрерывная дробь была *опредѣленной*; но мы не утверждаемъ, что это условіе *необходимо*.

784. *Безконечная непрерывная дробь перваго рода, въ которой каждая ссставляющая есть правильная дробь, причемъ числитель и знаменатель ея цѣлыя числа, должна быть несоизмѣримымъ количествомъ.*

Дѣйствительно, предположимъ, если это возможно, что непрерывная дробь будетъ соизмѣримой; означимъ ее чрезъ $\frac{B}{A}$, гдѣ A и B цѣлыя положительныя числа. Такимъ образомъ $\frac{B}{A} = \frac{b_1}{a_1 + \rho_1}$, гдѣ ρ означаетъ безконечную непрерывву дробь, начинающуюся съ составляющей $\frac{b_2}{a_2}$. Слѣдовательно $\rho_1 = \frac{Ab_1 - Ba_1}{B}$; числитель этой дроби есть нѣкоторое цѣлое число, которое мы означимъ буквой C, и C должно быть положительнымъ при ρ_1 положительномъ. Подобнымъ-же образомъ, если ρ_2 означаетъ безконечную непрерывную дробь, начинающуюся съ составляющей $\frac{b_3}{a_3}$, то мы найдемъ, что $\rho_2 = \frac{D}{C}$, гдѣ D также положительное цѣлое число; и такъ далѣе.

Сверхъ того, $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$ ... всѣ должны быть правильными дробями. Дѣйствительно, $\frac{B}{A}$ будетъ меньше $\frac{b_1}{a_1}$, а это есть правильная дробь; $\frac{C}{B}$ меньше $\frac{b_2}{a_2}$, а это есть правильная дробь; и такъ далѣе.

Слѣдовательно A, B, C, D, ... составляютъ рядъ *цѣлыхъ положительныхъ* чиселъ расположенныхъ въ *нисходящемъ* порядкѣ ихъ величины, но при этомъ число ихъ *безконечно*; а это—нелѣпость. Слѣдовательно безконечная непрерывная дробь не можетъ быть соизмѣримою величиною.

785. *Если нѣкоторыя изъ составляющихъ безконечной непрерывной дроби не будутъ правильными дробями, но начиная съ из-*

вѣстной составляющей, всѣ слѣдующія будутъ уже правильными дробями, то безконечная непрерывная дробь будетъ несоизмѣримою величиною.

Дѣйствительно, положимъ, что $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ и всѣ слѣдующія за ней составляющія будутъ правильныя дроби; тогда по ст. 784 безконечная непрерывная дробь, начинающаяся съ $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$, будетъ несоизмѣримою; означимъ ее чрезъ x. Какъ и въ ст. 781, мы будемъ имѣть

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}},$$

и значеніе безконечной непрерывной дроби получится, если мы измѣнимъ a_n на $a_n + x$; такъ что оно будетъ

$$\frac{(a_n + x)p_{n-1} + b_n p_{n-2}}{(a_n + x)q_{n-1} + b_n q_{n-2}}, \text{ то-есть } \frac{p_n + x p_{n-1}}{q_n + x q_{n-1}}.$$

Эта величина не можетъ быть соизмѣримой иначе, какъ при условіи $\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, а это вслѣдствіе значенія $\frac{p_n}{q_n}$ приводитъ къ условію $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$; и такимъ образомъ мы должны прійти къ $\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1}{q_1}$, что невозможно, такъ какъ мы не допускаемъ, чтобы $b_1 = 0$ и $b_2 = 0$.

786. *Въ непрерывной дроби второго рода, въ которой знаменатель каждой изъ составляющихъ превышаетъ числитель покрайней мѣрѣ на единицу, всѣ подходящія дроби будутъ положительными правильными дробями, расположенными въ восходящемъ порядкѣ ихъ величины.*

По предположенію первая подходящая $\frac{b_1}{a_1}$ есть положительная правильная дробь. Вторая подходящая будетъ $\frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2}}$; и такъ какъ $\frac{b_2}{a_2}$ есть правильная дробь, и a_1 превышаетъ b_1 покрайней мѣрѣ на единицу, то $a_1 - \frac{b_2}{a_2}$ будетъ положительная величина, превышающая b_1; такимъ образомъ и вторая подходящая есть положительная правильная дробь. Третью подходящую можно означить чрезъ $\frac{b_1}{a_1 - \frac{\beta_1}{\alpha_1}}$, гдѣ $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$

поставлено вмѣсто $\cfrac{b_2}{a_2-\cfrac{b_3}{a_3}}$, такъ что $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ есть положительная правильная дробь по той-же причинѣ, какъ и вторая подходящая; слѣдовательно по той-же самой причинѣ третья подходящая будетъ положительною правильною дробью. Четвертую подходящую можно обозначить чрезъ $\cfrac{b_1}{a_1-\cfrac{\beta_2}{\alpha_2}}$, гдѣ $\frac{\beta_2}{\alpha_2}$ означаетъ дробь такого-же вида, какъ и третья подходящая, а потому она будетъ положительною правильною дробью; слѣдовательно четвертая подходящая будетъ положительною правильною дробью. И такъ далѣе.

И здѣсь, какъ въ ст. 781, мы найдемъ, что послѣдовательныя подходящія дроби могутъ быть получены по слѣдующимъ правиламъ:

$$p_n=a_np_{n-1}-b_np_{n-2},\quad q_n=a_nq_{n-1}-b_nq_{n-2}.$$

Отсюда $$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}=\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}}\left(\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right);$$

такмъ образомъ $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}$ будетъ имѣть такой-же знакъ, какъ $\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$.

Но $\frac{p_2}{q_2}-\frac{p_1}{q_1}=\frac{a_2b_1}{a_1a_2-b_2}-\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_1b_2}{q_1q_2}$, и это величина положительная. Отсюда слѣдуетъ, что $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$, $\frac{p_3}{q_3}$,... составляютъ рядъ положительныхъ правильныхъ дробей, расположенныхъ въ восходящемъ порядкѣ нхъ величины.

787. Если число составляющихъ безконечно, то подходящія дроби составятъ безконечный рядъ правильныхъ дробей, расположенныхъ въ восходящемъ порядкѣ величинъ, причемъ каждый членъ никогда не превзойдетъ нѣкоторой опредѣленной величины, наибольшее значеніе которой есть единица. Мы можемъ сказать въ такомъ случаѣ, что *какая нибудь безконечная непрерывная дробь второго рода, въ которой знаменатель каждой составляющей превышаетъ числитель покрайней мѣрѣ на единицу, будетъ опредѣленной.*

788. Мы покажемъ теперь, что p_n и q_n въ ст. 786 возрастаютъ вмѣстѣ съ n.

Дѣйствительно, $p_n-p_{n-1}=(a_n-1)p_{n-1}-b_np_{n-2}$; но a_n-1 будетъ имѣть покрайней мѣрѣ такую-же величину, какъ b_n; поэтому p_n будетъ больше p_{n-1}, если p_{n-1} будетъ больше p_{n-2}, и такъ далѣе, а p_2

очевидно больше p_1. Такимъ образомъ p_n больше p_{n-1}. Подобнымъ-же образомъ q_n больше q_{n-1}.

789. *Если въ безконечной непрерывной дроби второго рода числитель каждой составляющей будетъ не меньше единицы, а знаменатель больше своего числителя на единицу, то значеніе такой безконечной непрерывной дроби есть единица.*

Здѣсь мы всегда будемъ имѣть $a_n = b_n + 1$; слѣдовательно по ст. 786

$$p_n = (b_n + 1)p_{n-1} - b_n p_{n-2};$$

такъ что $$p_n - p_{n-1} = b_n(p_{n-1} - p_{n-2}).$$

Но $p_1 = b_1$, $p_2 = a_2 b_1 = (b_2 + 1)b_1$; такимъ образомъ $p_2 - p_1 = b_1 b_2$. Отсюда мы получаемъ послѣдовательно

$$p_3 - p_2 = b_1 b_2 b_3,\ p_4 - p_3 = b_1 b_2 b_3 b_4, \ldots,\ p_n - p_{n-1} = b_1 b_2 \ldots b_n.$$

Слѣдовательно, складывая получимъ

$$p_n = b_1 + b_1 b_2 + b_1 b_2 b_3 + \ldots + b_1 b_2 b_3 \ldots b_n.$$

Подобнымъ образомъ мы имѣемъ $q_n - q_{n-1} = b_n(q_{n-1} - q_{n-2})$.

Но $q_1 = b_1 + 1$, $q_2 = (b_1 + 1)(b_2 + 1) - b_2$; такъ что $q_2 - q_1 = b_1 b_2$. Итакъ мы послѣдовательно получаемъ

$$q_3 - q_2 = b_1 b_2 b_3,\ q_4 - q_3 = b_1 b_2 b_3 b_4, \ldots,\ q_n - q_{n-1} = b_1 b_2 b_3 \ldots b_n.$$

Слѣдовательно, складывая получимъ

$$q_n = 1 + b_1 + b_1 b_2 + b_1 b_2 b_3 + \ldots + b_1 b_2 b_3 \ldots b_n.$$

Такимъ образомъ $q_n = p_n + 1$ и $\dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{p_n}{p_n + 1} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{p_n}}$. Но p_n по нашему предположенію не меньше n и такимъ образомъ можетъ быть сдѣлана какъ угодно большою, если n будетъ взято достаточно большимъ; слѣдовательно мы можемъ достигнуть того, что разность между $\dfrac{p_n}{q_n}$ и единицей будетъ меньше всякой данной величины, а потому мы можемъ сказать, что величина такой безконечной непрерывной дроби есть единица.

790. Легко видѣть, что доказательство предыдущей статьи заключаетъ въ себѣ нѣсколько больше того, что ради простоты вошло въ выраженіе теоремы. Существенныя условія состоятъ въ томъ, что $a_n = b_n + 1$ для всѣхъ значеній n, и что p_n должно безпредѣльно возрастать вмѣстѣ съ n. Для послѣдняго условія *достаточно*, чтобы b_n никогда не было меньше единицы, но это не *необходимо*. Необходимое и достаточное условіе состоитъ въ томъ, что безконечный рядъ, въ которомъ m-ый членъ есть $b_1 b_2 b_3 \ldots b_m$, долженъ быть расходящимся; это условіе могло-бы быть удовлетворено, если-бы напримѣръ $b_m = \dfrac{m}{m+1}$.

(См. ст. 562).

*

791. *Если знаменатель какой нибудь изъ составляющихъ дробей превышаетъ ея числитель больше чѣмъ на единицу, между тѣмъ какъ знаменатель каждой составляющей превышаетъ числитель ея покрайней мѣрѣ на единицу, то значеніе безконечной непрерывной дроби меньше единицы.*

Положимъ напримѣръ, что $a_2 = b_2 + p$, гдѣ p положительная величина, большая единицы. Безконечная непрерывная дробь равновелика съ дробью $\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{b_2 + p - \rho}}$, гдѣ ρ есть нѣкоторая положительная величина, представляющая безконечную непрерывную дробь, начинающуюся съ составляющей $\frac{b_3}{a_3}$. Но ρ не можетъ превышать единицу (ст. 787); отсюда слѣдуетъ, что $\cfrac{b_2}{b_2 + p - \rho}$ будетъ правильною положительною дробью; а слѣдовательно, какъ и въ ст. 786, мы видимъ, что $\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{b_2 + p - \rho}}$ есть правильная положительная дробь.

792. *Безконечная непрерывная дробь второго рода, въ которой каждая составляющая есть правильная дробь съ цѣлымъ числителемъ и знаменателемъ, и въ которой значеніе безконечной непрерывной дроби, начинающейся съ нѣкоторой составляющей,—меньше единицы, не можетъ быть соизмѣримою величиною.*

Дѣйствительно, предположимъ, если это возможно, что непрерывная дробь будетъ соизмѣримой и означимъ ее чрезъ $\frac{B}{A}$, гдѣ A и B цѣлыя положительныя числа. Такимъ образомъ $\frac{B}{A} = \cfrac{b_1}{a_1 - \rho_1}$, гдѣ ρ_1 означаетъ безконечную непрерывную дробь, начинающуюся съ составляющей $\frac{b_2}{a_2}$. Слѣдовательно $\rho_1 = \frac{a_1 B - b_1 A}{B}$; числитель этой дроби есть цѣлое число, и мы обозначимъ его буквою C, причемъ C должно быть положительнымъ для ρ_1 положительнаго. Подобнымъ образомъ, если ρ_2 означаетъ безконечную непрерывную дробь, начинающуюся съ составляющей $\frac{b_3}{a_3}$, то мы найдемъ, что $\rho_2 = \frac{D}{C}$, гдѣ D также цѣлое положительное число. И такъ далѣе.

Сверхъ того $\frac{B}{A}, \frac{C}{B}, \frac{D}{C}, \ldots$ должны быть по предположенію всѣ правильными дробями.

Слѣдовательно A, B, C, D,... составляютъ рядъ *цѣлыхъ положительныхъ* величинъ, расположенныхъ *въ нисходящемъ* порядкѣ ихъ величины, причемъ число ихъ *безконечно*; но это невозможно, а потому эта безконечная непрерывная дробь не можетъ быть соизмѣримою величиною.

Здѣсь примѣняется также статья 785 съ условіемъ, выраженнымъ въ ст. 792.

793. Въ предыдущей статьѣ мы предполагали, что безконечная непрерывная дробь, начинающаяся съ нѣкоторой составляющей, будетъ меньше единицы. По ст. 789 и 791, это всегда можно предполагать, исключая случай, въ которомъ начиная съ нѣкоторой опредѣленной составляющей, знаменатель каждой изъ составляющихъ будетъ превышать свой числитель на единицу.

794. Чтобы дать примѣръ опредѣленной безконечной непрерывной дроби перваго рода, положимъ, что каждая составляющая будетъ $\frac{b}{2a}$, гдѣ a и b положительныя величины. Означимъ эту непрерывную дробь чрезъ x; тогда

$$x=\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\ldots}}}; \quad \text{такъ что} \quad x=\cfrac{b}{2a+x};$$

поэтому $x^2+2ax-b=0$, откуда $x=-a\pm\sqrt{(a^2+b)}$, причемъ нужно взять верхній знакъ, такъ какъ безконечная непрерывная дробь положительная. Такимъ образомъ, переставляя члены, мы получаемъ

$$\sqrt{(a^2+b)}=a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\ldots}}}$$

Эта формула даетъ разные способы для выраженія квадратнаго корня въ видѣ непрерывной дроби. Напримѣръ, возьмемъ $\sqrt{17}$. Мы можемъ положить $17=16+1$, или $9+8$; и такъ далѣе. Такимъ образомъ.

$$\sqrt{17}=4+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{8+\ldots}}}=3+\cfrac{8}{6+\cfrac{8}{6+\cfrac{8}{6+\ldots}}}.$$

795. Чтобы дать примѣръ опредѣленной безконечной непрерывной дроби второго рода, положимъ, что каждая составляющая будетъ $\frac{b}{2a}$, гдѣ a и b положительныя величины, причемъ $2a$ превышаетъ b покрайней мѣрѣ на единицу. Обозначимъ непрерывную дробь чрезъ x; тогда

$$x=\cfrac{b}{2a-\cfrac{b}{2a-\ldots}},\ \text{такъ что}\ x=\cfrac{b}{2a-x};$$

откуда находимъ $x^2-2ax+b=0$; поэтому $x=a\pm\sqrt{(a^2-b)}$. Здѣсь нужно взять нижній знакъ, потому что при верхнемъ знакѣ мы получили-бы результатъ больше $a+a-b$, то-есть больше $2a-b$, т.-е. больше единицы; но безконечная непрерывная дробь не можетъ быть больше единицы (ст. 787). Такимъ образомъ, переставивъ члены, получимъ

$$\sqrt{(a^2-b)}=a-\cfrac{b}{2a-\cfrac{b}{2a-\ldots}}.$$

796. Въ ст. 781 мы имѣли

$$p_n=a_np_{n-1}+b_np_{n-2},\quad q_n=a_nq_{n-1}+b_nq_{n-2};$$

а въ ст. 786 мы имѣли подобныя-же соотношенія, причемъ знакъ $+$ былъ измѣненъ на $-$. Теперь предположимъ, что значенія a_n и b_n даны для всѣхъ значеній n и что p_1 и p_2, q_1 и q_2 получены; тогда на основаніи предыдущихъ общихъ соотношеній мы получимъ возможность опредѣлить послѣдовательно p_3, p_4, p_5,... и q_3, q_4, q_5,... Въ нѣкоторыхъ случаяхъ мы можемъ посредствомъ особыхъ искусственныхъ пріемовъ открыть такой законъ составленія послѣдовательныхъ членовъ, который приведетъ насъ къ возможности дать общія выраженія для p_n и q_n; примѣръ этого уже встрѣчался въ ст. 789. Или справедливость закона можетъ быть обнаружена посредствомъ испытанія и затѣмъ доказана индукціей. Впрочемъ изслѣдованіе общихъ выраженій для p_n и q_n принадлежитъ высшимъ областямъ Математики, именно Вычисленію Конечныхъ Разностей.

Замѣтимъ одинъ частный случай. Положимъ, что a_n и b_n остаются постоянными для всѣхъ значеній n; означимъ первое чрезъ a и второе—чрезъ b. Тогда мы будемъ имѣть $p_n=ap_{n-1}+bp_{n-2}$; и мы видимъ при помощи ст. 656, что p_n равняется коэффиціенту при x^{n-1} въ разложеніи по восходящимъ степенямъ x выраженія

$$\frac{p_1+(p_2-ap_1)x}{1-ax-bx^2};$$

такъ какъ $p_1=b$ и $p_2=ab$, то выраженіе это обратится въ

$$\frac{b}{1-ax-bx^2}.$$

Подобнымъ-же образомъ q_n равняется коэффиціенту при x^{n-1} въ разложеніи выраженія

$$\frac{q_1+(q_2-aq_1)x}{1-ax-bx^2};$$

и такъ какъ $q_1 = a$ и $q_2 = a^2 + b$, то это выраженіе обратится въ $\frac{a+bx}{1-ax-bx^2}$, то-есть въ $\frac{1}{\frac{x(1-ax-bx^2)}{x}}$.

797. Теперь мы покажемъ, какъ обратить рядъ, имѣющій конечное число членовъ, въ непрерывную дробь.

Рядъ $\frac{1}{u_0} + \frac{x}{u_1} + \frac{x^2}{u_2} + \ldots + \frac{x^n}{u_n}$ тожественно равенъ непрерывной дроби второго рода съ $n+1$ составляющими, въ которыхъ первая составляющая есть $\frac{1}{u_0}$, вторая $\frac{u^2{}_0 x}{u_0 x + u_1}$ и вообще r-ная будетъ $\frac{u^2{}_{r-2} x}{u_{r-2} x + u_{r-1}}$.

Это можетъ быть доказано при помощи наведенія.

Очевидно, что $\frac{1}{u_0} = \frac{1}{u_0}$,

и что $$\frac{1}{u_0} + \frac{x}{u_1} = \frac{1}{u_0 - \frac{u_0{}^2 x}{u_0 x + u_1}};$$

допустимъ, что эта теорема справедлива, когда рядъ содержитъ $n+1$ членовъ; мы докажемъ, что она будетъ справедлива и тогда, когда рядъ будетъ состоять изъ $n+2$ членовъ.

Дѣйствительно, замѣнимъ u_n чрезъ $u_n - \frac{u_n{}^2 x}{u_n x + u_{n+1}}$; тогда $\frac{x^n}{u_n}$ измѣнится въ $\frac{x^n}{u_n - \frac{u_n{}^2 x}{u_n x + u_{n+1}}}$, т.-е. въ $\frac{x^n (u_n x + u_{n+1})}{u_n u_{n+1}}$, т.-е. въ $\frac{x^n}{u_n} + \frac{x^{n+1}}{u_{n+1}}$, такъ что къ ряду дѣйствительно прибавится еще одинъ членъ. Такъ-же, если замѣна u_n на $u_n - \frac{u_n{}^2 x}{u_n x + u_{n+1}}$ будетъ сдѣлана въ непрерывной дроби съ $n+1$ составляющими, то мы получимъ непрерывную дробь съ $n+2$ составляющими, образованными по тому-же самому закону.

Слѣдовательно, если теорема справедлива, когда рядъ содержитъ $n+1$ членовъ, то она будетъ справедлива, когда рядъ заключаетъ $n+2$ членовъ; но было доказано, что она справедлива, когда рядъ содержитъ два члена; слѣдовательно она справедлива вообще.

798. Слѣдующій выводъ мы можемъ получить изъ ст. 797, упрощая встрѣчающіяся тамъ дроби, или можемъ прійти къ нему прямо по способу ст. 797; рядъ

$$\frac{1}{v_0}+\frac{x}{v_0v_1}+\frac{x^2}{v_0v_1v_2}+\ldots+\frac{x^n}{v_0v_1v_2\ldots v_n}$$

тожественно равенъ непрерывной дроби второго рода съ $n+1$ составляющими, въ которыхъ первая составляющая есть $\frac{1}{v_0}$, вторая $\frac{v_0x}{x+v_1}$ и вообще r-ная составляющая $\frac{v_{r-2}x}{x+v_{r-1}}$.

799. Въ тожествахъ, приведенныхъ въ ст. 797 и 798, мы можемъ, если угодно, измѣнить знакъ у x; возьмемъ напр. тожество ст. 798; изъ него мы получимъ слѣдующій результатъ: рядъ

$$\frac{1}{v_0}-\frac{x}{v_0v_1}+\frac{x^2}{v_0v_1v_2}-\ldots+\frac{(-1)^nx^n}{v_0v_1v_2\ldots v_n}$$

будетъ тожественно равенъ непрерывной дроби перваго рода съ $n+1$ составляющими, изъ которыхъ первая составляющая есть $\frac{1}{v_0}$, вторая $\frac{v_0x}{v_1-x}$ и вообще r-ная составляющая $\frac{v_{r-2}x}{v_{r-1}-x}$. Этотъ выводъ можетъ быть также полученъ прямо, подобно тому какъ въ ст. 797.

800. Въ статьяхъ 797, 798 и 799 мы можемъ предположить n столь большимъ, какъ угодно, лишь-бы рядъ оставался сходящимся; и тогда мы можемъ преобразовать безконечный сходящійся рядъ въ безконечную непрерывную дробь.

801. Очень важная формула по этому предмету была дана Гауссомъ. Означимъ безконечный *гипергеометрическій* рядъ ст. 775 чрезъ $F(\alpha, \beta, \gamma)$; тогда Гауссъ преобразовалъ $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)}{F(\alpha, \beta, \gamma)}$ въ безконечную непрерывную дробь; преобразованіе это возможно, если только $F(\alpha, \beta, \gamma)$ и $F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)$ обѣ будутъ сходящимися.

Существенная часть доказательства состоитъ въ слѣдующемъ соотношеніи: Поставимъ z вмѣсто $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)}{F(\alpha, \beta, \gamma)}$;

тогда $$z=\frac{1}{1-\frac{k_1}{1-k_2z_2}},$$

гдѣ $k_1=\frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)}$, $k_2=\frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)x}{(\gamma+1)(\gamma+2)}$, и z_2 будетъ то, во что обратится z, когда мы измѣнимъ α, β, γ соотвѣтственно въ $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+2$. Докажемъ теперь это.

Въ ряду для $F(\alpha, \beta, \gamma)$ измѣнимъ β на $\beta+1$ и γ на $\gamma+1$ и вычтемъ прежнія значенія; тогда мы получимъ

$$F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)-F(\alpha, \beta, \gamma)=\frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)}F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2) \quad (1).$$

Подобнымъ-же образомъ мы будемъ имѣть

$$F(\alpha+1, \beta, \gamma+1)-F(\alpha, \beta, \gamma)=\frac{\beta(\gamma-\alpha)x}{\gamma(\gamma+1)}F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2). \quad (2).$$

Изъ (1), раздѣливъ получимъ

$$1-\frac{1}{z}=k_1\frac{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2)}{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Изъ (2), раздѣливъ и перемноживъ β на $\beta+1$ и γ на $\gamma+1$, найдемъ

$$1-\frac{F(\alpha, \beta+1\ \gamma+1)}{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2)}=k_2z_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Изъ (3) и (4) мы получаемъ искомый выводъ.

Тогда непрерывная дробь для z можетъ быть продолжена при помощи соотношенія

$$z_2=\frac{1}{1-\dfrac{k_3}{1-k_4z_4}},$$

и это можно продолжить какъ угодно далеко, причемъ общій членъ будетъ

$$k_{2r-1}=\frac{(\alpha+r-1)(\gamma+r-1-\beta)x}{(\gamma+2r-2)(\gamma+2r-1)},$$

$$k_{2r}=\frac{(\beta+r)(\gamma+r-\alpha)x}{(\gamma+2r-1)(\gamma+2r)},$$

$$z_{2r}=\frac{F(\alpha+r, \beta+r+1, \gamma+2r+1)}{F(\alpha+r, \beta+r, \gamma+2r)}.$$

Мы вездѣ принимаемъ, что безконечный рядъ будетъ сходящійся, такъ какъ мы не можемъ пользоваться (1) и (2) безъ этого условія. Изъ ст. 775 легко видѣть, что если числитель и знаменатель z будутъ сходящимися, тогда всѣ безконечныя строки, какія мы вывели, будутъ сходящимися.

Когда r будетъ безпредѣльно велико, то z_{2r} не будетъ чувствительно отличаться отъ единицы.

Дѣйствительно $\quad z_{2r}=\dfrac{1+A_1x+A_2x^2+\ldots}{1+B_1x+B_2x^2+\ldots},$

гдѣ $\quad B_1=\dfrac{(\alpha+r)(\beta+r)}{1.(\gamma+2r)}, \quad B_2=\dfrac{(\alpha+r+1)(\beta+r+1)}{2(\gamma+2r+1)}B_1, \ldots$

и A_1, A_2, ... могутъ быть получены соотвѣтственно изъ B_1, B_2, ... посредствомъ измѣненія β на $\beta+1$ и γ на $\gamma+1$.

Такимъ образомъ $\frac{A_1}{B_1}$, $\frac{A_2}{B_2}$, ... могутъ считаться равными единицѣ, когда r будетъ безпредѣльно велико; точно также по ст. 679 мы можемъ разсматривать z_{2r} какъ единицу.

Такъ какъ z_{2r} можно разсматривать какъ единицу, то $k_{2r}z_{2r}$ обратится просто въ k_{2r}.

Такимъ образомъ z преобразовалось въ безконечную непрерывную дробь.

802. Въ частномъ случаѣ поставимъ $\frac{x^2}{\alpha\beta}$ вмѣсто x; тогда предположимъ, что $\beta=\alpha$ и что α безпредѣльно возрастаетъ; тогда знаменатель z обратится въ

$$1+\frac{x^2}{1.\gamma}+\frac{x^4}{1.2.\gamma(\gamma+1)}+\frac{x^6}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}+\ldots$$

которое мы обозначимъ чрезъ $f(\gamma)$; числитель можетъ быть полученъ изъ знаменателя чрезъ измѣненіе γ на $\gamma+1$.

Точно также k_{2r-1} обратится въ $-\frac{x^2}{(\gamma+2r-2)(\gamma+2r-1)}$ и k_{2r} обратится въ $\frac{x^2}{(\gamma+2r-1)(\gamma+2r)}$.

Такимъ образомъ окончательно $\frac{f(\gamma+1)}{f(\gamma)}$ преобразуется въ безконечную непрерывную дробь $\cfrac{1}{1+\cfrac{p_1}{1+\cfrac{p_2}{1+\ldots}}}$, въ которой $p_m=\frac{x^2}{(\gamma+m-1)(\gamma+m)}$.

Этотъ выводъ можетъ быть полученъ независимо тѣмъ-же путемъ, какъ въ ст. 801; дѣйствительно, мы имѣемъ

$$f(\gamma)-f(\gamma+1)=\frac{x^2}{\gamma(\gamma+1)}f(\gamma+2);\ \text{такимъ образомъ}$$

$$\frac{f(\gamma)}{f(\gamma+1)}=1+\frac{x^2}{\gamma(\gamma+1)}\frac{f(\gamma+2)}{f(\gamma+1)},\ \text{и такъ далѣе.}$$

803. Въ выводѣ предыдущей статьи поставимъ $\frac{1}{2}$ вмѣсто γ и $\frac{1}{2}y$ вмѣсто x; тогда найдемъ, что $\frac{f(\gamma+1)}{f(\gamma)}$ обратится въ $\frac{e^y-e^{-y}}{y(e^y+e^{-y})}$; а p_m будетъ равняться $\frac{y^2}{4m^2-1}$. Умноживъ на y и упростивъ дроби, мы по-

лучимъ окончательно для $\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$ безконечную непрерывную дробь перваго рода, въ которой первая составляющая есть $\frac{y}{1}$, вторая $\frac{y^2}{3}$, и вообще r-ная $\frac{y^2}{2r-1}$.

Вмѣсто y подставимъ $\frac{m}{n}$, гдѣ m и n цѣлыя положительныя числа; тогда по упрощеніи дробей мы получимъ для $\frac{e^{\frac{m}{n}} - e^{-\frac{m}{n}}}{e^{\frac{m}{n}} + e^{-\frac{m}{n}}}$ безконечную непрерывную дробь перваго рода, въ которой первая составляющая есть $\frac{m}{n}$, вторая $\frac{m^2}{3n}$, и вообще r-ая составляющая $\frac{m^2}{(2r-1)n}$.

Когда r достаточно велико, то $(2r-1)n$ превзойдетъ m^2; слѣдовательно по ст. 785 безконечная непрерывная дробь, начиная со слѣдующей составляющей, будетъ несоизмѣримою, а потому и вся непрерывная дробь будетъ несоизмѣримою. Слѣдовательно $e^{\frac{m}{n}}$ будетъ несоизмѣримымъ числомъ для всякихъ цѣлыхъ значеній m и n.

Примѣры непрерывныхъ дробей.

1. Найти значеніе $5 - \cfrac{1}{10 - \cfrac{1}{10 - \ldots}}$

2. Показать, что $\left\{n + \cfrac{1}{2n + \cfrac{1}{2n + \ldots}}\right\}^2 - \left\{n - \cfrac{1}{2n - \cfrac{1}{2n - \ldots}}\right\}^2 = 2$.

3. Въ непрерывной дроби перваго рода всякая составляющая равна $\frac{b}{a}$; доказать, что $p_{n+1} = bq_n$.

4. Въ непрерывной дроби перваго рода каждая составляющая равна $\frac{b}{a}$; найти значеніе p_n и q_n.

5. Въ непрерывной дроби перваго рода, если $a_n = b_n = n$, то показать, что $p_n + q_n = \underline{|n+1}$.

6. Въ непрерывной дроби перваго рода, если $b_{n+1} = 1 + a_n$, то показать, что $p_n - b_{n+1}p_{n-1} = A(-1)^n$; $q_n - b_{n+1}q_{n-1} + B(-1)^n$, гдѣ A и B постоянныя величины, при всякомъ n.

7. Въ безконечной непрерывной дроби перваго рода n-ая составляющая есть $\frac{(n-1)^2+1}{n^2}$; показать, что $p_n-(n^2+1)p_{n-1}=(-1)^{n+1}$.

8. Показать, что e^{-x} можетъ быть преобразовано въ безконечную непрерывную дробь перваго рода, въ которой первая составляющая есть $\frac{1}{1}$, вторая составляющая $\frac{x}{1-x}$ и вообще r-ая составляющая $\frac{(r-2)x}{r-1-x}$.

9. Показать, что $\log 2$ равняется безконечной непрерывной дроби перваго рода, въ которой первая составляющая есть $\frac{1}{1}$, вторая $\frac{1}{1}$ и вообще r-ая составляющая $\frac{(r-1)^2}{1}$.

10. Получить изъ ст. 801 безконечную непрерывную дробь перваго рода для $\frac{1}{x}\log(1+x)$.

ГЛАВА LVIII.

Разныя теоремы.

804. Настоящая глава состоитъ изъ нѣсколькихъ разнаго рода теоремъ, касающихся слѣдующихъ вопросовъ: сокращеннаго алгебраическаго умноженія и дѣленія, уничтоженія дробей, перестановокъ и сочетаній, и вычисленія вѣроятностей.

805. При перемноженіи двухъ алгебраическихъ выраженій въ нѣкоторыхъ случаяхъ бываетъ удобно сократить писаніе, употребляя одни только коэффиціенты. Напримѣръ положимъ, что требуется перемножить $2x^4+x^2-3x+1$ на x^2+3x-2; мы можемъ поступать такъ

$$\begin{array}{r} 2+0+1-3+1 \\ 1+3-2 \\ \hline 2+0+1-3+\ 1 \\ \quad 6+0+3-\ 9+3 \\ \quad -4-0-\ 2+6-2 \\ \hline 2+6-3+0+10+9-2 \end{array}$$

Такимъ образомъ, искомое произведеніе будетъ

$$2x^6+6x^5-3x^4-10x^2+9x-2.$$

Подобный-же сокращенный способъ писанія можетъ быть употребленъ и при дѣленіи.

Такой способъ производить дѣйствія называется иногда *способомъ отдѣленныхъ коэффиціентовъ*.

806. *Синтетическое дѣленіе.* Дѣйствіе дѣленія можетъ быть впрочемъ еще болѣе сокращено посредствомъ способа, даннаго Горнеромъ и названнаго имъ *синтетическимъ дѣленіемъ*.

Положимъ, что требуется раздѣлить

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+Dx^{m-3}+Ex^{m-4}+\ldots$$

на $$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+a_4x^{n-4}+\ldots$$

Означимъ частное чрезъ $Ax^{m-n}+A_1x^{m-n-1}+A_2x^{m-n-2}+A_3x^{m-n-3}+\ldots$ и намъ нужно будетъ показать, какъ можно опредѣлить A_1, A_2, A_3.

Если мы помножимъ частное на дѣлитель, то получимъ дѣлимое; это дѣйствіе, если будемъ писать только одни коэффиціенты, изобразится слѣдующимъ образомъ

$$\begin{array}{l}
A+A_1+A_2+A_3+A_4+\ldots \\
1+a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots \\
\hline
A+A_1+A_2+A_3+A_4+\ldots \\
\qquad a_1A+a_1A_1+a_1A_2+a_1A_3+\ldots \\
\qquad\qquad a_2A+a_2A_1+a_2A_2+\ldots \\
\qquad\qquad\qquad a_3A+a_3A_1+\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\quad a_4A+\ldots \\
\hline
A+B+C+D+E+\ldots
\end{array}$$

Мы предполагаемъ, что здѣсь послѣдняя строка получается обыкновеннымъ путемъ посредствомъ сложенія вертикальныхъ столбцовъ между горизонтальными чертами. Но A, B, C ... извѣстны, и намъ нужно найти A_1, A_2, A_3, ...; для этой цѣли *обратимъ* предыдущее дѣйствіе, т.-е. произведемъ слѣдующее обратное съ нимъ дѣйствіе

$$\begin{array}{r|l}
 & A+B+C+D+E+\ldots \\
-a_1 & \quad -a_1A-a_1A_1-a_1A_2-a_1A_3-\ldots \\
-a_2 & \qquad -a_2A-a_2A_1-a_2A_2-\ldots \\
-a_3 & \qquad\quad -a_3A-a_3A_1-\ldots \\
-a_4 & \qquad\qquad -a_4A-\ldots \\
 & \qquad\qquad\quad \ldots \\
\hline
 & A+A_1+A_2+A_3+A_4+\ldots
\end{array}$$

Здѣсь каждый вертикальный столбецъ представляетъ тоже самое, что и соотвѣтствующій вертикальный столбецъ перваго дѣйствія, но

въ этомъ видѣ они будутъ удобнѣе для нашей цѣли. Напримѣръ, четвертый вертикальный столбецъ прежняго дѣйствія даетъ

$$A_3+a_1A_2+a_2A_1+a_3A=D;$$

а четвертый столбецъ новаго дѣйствія даетъ

$$D-a_1A_2-a_2A_1-a_3A=A_3.$$

Такимъ образомъ способъ этотъ можно описать слѣдующимъ образомъ:

1) Если первый членъ дѣлителя имѣетъ численный коэффиціентъ, то нужно раздѣлить каждый коэффиціентъ дѣлимаго и дѣлителя на этотъ коэффиціентъ и къ полученнымъ коэффиціентамъ примѣнить слѣдующія правила.

2) Написать коэффиціенты дѣлимаго въ горизонтальной строкѣ съ соотвѣтствующими имъ знаками, ставя 0 на мѣстѣ недостающихъ членовъ. Это дастъ горизонтальный рядъ $A+B+C+D+E...$

3) Провести вертикальную черту съ лѣвой стороны отъ этого ряда коэффиціентовъ и написать въ вертикальномъ столбцѣ коэффиціенты дѣлителя, измѣнивъ ихъ знаки и ставя 0, когда недостаетъ нѣкоторыхъ членовъ. Это дастъ вертикальный рядъ $-a_1-a_2-a_3...$, не принимая во вниманіе *единицу*, представляющую коэффиціентъ перваго члена дѣлителя.

4) Помножить каждый членъ этого вертикальнаго столбца на первый коэффиціентъ частнаго и расположить произведеніе въ первомъ *косвенномъ* ряду $-a_1A-a_2A-a_3A-...$ первый членъ котораго нужно написать подъ B.

5) Сложить члены второго вертикальнаго ряда справа отъ вертикальной черты; это дастъ коэффиціентъ второго члена частнаго, то-есть $B-a_1A=A$.

6) Съ помощью полученнаго такимъ образомъ коэффиціента составить слѣдующій *косой* рядъ; это дастъ рядъ $-a_1A_1-a_2A_1-a_3A_1-$, первый членъ котораго подписывается подъ C.

7) Сложить члены третьяго вертикальнаго ряда съ правой стороны отъ вертикальной черты; это дастъ коэффиціентъ третьяго члена частнаго, то-есть $C-a_1A_1-a_2A=A_2$.

8) Продолжать это дѣйствіе пока оно не кончится или пока не будутъ получены искомые члены.

807. Напримѣръ, раздѣлимъ $4x^4+3x^2-3x+1$ на x^2-2x+3;

	$4+0+3-3+1$
2	$\quad 8+16+14-26-92$
-3	$\quad\quad -12-24-21+39+138$
	$4+8+7-13-46-53$

Такимъ образомъ частное будетъ $4x^2+8x+7-13x^{-1}-46x^{-2}-53x^{-3}\ldots$. Или если пожелаемъ *остановиться* на членѣ $-46x^{-2}$, то получимъ

$$\frac{4x^4+3x^2-3x+1}{x^2-2x+3}=4x^2+8x+7-13x^{-1}-46x^{-2}-\frac{53x^{-1}-138x^{-2}}{x^2-2x+3}.$$

Если мы пожелаемъ *остановиться* на членѣ $-13x^{-1}$, то косой рядъ $-92+138$ долженъ быть отброшенъ, и результатъ будетъ

$$4x^2+8x+7-13x^{-1}-\frac{46-39x^{-1}}{x^2-2x+3}.$$

Если пожелаемъ остановиться на членѣ 7, то нужно также отбросить косой рядъ $-26+39$ и тогда результатъ будетъ

$$4x^2+8x+7-\frac{13x+20}{x^2-2x+3}.$$

808. Не лишне будетъ замѣтить, что пріемъ, показанный на примѣрѣ въ ст. 332, часто употребляется для выполненія алгебраическихъ приведеній. Положимъ напримѣръ, что требуется доказать слѣдующее тожество

$$(a+b+c)^4-(b+c)^4-(c+a)^4-(a+b)^4+a^4+b^4+c^4=12abc(a+b+c).$$

Мы видимъ, что если $a=0$, то выраженіе, составляющее лѣвую часть предложеннаго тожества, уничтожается; изъ этого мы заключаемъ, что данное выраженіе дѣлится на a. Подобнымъ-же образомъ заключаемъ, что оно дѣлится на b и c. Такимъ образомъ abc есть множитель этого выраженія. А такъ какъ выраженіе это *четвертой* степени, то въ немъ долженъ быть другой множитель, который долженъ быть первой степени, и такъ какъ выраженіе это *симметрично* въ отношеніи a, b и c, то множитель этотъ долженъ быть $a+b+c$.

Слѣдовательно выраженіе должно быть равно $kabc(a+b+c)$, гдѣ k означаетъ нѣкоторый численный коэффиціентъ, удерживающій одно и то-же значеніе при всякихъ значеніяхъ a, b, c. Чтобы опредѣлить k, мы можемъ приписать a, b, c такія значенія, какія для насъ будутъ удобны; напримѣръ, мы можемъ положить $b=a$ и $c=a$, и найдемъ, что $k=12$.

Такимъ образомъ предыдущее тожество доказано.

Подобно этому можетъ быть доказано слѣдующее тожество:

$$(a+b+c+d)^4+(a+b-c-d)^4+(a+c-b-d)^4+(a+d-b-c)^4$$
$$-(a+b+c-d)^4-(a+b-c+d)^4-(a-b+c+d)^4-(-a+b+c+d)^4$$
$$=192abcd.$$

809. Уничтожающіяся дроби. *Уничтожающейся дробью* мы будемъ называть такую, въ которой числитель и знаменатель оба обращаются въ нуль при извѣстномъ предположеніи относительно значенія той или другой заключающейся въ нихъ величины. Напримѣръ, числитель

и знаменатель дроби $\frac{x^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{4}}}$ уничтожаются при $x=a$, и дробь тогда принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$; такъ что мы не можемъ въ строгомъ смыслѣ сказать, что она имѣетъ какое нибудь опредѣленное значеніе. Но мы можемъ найти величину дроби, когда x имѣетъ нѣкоторое значеніе, отличное отъ a, и можемъ показать, что чѣмъ болѣе будетъ x приближаться къ a, тѣмъ ближе будетъ значеніе дроби приближаться къ извѣстной опредѣленной величинѣ. Дѣйствительно, положимъ $x=a+h$; тогда по теоремѣ о биномѣ дробь эта можетъ быть разложена такъ

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}h-\frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}h^2+\ldots-a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}a^{-\frac{3}{4}}h-\frac{3}{32}a^{-\frac{7}{4}}h^2+\ldots-a^{\frac{1}{4}}},\quad \text{то есть}\quad \frac{\frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}h+\ldots}{\frac{1}{4}a^{-\frac{3}{4}}-\frac{3}{32}a^{-\frac{7}{4}}h+\ldots}$$

Но если h будетъ уменьшаться, то числитель и знаменатель послѣдней дроби будутъ соотвѣтственно приближаться къ значеніямъ $\frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}$ и $\frac{1}{4}a^{-\frac{3}{4}}$; и беря h достаточно малымъ, мы можемъ достигнуть того, что числитель и знаменатель будутъ отличаться отъ этихъ значеній на количество по нашему желанію малое. Такимъ образомъ дробь можетъ какъ угодно близко подходить къ значенію $\frac{\frac{1}{3}a^{-2/3}}{\frac{1}{4}a^{-3/4}}$, то-есть къ $\frac{4}{3}a^{\frac{1}{12}}$. Это выражаютъ, говоря, что $\frac{4}{3}a^{\frac{1}{12}}$ есть *предѣлъ*, къ которому приближается эта дробь по мѣрѣ приближенія x къ a.

Мы можемъ также прійти къ этому результату, не пользуясь теоремой о биномѣ. Дѣйствительно, положимъ $x=y^{12}$ и $a=b^{12}$; тогда предложенная дробь обратится въ $\frac{y^4-b^4}{y^3-b^3}$; пока y не сдѣлалось еще абсолютно равнымъ b, мы можемъ раздѣлить числителя и знаменателя на $y-b$ и такимъ образомъ привести дробь къ виду $\frac{y^3+y^2b+yb^2+b^3}{y^2+yb+b^3}$. По мѣрѣ того какъ y приближается къ b, дробь эта приближается къ $\frac{4b}{3}$, и беря $y-b$ достаточно малымъ, мы можемъ достигнуть того, что дробь эта будетъ отличаться отъ $\frac{4b}{3}$ какъ угодно мало. Такимъ образомъ *предѣлъ* этой дроби по мѣрѣ приближенія y

къ b есть $\frac{4b}{3}$, то-есть *предѣлъ* этой дроби по мѣрѣ того какъ x прибли-

жается къ a, будетъ $\frac{4}{3}a^{\frac{1}{12}}$.

Вопросы относительно дробей, принимающихъ *неопредѣленный видъ*, и *предѣловъ* принадлежатъ Дифференціальному Вычисленію, къ которому мы и отсылаемъ читателя для полученія болѣе обширныхъ свѣдѣній.

810. Теперь мы дадимъ еще двѣ статьи, которыя составятъ дополненіе къ главѣ о перестановкахъ и сочетаніяхъ; предложенія, содержашіяся въ нихъ, даны г. Джеффери.

811. *Найти число сочетаній изъ* n *предметовъ, взятыхъ по* 1, 2, 3, ... *по* n, *если между ними* p *предметовъ будетъ одного рода*, q—*другого рода*, r—*третьяго рода, и такъ далѣе.*

Пусть мы имѣемъ n буквъ, и предположимъ, что p изъ нихъ равны a, q равны b, r равны c, и такъ далѣе. Произведеніе $(1+ax+a^2x^2+\ldots+a^px^p)(1+bx+b^2x^2+\ldots+b^qx^q)(1+cx+c^2x^2\ldots+c^rx^r)\ldots$ содержитъ сочетаніе изъ n буквъ, взятыхъ по 1, по 2, по 3 ... по n, именно это будутъ соотвѣтственно коэффиціенты при x, x^2, x^3, ... x^n. *Число* сочетаній въ каждомъ случаѣ найдется, если уравнять a, b, c, ... единицѣ. Такимъ образомъ число сочетаній изъ n буквъ, взятыхъ по k, будетъ коэффиціентомъ при x^k въ разложеніи

$$(1+x+x^2+\ldots+x^p)(1+x+x^2+\ldots+x^q)(1+x+x^2+\ldots+x^r)\ldots$$

Число сочетаній, когда буквы взяты по k—то-же самое, какъ и число ихъ, когда буквы взяты по $n-k$; это можетъ быть доказано по ст. 495.

Полное число сочетаній найдется, если уравнять x въ предыдущемъ выраженіи единицѣ и вычесть единицу изъ результата, такъ какъ первый членъ разложенія этого выраженія не содержитъ x, а потому и не означаетъ числа какихъ нибудь сочетаній. Такимъ образомъ полное число будетъ $(p+1)(q+1)(r+1)\ldots.-1$.

Разлагаемое выраженіе можетъ быть написано такъ:

$$\frac{1-x^{p+1}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{q+1}}{1-x}\cdot\frac{1-x^{r+1}}{1-x}\ldots.,$$

то-есть $(1-x^{p+1})(1-x^{q+1})(1-x^{r+1})\ldots(1-x)^{-\mu}$,

гдѣ μ есть число различнаго вида буквъ.

Напримѣръ, возьмемъ буквы слова *notation*; мы найдемъ, что число сочетаній, когда буквы будутъ браться по 1, по 2, ... по 8, будетъ соотвѣтственно 5, 13, 22, 26, 22, 13, 5, 1.

812. *Найти число перестановокъ изъ* n *предметовъ, берущихся по* 1, *по* 2, *по* 3 .... *по* n; *когда между ними находится* p *предметовъ одного рода,* q—*другого рода,* r—*третьяго рода, и т. д.*

Пусть мы имѣемъ n буквъ, и предположимъ, что p изъ нихъ равны a, q изъ нихъ равны b, r изъ нихъ равны c, и такъ далѣе.

Составимъ произведеніе слѣдующихъ рядовъ:

$$1+Pax+\frac{P^2a^2x^2}{1.2}+\frac{P^3a^3x^3}{\lfloor\underline{3}}+\ldots+\frac{P^pa^px^p}{\lfloor\underline{p}},$$

$$1+Pbx+\frac{P^2b^2x^2}{1.2}+\frac{P^3b^3x^3}{\lfloor\underline{3}}+\ldots+\frac{P^qb^qx^q}{\lfloor\underline{q}},$$

$$1+Pcx+\frac{P^2c^2x^2}{1.2}+\frac{P^3c^3x^3}{\lfloor\underline{3}}+\ldots+\frac{P^rc^rx^r}{\lfloor\underline{r}},$$

. . . . . .

Послѣ того какъ произведеніе составлено и расположено по степенямъ Px, перемѣнимъ P на 1, P^2 на $\lfloor\underline{2}$, P^3 на $\lfloor\underline{3}$ и такъ далѣе; тогда коэффиціентъ x^k въ результатѣ будетъ состоять изъ перестановокъ n буквъ, взятыхъ по k. Справедливость этого можетъ быть обнаружена изслѣдованіемъ способа составленія каждаго коэффиціента въ частныхъ случаяхъ; напримѣръ, положимъ $n=1$ и p, q, ... каждое $=1$; или положимъ $n=4$, $p=2$, $q=1$, $r=1$. *Число* перестановокъ найдется, полагая a, b, c ... каждое равнымъ единицѣ; это можетъ быть сдѣлано прежде составленія произведенія предыдущаго ряда.

Напримѣръ, возьмемъ буквы слова *notation*; мы найдемъ, что число перестановокъ, когда буквы будутъ браться по 1, по 2, ... по 8, соотвѣтственно будетъ 5, 23, 96, 354, 1110, 2790, 5040, 5040.

813. Дадимъ теперь нѣсколько дальнѣйшихъ замѣчаній по Теоріи Вѣроятностей.

Въ своей Алгебрѣ д-ръ Вудъ замѣтилъ, что нѣтъ предмета, въ которомъ учащійся такъ легко впадалъ бы въ ошибки, какъ въ Вычисленіи вѣроятностей. Онъ говоритъ: „Достаточно одного примѣра, чтобъ показать опасность составленія поспѣшныхъ сужденій даже въ самомъ простомъ случаѣ. Вѣроятность выпаденія одного очка на одной кости равна $\frac{1}{6}$, и такъ какъ будетъ такая-же вѣроятность выпаденія одного очка при вторичномъ бросаніи, то можно было-бы предположить, что вѣроятность выпаденія одного очка при двухъ бросаніяхъ будетъ $\frac{2}{6}$. Но такое заключеніе было-бы не вѣрнымъ, потому что изъ этого способа разсужденія слѣдовало-бы, что при шести бросаніяхъ несомнѣнно выпадетъ одно очко. Ошибка, которую легко замѣтить, происходитъ отъ

подразумѣваемаго предположенія, что необходимо должно быть произведено второе бросаніе, между тѣмъ какъ въ немъ не было-бы надобности, если-бы одно очко выпало съ перваго разу".

Это извлеченіе мы сдѣлали по причинѣ важныхъ замѣчаній, которыя оно содержитъ, а также и съ цѣлью обратить вниманіе на послѣднія слова, которыя для начинающихъ часто кажутся затруднительными. Слѣдуетъ замѣтить, для избѣжанія двусмысленности, что разбираемая задача должна быть выражена слѣдующимъ образомъ: Найти вѣроятность выпаденія одного очка по крайней мѣрѣ при двухъ бросаніяхъ. Послѣднія слова д-ра Вуда указываютъ на слѣдующій способъ ея рѣшенія. Вѣроятность выпаденія одного очка въ первый разъ равна $\frac{1}{6}$; если выпадетъ одно очко при этомъ бросаніи, то нѣтъ надобности во второмъ бросаніи. Но положимъ, что выпаденія одного очка въ первый разъ не случится; вѣроятность этого равна $\frac{5}{6}$, и тогда вѣроятность успѣха въ слѣдующемъ случаѣ равна $\frac{1}{6}$. Такимъ образомъ вѣроятность имѣть одно очко по крайней мѣрѣ въ два бросанія будетъ $\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$, т.-е $\frac{11}{36}$. И ошибка того, кто принимаетъ вѣроятность этого въ $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$, происходитъ оттого, что въ произведеніи $\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$ онъ принимаетъ $\frac{5}{6}$ за 1. Допуская такимъ образомъ, что всегда должно быть производимо второе бросаніе, хотя-бы это послѣднее и не было необходимо, вслѣдствіе успѣшности перваго бросанія.

Это рѣшеніе совершенно правильно, но вѣроятно тотъ, кто принимаетъ вѣроятность за $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$, не удовлетворится имъ: для него оно будетъ не указаніемъ его ошибки, но совсѣмъ другимъ рѣшеніемъ вопроса; и онъ можетъ сказать, что *здѣсь не можетъ быть никакой неувѣренности относительно второго бросанія, потому что два бросанія предоставляются намъ задачей, или по крайней мѣрѣ намъ позволяется ихъ сдѣлать, если мы того желаемъ.*

Въ дѣйствительности ошибка состоитъ въ пренебреженіи слѣдующимъ разсужденіемъ: когда событія *взаимно исключаютъ* другъ друга, такъ что предположеніе, что произойдетъ одно событіе несовмѣстимо съ предположеніемъ, что произойдетъ какое нибудь другое событіе, *тогда, но не иначе*, вѣроятность того или другого изъ событій есть *сумма* вѣроятностей отдѣльныхъ событій.

Въ настоящей задачѣ успѣхъ при первомъ бросаніи несовмѣстимъ

съ успѣхомъ при второмъ бросаніи, а потому мы не можемъ брать суммы вѣроятностей за вѣроятность успѣха въ томъ или другомъ бросаніи.

Легко дать правильное рѣшеніе задачи другими способами. Такъ, кромѣ рѣшенія Вуда было дано другое въ ст. 735. Мы можемъ поступать также слѣдующимъ образомъ. Желаемое событіе можетъ быть разсматриваемо какъ одно изъ слѣдующихъ трехъ: успѣхъ въ первомъ случаѣ и неуспѣхъ во второмъ, неуспѣхъ въ первомъ случаѣ и успѣхъ во второмъ, успѣхъ въ первомъ случаѣ и успѣхъ-же во второмъ. Вѣроятности этихъ событій соотвѣтственно будутъ $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$, $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$, причемъ эти событія взаимно исключаютъ другъ друга, такъ что вѣроятность имѣть то или другое изъ нихъ будетъ $\frac{5}{36}+\frac{5}{36}+\frac{1}{36}$, то-есть $\frac{11}{36}$.

814. Этотъ разборъ естественно приводитъ насъ къ изслѣдованію вѣроятности того, что случится одно или болѣе изъ событій, исключающихъ или не исключающихъ другъ друга. Дадимъ теперь нѣсколько теоремъ по этому вопросу.

I. Пусть будетъ извѣстное число независимыхъ событій, соотвѣтственныя вѣроятности которыхъ равняются α, β, γ,...; требуется найти вѣроятность того, что случится покрайней мѣрѣ одно изъ нихъ.

Вѣроятность того, что ни одно изъ нихъ не случится, будетъ $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\ldots$; слѣдовательно вѣроятность того, что произойдетъ покрайней мѣрѣ одно изъ нихъ, будетъ $1-(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\ldots$ Это можно написать такъ: $\Sigma\alpha-\Sigma\alpha\beta+\Sigma\alpha\beta\gamma-\ldots$ или $P_1-P_2+P_3-P_4+\ldots$, гдѣ P_1 сумма вѣроятностей одиночныхъ событій, P_2 сумма вѣроятностей паръ событій, P_3 сумма вѣроятностей троекъ событій, и такъ далѣе.

II. Сейчасъ доказанная теорема справедлива даже и тогда, когда событія *не будутъ независимыми*; т. е. вѣроятность того, что случится покрайней мѣрѣ одно изъ событій, будетъ $P_1-P_2+P_3-P_4+\ldots$ гдѣ P_1, P_2, P_3, $P_4\ldots$ имѣютъ то-же значеніе, какъ и раньше.

Дѣйствительно, разсмотримъ только два событія A и B; пусть n означаетъ все число равно-вѣроятныхъ случаевъ, $n\alpha$ число, въ которыхъ встрѣчается A, $n\beta$ число, въ которыхъ встрѣчается B, $n\alpha\beta$ число, въ которыхъ встрѣчаются A и B. Чтобы найти число случаевъ, въ которыхъ не встрѣчаются ни A ни B, мы поступаемъ такъ: отъ n отнимаемъ $n\alpha$ и $n\beta$; такимъ образомъ мы отнимаемъ слишкомъ много случаевъ, потому что эти случаи въ числѣ $n\alpha\beta$, въ которыхъ встрѣчаются A и B одновременно, отнимаются дважды, такъ что нужно прибавить обратно $n\alpha\beta$. Поэтому все число случаевъ, въ которыхъ не встрѣчается ни A, ни B, будетъ $n-(n\alpha+n\beta)+n\alpha\beta$.

Отсюда слѣдуетъ, что число случаевъ, въ которыхъ встрѣчается покрайней мѣрѣ одно изъ событій, будетъ $n\alpha+n\beta-n\alpha\beta$. Слѣдовательно вѣроятность, что случится хотя одно изъ событій, будетъ

$$= \frac{n\alpha + n\beta - n\alpha\beta}{n} = \frac{n\alpha + n\beta}{n} - \frac{n\alpha\beta}{n} = P_1 - P_2.$$

Подобнымъ-же образомъ можно разсуждать и во всякомъ другомъ случаѣ.

III. Предполагая, что имѣется въ виду n событій, требуется найти вѣроятность, что случатся извѣстные m изъ нихъ, и не больше.

Положимъ, что имѣютъ случиться событія, вѣроятности которыхъ $\alpha, \beta, \gamma\ldots$, и не случатся событія, вѣроятности которыхъ λ, μ, ν. Тогда, если событія эти независимы, то искомая вѣроятность будетъ

$$\alpha\beta\gamma\ldots\ (1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu)\ldots;$$

то-есть $\alpha\beta\gamma\ldots$ до m множителей $\{1-\Sigma\lambda+\Sigma\lambda\mu-\Sigma\lambda\mu\nu+\ldots\}$.

Это мы можемъ означить чрезъ $Q_m - Q_{m+1} + Q_{m+2} - Q_{m+3} + \ldots$, гдѣ Q_m есть вѣроятность того, что случатся m извѣстныхъ событій, Q_{m+1} есть сумма вѣроятностей того, что случится всякая совокупность $m+1$ событій, заключающихъ m извѣстныхъ событій, Q_{m+2} есть сумма вѣроятностей того, что случится всякая совокупность $m+2$ событій, заключающихъ m извѣстныхъ событій, и такъ далѣе.

IV. Какъ и раньше, мы можемъ показать, что теорема гл. III справедлива даже и тогда, когда событія не будутъ независимы между собою.

V. Требуется найти вѣроятность того, что случатся *какія нибудь* m изъ ожидаемыхъ событій, и не болѣе.

По предыдущему обозначенію это будетъ

$$\Sigma Q_m - \Sigma Q_{m+1} + \Sigma Q_{m+2} - \Sigma Q_{m+3} + \ldots$$

Можетъ случиться, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ

$$\Sigma Q_m = \frac{\lfloor n}{\lfloor m \lfloor n-m}\, Q_m, \quad \Sigma Q_{m+1} = \frac{\lfloor n}{\lfloor m+1 \lfloor n-m-1}\, Q_{m+1}, \text{ и такъ далѣе;}$$

это будетъ случай, когда событія всѣ будутъ сходны.

VI. Въ II мы нашли вѣроятность того, что должно случиться *покрайней мѣрѣ* одно событіе, а въ V—вѣроятность того, что должно случиться *только* одно событіе; вычитая второй результатъ изъ перваго, мы найдемъ вѣроятность того, что должны случиться *покрайней мѣрѣ два событія*. Тогда опять изъ V мы узнаемъ вѣроятность того, что случатся только два событія; вычитая это изъ вѣроятности того, что *случатся покрайней мѣрѣ два событія*, мы получимъ вѣроятность того, что случатся *покрайней мѣрѣ три событія*; и такъ далѣе.

Разные примѣры.

1. Если дано

$$x = by + cz + du,\ y = ax + cz + du,\ z = ax + by + du,\ u = ax + by + cz,$$

то доказать, что $1 = \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d}$; причемъ предполагается, что x, y, z, u всѣ не равны между собою.

2. Если $\frac{x}{y+z}=a$, $\frac{y}{z+x}=b$, $\frac{z}{x+y}=c$, то найти соотношеніе между a, b, c и показать, что $\frac{x^2}{a(1-bc)}=\frac{y^2}{b(1-ca)}=\frac{z^2}{c(1-ab)}$.

3. Найти соотношеніе между a, b, c, если дано

$$\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{y}{b}+\frac{b}{y}=\frac{z}{c}+\frac{c}{z},\quad xyz=abc,$$

и

$$x^2+y^2+z^2+2(ab+ac+bc)=0.$$

4. Найти соотношеніе между a, b, c, если дано

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=a,\quad \frac{z}{x}+\frac{x}{z}=b,\quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=c.$$

5. Исключить x, y, z изъ уравненій

$$x^2(y+z)=a^3,\ y^2(x+z)=b^3,\ z^2(x+y)=c^3;\ xyz=abc.$$

6. Исключить a и b изъ уравненій

$$\frac{a^3-x^3}{b^3-y^3}=\frac{2x+3y}{3x+2y},\ a^3-b^3=(x-y)^3,\ a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}=z^{\frac{3}{2}}.$$

7. Исключить x и y изъ уравненій

$$x+y=a,\ x^3+y^3=b^3,\ x^5+y^5=c^5.$$

8. Исключить x изъ уравненій

$$32\frac{c}{a}=\left(\frac{x}{a}\right)^5+10\frac{x}{a}+5\left(\frac{a}{x}\right)^3,\ 32\frac{a}{c}=\left(\frac{a}{x}\right)^5+10\frac{a}{x}+5\left(\frac{x}{a}\right)^3.$$

9. Исключить x, y, z изъ уравненій

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=\alpha,\ \frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}=\beta,\ \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)=\gamma.$$

10. Исключить x и y изъ уравненій

$$ax+by=0,\ x+y+xy=0,\ x^2+y^2-1=0.$$

11. Исключить x и y изъ уравненій

$$y^2-x^2=\alpha y-\beta x,\ 4xy=\alpha x+\beta y,\ x^2+y^2=1.$$

12. Если $(x+y)^2=4c^2xy$, $(y+z)^2=4a^2yz$, $(z+x)^2=4b^2zx$, то показать, что $a^2+b^2+c^2\pm2abc=1$.

13. Исключить a изъ $\frac{x}{a^2+x^2}=\frac{2y}{a^2+y^2}=\frac{4z}{a^2+z^2}$.

14. Исключить x и y изъ уравненій

$$4(x^2+y^2)=ax+by,\ 2(x^2-y^2)=ax-by,\ xy=c^2.$$

15. Показать, что лишь при условіи $abc+2a'b'c'=aa'^2+bb'^2+cc'^2$, слѣдующія уравненія могутъ быть совмѣстными:

$$a=xx',\ b=yy',\ c=zz',\ 2a'=yz'+zy',\ 2b'=zx'+xz',\ 2c'=xy'+yx'.$$

16. Найти число перестановокъ, которыя можно составить изъ буквъ англійскаго слова *examination*, беря ихъ по три.

17. Найти вѣроятность того, что одна, двѣ, три карты одной и той-же масти лежатъ вмѣстѣ въ колодѣ картъ, состоящей изъ m мастей, по n картъ въ каждой масти, означенныхъ нумерами 1, 2, 3... n.

18. Прямоугольный садъ окруженъ аллеей и раздѣленъ на mn прямоугольныхъ куртинъ $m-1$ аллеями, параллельными двумъ сторонамъ и $n-1$ аллеями, параллельными двумъ другимъ сторонамъ. Найти число способовъ, чтобы никакіе два изъ нихъ не были во всемъ сходны, которыми можно пройти изъ одного угла сада въ другой, такъ чтобы пройденное разстояніе равнялось половинѣ периметра прямоугольника.

19. Если x будетъ правильная дробь, то показать, что

$$\frac{x}{1-x^2}-\frac{x^3}{1-x^6}+\frac{x^5}{1-x^{10}}-\ldots=\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^3}{1+x^6}+\frac{x^5}{1+x^{10}}+\ldots$$

20. Если x есть правильная дробь, то показать, что

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots}=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ldots.$$

21. Исключить x, y, z изъ уравненій

$$(x-y)(y-z)(z-x)=p^3,\quad (x+y)(y+z)(z+x)=q^3,$$
$$(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)=r^6,\quad (x^4+y^4)(y^4+z^4)(z^4+x^4)=s^{12}.$$

22. Показать, что если $aX+bY+cZ=0$ и $a_1X+b_1Y+c_1Z=0$; гдѣ $X=ax+a_1x_1+a_2$, $Y=bx+b_1x_1+b_2$, $Z=cx+c_1x_1+c_2$; то

$$X^2+Y^2+Z^2=\frac{\{a_2(bc_1-b_1c)+b_2(ca_1-c_1a)+c_2(ab_1-a_1b)\}^2}{(bc_1-b_1c)^2+(ca_1-c_1a)^2+(ab_1-a_1b)^2}.$$

23. Если a_1, a_2,... a_n и b_1, b_2,... b_n будутъ два ряда положительныхъ чиселъ, расположенные каждый въ нисходящемъ порядкѣ ихъ величины, то показать, что $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}$ меньше, а $\frac{a_1}{b_n}+\frac{a_2}{b_{n-1}}+\ldots+\frac{a_n}{b_1}$ больше, чѣмъ въ томъ случаѣ, когда знаменатели b_1, b_2, b_3,... b_n были-бы расположены въ другомъ порядкѣ подъ числителями a_1, a_2, a_3... a_n.

24. Если a меньше b, то показать, что рядъ, въ которомъ общій членъ есть $-\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n-1}\right)\frac{(b-a)^n}{b^{n-1}}$, равенъ логарнему отъ $\left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$.

25. Если a меньше b, то показать, что $\left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$ увеличится отъ прибавленія одной и той-же величины къ a и b.

РАЗНЫЯ ЗАДАЧИ.

1. Упростить $x-[2y+\{3z-3x-(x+y)\}]+2x-(y+3z)$.

2. Раздѣлить $a^2x^8+(2ac-b^2)x^4+c^2$ на ax^4-bx^2+c.

3. Привести въ простѣйшій видъ $\dfrac{5x^3+2x^2-15x-6}{7x^3-4x^2-21x+12}$.

4. Приложить $\dfrac{3x-a}{5x+3a}$ къ $\dfrac{x+3a}{7x+9a}$;

вычесть $\dfrac{a-x}{2a^2+3ax+x^2}$ изъ $\dfrac{2a+x}{a^2-x^2}$.

5. Рѣшить уравненіе $\dfrac{4x+1}{15}-\dfrac{5x-1}{3}=x-2$.

6. Рѣшить $10x-4y=11$, $3x+2y=14\frac{1}{2}$.

7. A, проходящій по $3\frac{1}{4}$ версты въ часъ, выходитъ $2\frac{1}{2}$ часами раньше B, который идетъ по той-же дорогѣ со скоростью $4\frac{1}{2}$ верстъ въ часъ: найти, когда B встрѣтитъ A.

8. Размѣнять билетъ во 100 фунтовъ стерлинговъ на гинеи и полукроны, чтобы полукронъ было 48 больше чѣмъ гиней. Сколько нужно взять тѣхъ и другихъ? (Фунтъ=20 шиллингамъ, гинея=21 шиллингъ, полукрона=$2\frac{1}{2}$ шиллинга).

9. Найти квадратный корень изъ $a^4+2a^3-a+\dfrac{1}{4}$.

10. Рѣшить уравненіе $\left(\dfrac{3}{x}-1\right)(3x-1)=\dfrac{5}{2}$.

11. Если $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, $c=3$, $d=\frac{1}{5}$, то найти значеніе выраженія

$$a-[2a-3b-\{4a-5b-6c-(7a-8b-9c-10d)\}].$$

12. Умножить $x^2+(2a+3b)x+6ab$ на $x^2-(2a+3b)x+6ab$, и раздѣлить $14x^5-11x^4y-66x^3y^2-7x^2y^3+49xy^4+15y^5$ на $2x^2-3xy-5y^2$.

13. Найти наименьшее кратное для x^2+5x+6 и x^2+6x+8.

14. Вычесть $\dfrac{3x+3a}{3x+4a}$ изъ $\dfrac{23x^2+18ax+17a^2}{12x^2+31ax+20a^2}$.

15. Рѣшить уравненіе $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{3}{x-3}$.

16. Рѣшить уравненія $7x-9y=23$, $9x-7y=57$.

17. Найти, въ какое время между 9 и 10 часами часовая и минутная стрѣлки совпадаютъ?

18. A, исполнивши три пятыхъ нѣкоторой работы въ 30 дней, приглашаетъ къ себѣ на помощь B и вмѣстѣ съ нимъ оканчиваетъ работу въ 10 дней; найти, во сколько дней каждый изъ нихъ могъ-бы окончить работу одинъ.

19. Найти квадратный корень изъ $4x^2-12xy+9y^2+4xz-6yz+z^2$.

20. Рѣшить уравненіе $\frac{3}{x-1}-\frac{x-4}{x-3}=1$.

21. Если $a=1$, $b=2$, $c=\frac{1}{6}$, $d=\frac{1}{9\frac{1}{2}}$, то найти значеніе выраженія

$$a-[3a-5b-\{7a-9b-11c-(13a-15b-17c-19d)\}].$$

22. Умножить $x^2+(3a-2b)x-6ab$ на $x^2+(3b-2a)x-6ab$ и раздѣлить $x^4-56x+15$ на $1-4x+x^2$.

23. Найти общій наибольшій дѣлитель для x^2-4, $x^2+10x+16$ и $x^2-7x-18$.

24. Упростить выраженіе $\frac{2x^2-x+2}{4x^3+3x+2}\times\frac{4x^2-1}{2x-1}$.

25. Рѣшить уравненіе $\frac{x-1}{3}+\frac{11x-3}{20}-\frac{3x-9}{10}=2\frac{1}{6}$.

26. Рѣшить уравненія $\frac{x+y}{3}+\frac{x-y}{4}=\frac{11}{12}$, $5x-3y=6$.

27. Нѣкто идетъ изъ мѣста A въ мѣсто B, отстоящее отъ перваго на 16 верстъ, проходя по $4\frac{4}{9}$ версты въ часъ; въ то-же время другой пѣшеходъ идетъ изъ B въ A, проходя версту въ 18 минутъ. Найти мѣсто ихъ встрѣчи.

28. Въ концертной залѣ извѣстное число посѣтителей сидятъ на скамьяхъ равной длины; если-бы скамеекъ было десятью больше, то на каждой скамейкѣ могло-бы сидѣть однимъ человѣкомъ меньше; а если-бы скамеекъ было пятью меньше, то на каждой скамейкѣ тогда сидѣло-бы двумя человѣками больше. Найти число скамеекъ и число людей, сидѣвшихъ на каждой скамейкѣ.

29. Найти квадратный корень изъ $x^6-4x^5+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4$.

30. Рѣшить уравненіе $11x^2-11\frac{1}{4}=9x$.

31. Если $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$, то найти значеніе выраженій

$$\frac{ab+cd}{bc-ad},\quad c^b-b^c,\quad \sqrt[3]{(d^2+3c+b)}.$$

32. Помножить $0.3+x^2$ на $0.2-x$ и найти значеніе этого произведенія, когда $x=0.1$.

33. Привести къ простѣйшему виду дробь $\frac{x^4-115x+24}{24x^4-115x^3+1}$.

34. Сложить между собою $\frac{1+x}{1-x}$, $\frac{1-x}{1+x}$ и $\frac{1+x^2}{1-x^2}$.

35. Рѣшить уравненіе $(x-3)^3-3(x-2)^3+3(x-1)^3-x^3=9-x$.

36. Рѣшить уравненіе $5y-3x=2$, $8y-5x=1$.

37. Сельскій хозяинъ купилъ одинаковое число овецъ двухъ сортовъ: однихъ по 3 рубля за каждую и другихъ по 4 рубля за каждую. Если-бы онъ издержалъ свои деньги поровну на овецъ обоего сорта, то онъ имѣлъ-бы двумя овцами больше, чѣмъ теперь. Найти, сколько овецъ онъ купилъ?

38. Сумма въ 1770 рублей распредѣлена между 15 мужчинами, 20 женщинами и 30 дѣтьми такимъ образомъ, что мужчина и ребенокъ вмѣстѣ получили столько, сколько двѣ женщины, а всѣ женщины вмѣстѣ получили 600 рублей. Найти, сколько они соотвѣтственно получили?

39. Найти квадратный корень изъ $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{4x^2}-\frac{x}{y}+\frac{y}{2x}-\frac{3}{4}$.

40. Рѣшить уравненіе $\frac{2x}{x-4}+\frac{4x-3}{x+1}=9$.

41. Если $a=1$, $b=3$, $c=5$, $d=7$, то найти значеніе выраженій $\frac{cd-ab}{bc-ad}$, $b^{c-2}-c^{b-1}$, $\sqrt[3]{(d^2+3c)}$.

42. Показать, что

$$a(a-x)(a-2x)=(a-b)(a-b-x)(a+2b-2x)+b(b-x)(3a-2b-2x).$$

43. Найти общій наибольшій дѣлитель и наименьшее кратное выраженій $x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$ и x^3-1.

44. Упростить выраженіе $\frac{x^2+5x+6}{x^2+5x}\times\frac{x^2+6x+5}{x^2+3x}$.

45. Рѣшить $\frac{1}{x+1}+\frac{4}{2x-1}+\frac{9}{3x-1}=\frac{36}{6x-1}$.

46. Рѣшить уравненія

$$2x+3y-8z+35=0,\quad 7x-4y+z-8=0,\quad 12x-5y-3z+10=0.$$

47. Найти, сколько ведеръ должно примѣшать къ 80 ведрамъ спирта, стоющаго 7 р. 50 к. за ведро, чтобы, продавая смѣсь по 6 рублей за ведро, получить 10 процентовъ прибыли.

48. A и B вмѣстѣ могутъ исполнить извѣстную работу въ 12 дней, A и C—въ 15 дней, B и C—въ 20 дней. Найти, во сколько дней исполнятъ они ее, работая всѣ вмѣстѣ.

49. Найти квадратный корень изъ $a-c+2\sqrt{(ab+bc-ca-b^2)}$.

50. Рѣшить уравненіе $x=\cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-x}}}$.

51. Упростить выраженіе

$$(a+b+c)(x+y+z)+(a+b-c)(x+y-z)$$
$$+(b+c-a)(y+z-x)+(c+a-b)(z+x-y).$$

52. Если $s=\dfrac{a+b+c}{2}$, то показать, что

$$\{(s-a)+(s-b)\}^3=(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)c.$$

53. Найти общій наибольшій дѣлитель выраженій $x^4-2x^3y+5x^2y^2-2xy^3+4y^4$ и $x^4-3x^3y+6x^2y^2-3xy^3+5y^4$.

54. Упростить $\dfrac{x-a}{x-b}+\dfrac{x-b}{x-a}-\dfrac{(a-b)^2}{(x-a)(x-b)}$.

55. Рѣшить уравненіе $(3x-1)^2+(4x-2)^2=(5x-3)^2$.

56. Рѣшить $\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{y-3}{y+3}=2$, $\dfrac{x-3}{2x+3}+\dfrac{y-3}{2y+3}=1$.

57. Для извѣстной работы нанято трое A, B, C. Черезъ 3 дня когда сдѣлана была треть работы, A былъ разсчитанъ; еще черезъ 4 дня разсчитанъ былъ B, причемъ въ это время была сдѣлана еще другая треть работы; послѣ этого C оканчиваетъ работу черезъ 5 дней. Найти, во сколько дней каждый изъ нихъ могъ бы исполнить работу, занимаясь ею одинъ.

58. Пѣшеходъ идетъ изъ A въ B на разстояніи $11\frac{1}{4}$ верстъ впродолженіи 2 ч. $17\frac{1}{2}$ минутъ и возвращается назадъ, употребивъ 2 ч. 20 м. Скорость его ходьбы при поднятіи на гору, при спускѣ подъ гору и по ровной дорогѣ соотвѣтственно выражается числами $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{4}$ и $4\frac{7}{8}$ версты въ часъ. Найти длину ровной дороги между A и B.

59. Найти кубическій корень изъ

$$8x^9-12x^8+6x^7-37x^6+36x^5-9x^4+54x^3-27x^2-27.$$

60. Рѣшить уравненіе $\dfrac{(x+a)(x+mb)}{(x-ma)(x-b)}=\dfrac{(mx+a)(x+b)}{(x-a)(mx-b)}$.

61. Упростить выраженіе

$$24\left\{x-\frac{1}{2}(x-1)\right\}\left\{x-\frac{2}{3}(x-2)\right\}\left\{x-\frac{3}{4}(x-1\tfrac{1}{3})\right\},$$

и вычесть результатъ изъ $(x+2)(x+3)(x+4)$.

62. Раздѣлить $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{x^2}-2\right)^2$ на $\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}$.

63. Найти общій наибольшій дѣлитель выраженій
$5x^3-18x^2y+11xy^2-6y^3$ и $7x^2-23xy+6y^2$.

64. Упростить выраженіе $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+\frac{2x(x-1)^2}{x^4+x^2+1}+\frac{2x^2(x^2-1)^2}{x^8+x^4+1}$.

65. Рѣшить $\frac{4}{x-6}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x+4}{x-5}-2\frac{x-1}{x-4}$.

66. Рѣшить $\frac{x-2a}{x-3a}+\frac{y-4b}{y-3b}=2$, $\frac{x+2a}{x+a}=\frac{y+5b}{y+3b}$.

67. Нѣкто купилъ домъ, причемъ употребилъ на его поправку 4 процента той суммы, которую за него заплатилъ; затѣмъ домъ стоялъ безъ употребленія втеченіе года, давъ 5 процентовъ убытка на всю свою стоимость. Послѣ этого владѣлецъ дома продалъ его вновь за 11920 рублей, получивъ 10 процентовъ на сумму, заплаченную раньше за домъ. Найти, сколько заплатилъ онъ за домъ.

68. Извѣстное рѣшеніе было принято въ собраніи большинствомъ голосовъ, которое равнялось одной трети числа голосовъ, поданныхъ противною стороной; но если-бы изъ того-же числа голосовъ 10 были поданы противъ, то рѣшеніе принято было бы большинствомъ одного голоса. Найти число голосовъ, поданныхъ за и противъ предложенія.

69. Рѣшить уравненіе $\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{(x+a-b)}=\sqrt{b}$.

70. Рѣшить уравненіе $(x-2)(x-3)=\frac{155\times 78}{77^2}$.

71. Если $a=2$, $b=3$, $c=6$, $d=5$, то найти значеніе выраженія
$\sqrt[3]{\{(a+c-b)^2d\}}+\sqrt[3]{\{(b+d)(5d-4c)\}}+\sqrt[3]{\{(c-a)(d-b)\}}$.

72. Показать, что
$x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz=(y+z)(z+x)(x+y)$.

73. Найти общій наибольшій дѣлитель выраженій
$5x^3-19x^2+55x-425$ и $4x^3-15x^2-38x+65$.

74. Упростить $\frac{bc(x-a)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca(x-b)^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab(x-c)^2}{(c-a)(c-b)}$.

75. Рѣшить уравненіе $\sqrt{\{(x-a)^2+2ab+b^2\}}=x-a+b$.

76. Рѣшить $ax+cy+bz=cx+by+az=bx+ay+cz$
$=a^3+b^3+c^3-3abc$.

77. A и B выходятъ одновременно изъ одного и того-же мѣста и идутъ въ перегонку по круговому пути. Черезъ полчаса A прошелъ цѣлыхъ три круга, а B—четыре съ половиной. Принимая, что каждый идетъ равномѣрно, найти время ближайшей встрѣчи B съ A.

78. Въ извѣстный день макрели продавались по извѣстной цѣнѣ за дюжину, а на слѣдующій день на полтинникъ можно было купить вдвое больше рыбъ, чѣмъ сколько дюжинъ ихъ можно было купить раньше на 10 рублей; стоимость 20 макрелей, изъ которыхъ десять куплено въ одинъ день, а десять—въ другой равняется 1 р. $8\frac{1}{3}$ к. Найти цѣну одной макрели въ тотъ и другой день.

79. Если $x=\sqrt[3]{(a+\sqrt{a^3+b^3})}+\sqrt[3]{(a-\sqrt{a^2+b^3})}$, то показать, что

$$x^3+3bx-2a=0.$$

80. Рѣшить уравненіе $(x^3+8x^2+16x-1)^{\frac{1}{3}}-x=3$.

81. Показать, что $(p+q+r)^4=$

$$4(p^3+q^3+r^3+3pqr)(p+q+r)+6q^2r^2+6r^2p^2+6p^2q^2 \\ -3p^4-3q^4-3r^4.$$

82. Если $X=ax+cy+bz$, $Y=cx+by+az$, $Z=bx+ay+cz$, то показать, что $X^2+Y^2+Z^2-YZ-ZX-XY$

$$=(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy).$$

83. Найти общій наибольшій дѣлитель выраженій $7x^4-10ax^3+3a^2x^2-4a^3x+4a^4$ и $8x^4-13ax^3+5a^2x^2-3a^3x+3a^4$.

84. Упростить $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{2x}{1+x^2}-\dfrac{4x^3}{1+x^4}-\dfrac{8x^7}{1+x^8}$.

85. Рѣшить уравненіе $\dfrac{4x^3+4x^2+8x+1}{2x^2+2x+3}=\dfrac{2x^2+2x+1}{x+1}$.

86. Рѣшить уравненія

$$x+y+z=a+b+c,$$
$$ax+by+cz=bc+ca+ab,$$
$$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0.$$

87. Настоящее состояніе одного желѣзнодорожнаго общества дало-бы дивиденду по 6 процентовъ на пай, если-бы не было никакого преимущества однимъ паямъ предъ другими. Но такъ какъ 4000000 рублей складочнаго капитала, состоятъ изъ паевъ, по которымъ гарантировано было $7\frac{1}{2}$ годовыхъ процентовъ, то обыкновенные пайщики получаютъ только 5 процентовъ. Найти размѣръ всего капитала, вложеннаго обыкновенными пайщиками.

88. Дорога между мѣстами A и B сперва идетъ въ гору на протяженіи $7\frac{1}{2}$ верстъ, потомъ—по ровному мѣсту на протяженіи 6 верстъ, а затѣмъ—подъ гору на разстояніи остальныхъ 9 верстъ. Пѣшеходъ въ одинъ день идетъ по направленію изъ A въ B впродолженіи 3 ч. 52 мин.; на слѣдующій день онъ идетъ назадъ къ A впродолженіе 4 часовъ и проходитъ тогда половину пути отъ B, и возвратившись

назадъ въ B, употребляетъ еще 3 ч. 55 мин. Найти скорость его ходьбы на гору, по ровному мѣсту и подъ гору.

89. Найти значеніе съ 5 десятичными цифрами выраженія

$$\{161+\sqrt{19360}\}^{-\frac{1}{2}}.$$

90. Рѣшить уравненіе $\dfrac{a}{x+a-c}+\dfrac{b}{x+b-c}=2.$

91. Найти при $x=5$ значеніе

$$3x-[5y-\{2x-(3z-3y)+2z-(x-2y-z)\}].$$

92. Показать, что $(y-z)^4+(z-x)^4+(x-y)^4$

$$=2\{(y-z)^2(z-x)^2+(z-x)^2(x-y)^2+(x-y)^2(y-z)^2\}.$$

$$=2\{x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy\}^2.$$

93. Найти общій наибольшій дѣлитель выраженій

$$x^3+(5m-3)x^2+(6m^2-15m)x-18m^2 \text{ и}$$

$$x^3+(m-3)x^2-(2m^2+3m)x+6m.$$

94. Показать что

$$\frac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}=a+b+c.$$

95. Рѣшить уравненіе $\left(\dfrac{x^2-11x+19}{x^2+x-11}\right)^2+\dfrac{3(x-2)}{x+2}=0.$

96. Рѣшить уравненіе $x^3+y^3+z^3=3xyz$, $x-a=y-b=z-c$.

97. Въ кошелькѣ заключаются пятачки, гривенники и четвертаки; число четвертаковъ равно числу гривенниковъ, и каждое равно шестикратному числу пятачковъ. Если всѣхъ монетъ 102, то найти, сколько въ кошелькѣ пятачковъ, гривенниковъ и четвертаковъ.

98. Нѣкто идетъ изъ A въ B со скоростью $3^1|_2$ верстъ въ часъ, и изъ B въ C—со скоростью 4 верстъ въ часъ; возвращаясь онъ вычислилъ, что могъ-бы пройти это разстояніе въ то-же время, идя равномѣрно по $3^3|_4$ версты въ часъ; но замедливши на 14 минутъ въ B, онъ долженъ былъ идти къ A, дѣлая по 4 версты въ часъ, чтобы употребить то-же время. Найти разстояніе отъ A до B и отъ B до C.

99. Если $X=ax+cy+bz$, $Y=cx+by+az$, $Z=bx+ay+cz$, то показать, что

$$X^3+Y^3+Z^3-3XYZ=(a^3+b^3+c^3-3abc)(x^3+y^3+z^3-3xyz).$$

100. Рѣшить уравненіе $x^2-223x+12432=0$.

101. Рѣшить уравненіе $(4x+2)^4-(3x-1)^4=(2x+4)^4-(x-3^4)$.

102. Найти три послѣдовательныя числа, произведеніе которыхъ равно пятикратному среднему числу.

103. Рѣшить уравненія $x+y=9$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$.

104. Если x измѣняется пропорціонально y и z, и y измѣняется пропорціонально $x+z$; причемъ $x=2$, когда $z=2$, то найти значеніе z, когда $x=9$.

105. Найти сумму 18 членовъ ряда $1+\frac{5}{6}+\frac{2}{3}+\ldots$

106. Найти сумму безконечнаго числа членовъ $14-7+3\frac{1}{2}-\ldots$

107. Если число сочетаній изъ $2n$ элементовъ, взятыхъ по $n-1$, относится къ числу сочетаній изъ $2(n-1)$ элементовъ, взятыхъ по n, какъ 132 къ 35, то опредѣлить n.

108. Показать, что

$$2^m-\frac{m}{1}2^{m-1}+\frac{m(m-1)}{\underline{|2}}2^{m-2}-\ldots+(-1)^m=1.$$

109. Въ разложеніи выраженія $(a_1+a_2+\ldots+a_m)^n$, если n будетъ число цѣлое и положительное, а m больше n, то показать, что коэффиціентъ какого нибудь члена, въ которомъ не встрѣчается величинъ $a_1, a_2, \ldots a_m$ больше чѣмъ два раза, будетъ $\underline{|n}$.

110. Даны $\log 2=0.3010300$ и $\log 3=0.4771213$; найти цѣлыя значенія, между которыми должно заключаться x, чтобы цѣлая часть $(1.08)^x$ могла содержать четыре цифры.

111. Рѣшить $\{a(b+x-a)\}^{\frac{1}{2}}+\{b(a+x-b)\}^{\frac{1}{2}}=\{x(a+b-x)\}^{\frac{1}{2}}$.

112. Если α и β будутъ корни уравненія $ax^2+bx+c=0$, то составить уравненіе, корни котораго были-бы $\frac{\alpha}{\beta}$ и $\frac{\beta}{\alpha}$.

113. Рѣшить уравненія $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2}$, $xy=8$.

114. Если $x-4 : x-2=x-1 : x+3$, то найти x.

115. Найти сумму девяти членовъ ариѳметической прогрессіи, средній членъ которой есть 18.

116. Найти сумму n членовъ ряда $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{3+2\sqrt{2}}+\frac{1}{7+5\sqrt{2}}+\ldots$

117. Доказать, что число способовъ, которыми можно размѣстить p положительныхъ и n отрицательныхъ знаковъ въ рядъ, такъ чтобы никакіе два отрицательные знака не стояли рядомъ, равно числу сочетаній изъ $p+1$ элемента, взятыхъ по n.

118. Опредѣлить коэффиціентъ при x^r въ разложеніи по восходящимъ степенямъ x выраженія $\frac{(n-m+1)x(1-x)-x^{m+1}+x^{n+2}}{(1-x)^2}$, гдѣ m и n положительныя цѣлыя числа, изъ которыхъ m меньшее.

119. Опредѣлить, будетъ-ли рядъ, въ которомъ n-ый членъ равенъ $\sqrt{(n^2+1)}-n$, сходящимся или расходящимся.

120. Найти значеніе $\frac{1}{0.05}\left\{\frac{1}{(1.05)^{13}}-\frac{1}{(0.05)^{20}}\right\}$,

если дано: $\log 105=2.0211893$, $\log 5303214=6.7245391$,
$\log 3768894=6.576214$.

121. Рѣшить уравненіе $(4+5x+x^2)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}+(x^2+3x-4)^{\frac{1}{2}}$.

122. Найти соотношеніе между коэффиціентами уравненія $ax^2+bx+c=0$, чтобы одинъ изъ корней былъ вдвое больше другого.

123. Рѣшить уравненіе $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{12}=\frac{7}{x+y+5}$.

124. Разложить 111 на три части, такъ чтобы произведенія каждой пары были-бы пропорціональны числамъ 4, 5 и 6.

125. Найти число членовъ ариѳметической прогрессіи, которой первый членъ, сумма и разность даны; найти, какія условія должны существовать, чтобы было два такихъ числа.

126. Найти сумму величинъ обратныхъ n членовъ геометрической прогрессіи, которой первый членъ есть a, а разность r.

127. Показать, что число способовъ, которыми можно раздѣлить mn предметовъ между m лицами, такъ чтобы каждое лицо получило n изъ нихъ, равняется $\frac{\lfloor mn}{\{\lfloor n\}^m}$.

128. Показать, что коэффиціентъ при x^{n+r-1} въ разложеніи $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3}$, есть $2^{n-3}\{(n+2r)(n+2r+2)+n\}$, гдѣ r или 0, или какое нибудь цѣлое положительное число.

129. Найти коэффиціентъ при x^4 въ разложеніи выраженія

$$(1+2x-3x^2+x^3)^3.$$

130. Показать, что $1+\frac{2^3}{\lfloor 2}+\frac{3^3}{\lfloor 3}+\frac{4^3}{\lfloor 4}+\ldots=5e$.

131. Рѣшить $\sqrt{(x^2-8x+15)}+\sqrt{(x^2+2x-15)}=\sqrt{(4x^2-18x+18)}$.

132. Численно большій корень уравненія $ax^2-bx+c=0$ имѣетъ

тотъ-же знакъ, какъ $\frac{b}{a}$, а численно меньшій корень—тотъ-же знакъ, какъ $\frac{b}{c}$.

133. Рѣшить уравненія: $x+y+z=a+b+c$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$,

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2.$$

134. Два лица A и B раздѣлили поровну нѣкоторую сумму денегъ, состоявшую изъ четвертаковъ, гривенниковъ и пятачковъ, причемъ цѣнности суммъ, составленныхъ изъ одинаковыхъ монетъ, находились въ отношеніи чиселъ 15, 4 и 1. Оказалось, что каждый получилъ по 60 монетъ, но у A было двумя четвертаками больше, чѣмъ у B. Опредѣлить сумму денегъ и число монетъ у каждаго.

135. Въ ариѳметической прогрессіи p-ый членъ есть $\frac{1}{q}$, а q-ый членъ есть $\frac{1}{p}$; показать, что сумма pq членовъ есть $\frac{pq+1}{2}$.

136. Если a, b, c составляютъ ариѳметическую прогрессію, а α, β, γ—гармоническую прогрессію и если $\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{c}{a}+\frac{a}{c}$, то показать, что $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ составятъ геометрическую прогрессію.

137. Найти число словъ, начинающихся и кончающихся согласной буквой, какія можно составить изъ буквъ слова *equation*.

138. Если a_r будетъ коэффиціентъ при x^r въ разложеніи выраженія $(1+x)^{2n}$, то показать, что $a_0^2-a_1^2+a_2^2-a_3^2+\ldots=\frac{(-1)^n\lfloor 2n}{\lfloor n\,\lfloor n}$.

139. Опредѣлить, сходящійся или расходящійся будетъ слѣдующій рядъ: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{4}}+\ldots$.

140. Если $y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$, то показать, что $x=y+\frac{y^2}{\lfloor 2}+\frac{y^3}{\lfloor 3}+\ldots$

141. Рѣшить уравненіе $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{(x^2-3x+7)}$.

142. Нѣкоторое число солдатъ, явившихся на смотръ, было таково, что всѣ они могли составить изъ себя плотный квадратъ (карэ), а также могли бы составить четыре пустыхъ внутри квадрата, вставъ въ рядъ, причемъ во фронтѣ каждаго квадрата будетъ 24 человѣками больше, чѣмъ при плотномъ квадратѣ. Найти все число солдатъ.

143. Рѣшить уравненія $6x^2-xy-12y^2=0$, $x^2+2y^2=\frac{17}{16}$.

144. Если скорость поѣздовъ желѣзной дороги равна 30 верстамъ въ часъ, то оказывается, что при этомъ только покрываются расходы. Если скорость больше 30 верстъ въ часъ, то возрастаніе прихода оказывается пропорціональнымъ возрастанію скорости движенія, между тѣмъ какъ возрастаніе цѣнности затратъ по движенію пропорціонально квадрату возрастанія скорости, и при скорости въ 60 верстъ въ часъ опять какъ-разъ только покрываются расходы. Найти скорость, при которой выгоды дороги наибольшія.

145. Показать, что число $p_0+10p_1+10^2p_2+\ldots.+10^np_n$ дѣлится на 13, если дѣлится на него слѣдующее выраженіе—

$$p_0-p_3+p_6-\ldots.-3(p_1-p_4+p_7-\ldots)-4(p_2-p_5+p_8-\ldots.).$$

146. Если s есть сумма нечетнаго числа членовъ геометрической прогрессіи и s' сумма ряда, который получится, когда знаки четныхъ членовъ будутъ перемѣнены на обратные, то показать, что сумма квадратовъ этихъ членовъ равна ss'.

147. Если n прямыхъ линій, находящихся на плоскости, лежатъ такъ, что никакія три изъ нихъ не пересѣкаются въ одной точкѣ, то число многоугольниковъ съ n сторонами, которые можно составить, беря по одному отрѣзку отъ каждой прямой, равно $\frac{1}{2}n-1$.

148. Показать, что $2^{\frac{1}{4}}, 4^{\frac{1}{8}}, 8^{\frac{1}{16}}, 16^{\frac{1}{32}}\ldots=2$.

149. Найти коэффиціентъ при x^4 въ разложеніи выраженія

$$(1+x-x^2-3x^3-x^4)^{-3}.$$

150. Показать, что если логариѳмы n величинъ, взятыхъ при n основаніяхъ, составляющихъ между собою геометрическую прогрессію, всѣ будутъ равны между собою, то они будутъ также равны логариѳму отношенія какой-либо одной изъ этихъ величинъ къ величинѣ, ей предшествующей, взятому при основаніи, равномъ знаменателю прогрессіи.

151. Рѣшить уравненіе $\frac{2(3x-4)}{2x+1}+\frac{9(x-1)}{3x+1}=\frac{2(3x-2)}{2x+3}+\frac{3(x-2)}{x-1}$.

152. Показать, что если квадратное уравненіе удовлетворяется болѣе чѣмъ двумя значеніями неизвѣстной величины, то это уравненіе есть тожество. Приложить это свойство къ доказательству тожества слѣдующаго выраженія:

$$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

153. Рѣшить уравненія $(x^2+y^2)\frac{x}{y}=6$, $(x^2-y^2)\frac{y}{x}=1$.

154. Бронза содержитъ 91 процентъ мѣди, 6—цинка и 3—олова. Нѣкоторое количество ея было сплавлено съ колокольнымъ металломъ

(содержащимъ только мѣдь и олово), причемъ оказалось, что сплавъ содержитъ въ 100 частяхъ 88 частей мѣди, 4.875 цинка и 7.125 олова. Найти пропорцію мѣди и олова въ колокольномъ металлѣ.

155. Показать, что сумма произведеній первыхъ n натуральныхъ чиселъ, взятыхъ по два, равна $\frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}$.

156. Взято четыре числа, изъ которыхъ первыя три составляютъ геометрическую прогрессію, а три послѣднія—гармоническую прогрессію; затѣмъ взято еще четыре числа, изъ которыхъ три первыя составляютъ гармоническую прогрессію, а послѣднія три—геометрическую; показать, что если первыя два числа будутъ одни и тѣ-же въ обоихъ случаяхъ, то послѣднее изъ чиселъ перваго ряда будетъ меньше, чѣмъ послѣднее изъ чиселъ второго ряда.

157. Найти число различныхъ размѣщеній, которыя можно сдѣлать изъ семи брусковъ, окрашенныхъ въ каждый изъ 7 призматическихъ цвѣтовъ, такъ чтобы голубой и зеленый никогда не приходились рядомъ.

158. Если $(5\sqrt{2}+7)^m=n+\alpha$, гдѣ m и n цѣлыя положительныя числа и α меньше единицы, то показать, что $\alpha(n+a)=1$, при m—нечетномъ.

159. Найти коэффиціентъ при x^4 въ разложеніи выраженія

$$(1-2x+3x^2-4x^3+\ldots)^{-\frac{3}{2}}.$$

160. Если все число родившихся въ извѣстный мѣсяцъ составляетъ $\frac{1}{480}$ часть всего населенія при началѣ мѣсяца, а число умершихъ равно $\frac{1}{600}$ части того-же числа, то найти, во сколько мѣсяцевъ населеніе удвоится.

Дано: $\log 2=0.3010300$, $\log 3=0.4771213$, $\log 7=0.8450980$.

161. Рѣшить уравненіе $x^4+1=2(1+x)^4$.

162. A и B бѣгутъ въ перегонку по кругу въ три версты длиною. Въ первый разъ B достигаетъ выигрышнаго столба 2 минутами раньше A. При второмъ кругѣ A увеличиваетъ быстроту своего бѣга на 3 версты въ часъ, а B настолько-же уменьшаетъ, и тогда A достигаетъ столба 2 минутами раньше B. Найти, съ какою скоростью бѣжалъ каждый изъ нихъ, дѣлая первый кругъ.

163. Рѣшить уравненія $\frac{x+3y+5}{x+y+1}+\frac{3x+y+4}{x+y-1}=4$,

$$(x+2y)^2+(y+2x)^2=5(x+y)^2+4y.$$

164. Рѣшить уравненіе $\frac{x}{y+z+1}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y-1}=x+y+z$.

*

165. Показать, что число $p_0+10p_1+10^2p_2+\ldots+10^np_n$ дѣлится на 101, если дѣлится на 101 слѣдующее выраженіе

$$p_0+10p_1-(p_2+10p_3)+(p_4+10p_5)-\ldots$$

166. Если a, b, c будутъ три величины такого рода, что a есть среднее ариѳметическое между b и c, а c среднее гармоническое между a и b, то показать, что b есть среднее геометрическое между a и c и сравнить между собою a, b, c.

167. На плоскости расположено m прямыхъ лвній, которыя всѣ проходятъ чрезъ данную точку, n другихъ прямыхъ, тоже проходящихъ всѣ чрезъ другую данную точку и наконецъ еще p прямыхъ, проходящихъ чрезъ третью данную точку; предполагая, что никакія другія три линіи не пересѣкаются въ одной точкѣ, найти число треугольниковъ, образованныхъ пересѣченіемъ этихъ прямыхъ линій.

168. Если $a_r=r-(r-1)n+(r-2)\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}-(r-3)\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}+\ldots$ до r членовъ, то показать, что $a_r=(-1)^n a_{n-r}$, если r меньше $n-1$, $a_r=0$, если r больше $n-1$, и $a_{n-1}=(-1)^n$.

169. Найти коэффиціентъ при x^6 въ разложеніи выраженія

$$(1+2x-3x^2-x^4)^{\frac{7}{3}}.$$

170. Данъ $\log_{10}2=0.30103$, найти $\log_{25}50$.

171. Рѣшить уравненіе $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}=\frac{4}{13}(x+x^{-1})$.

172. Если α и β суть корни квадратнаго уравненія $ax^2+bx+c=0$, то составить уравненіе, корни котораго были-бы $(\alpha+\beta)^2$ и $(\alpha-\beta)^2$.

173. Рѣшить уравненія $8\sqrt{(x^2-y^2)}=x+9y$,

$$x^4+2x^2y+y^2+x=2x^3+2xy+y+506.$$

174. A и B нанялись сжать поле въ 12 дней. Промежутки времени, въ которые каждый изъ нихъ отдѣльно могъ-бы сжать десятину, относятся другъ къ другу какъ 2 къ 3. Черезъ 6 дней они нашли, что не могутъ окончить работы въ условленное время и пригласили къ себѣ C, съ помощью котораго и кончили работу во-время. Время, въ которое A и C вмѣстѣ могутъ сжать поле, относится къ времени, въ которое могутъ сдѣлать то-же B и C, какъ 7 къ 8. Найти, во сколько дней было-бы сжато поле, если-бы C работалъ съ самаго начала.

175. У торговца имѣется восемь гирь: двѣ фунтовыхъ, двѣ пятифунтовыхъ, двѣ по 25 фунт. каждая и двѣ по 125 фунтовъ каждая. Показать, что пользуясь обѣими чашками вѣсовъ, онъ можетъ отвѣсить всякое цѣлое число фунтовъ отъ 1 до 312.

176. Найти четыре числа, составляющія геометрическую прогрессію, чтобы ихъ сумма равнялась 15, а сумма ихъ квадратовъ была-бы 85.

177. Изъ $2n$ человѣкъ, которымъ предстоитъ сидѣть по-ровну по обѣ стороны стола по его длинѣ, p человѣкъ сговорилось сидѣть на одной сторонѣ, а q—на другой. Найти, сколькими способами это можно сдѣлать.

178. Показать, что коэффиціентъ при x^{3r} въ разложеніи выраженія $(9a^2+6ax+4x^2)^{-1}$ есть $2^{3r}(3a)^{-3r-2}$.

179. Показать, что рядъ $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ будетъ сходящимся, если, начиная съ извѣстнаго члена, значеніе $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ постоянно остается меньше нѣкоторой опредѣленной величины, которая сама меньше единицы, и будетъ расходящимся, если это значеніе будетъ равно или больше единицы.

180. Показать, что $1-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2.3(n+1)^2}-\frac{1}{3.4(n+1)^3}-\ldots$ $=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Слѣдовательно показать, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастаетъ вмѣстѣ съ n.

181. Рѣшить уравненіе $9x^2+4x^3=1+12x^4$.

182. Три лица A, B и C, лѣта которыхъ отъ рожденія—составляютъ геометрическую прогрессію, дѣлятъ между собою нѣкоторую сумму денегъ пропорціонально лѣтамъ каждаго. Черезъ 5 лѣтъ послѣ того, когда лѣта C сдѣлались вдвое больше чѣмъ лѣта A, они вновь раздѣлили ту-же сумму; теперь A получилъ на 175 рублей больше, чѣмъ прежде, а B—на 25 рублей больше прежняго. Найти сумму денегъ, которая дѣлилась между ними въ оба раза.

183. Рѣшить $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1=\frac{61}{(xy)^{\frac{1}{2}}}$, $x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{3}{4}}x^{\frac{1}{4}}=78$.

184. Если $x=cy+bz$, $y=az+cx$, $z=bx+ay$, то показать, что

$$\frac{x}{\sqrt{(1-a^2)}}=\frac{y}{\sqrt{(1-b^2)}}=\frac{z}{\sqrt{(1-c^2)}}$$ и

найти соотношеніе между a, b и c.

185. Показать, что въ девятиричной системѣ счисленія каждое число, представляющее точный кубъ, должно оканчиваться 0, 1 или 8.

186. Найти сумму произведеній, какія можно составить, перемножая между собою какіе нибудь три члена безконечной геометрической прогрессіи; и показать, что если эта сумма будетъ одна треть суммы кубовъ этихъ членовъ, то знаменатель прогрессіи равенъ $\frac{1}{2}$.

187. Одинъ сосудъ содержитъ a ведеръ вина, а другой—b ведеръ воды; изъ каждаго изъ нихъ отлито по c ведеръ, и отлитое изъ перваго влито во второй, а отлитое изъ второго вылито въ первый; такое переливаніе повторено было r разъ; показать, что количество вина во второмъ сосудѣ будетъ $\frac{ab}{a+b}(1-p^r)$, гдѣ $p=1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}$.

188. Сравнивъ два разложенія выраженія $\frac{1+2x}{1-x^3}$, показать, что

$$(-1)^n=1-3n+\frac{(3n-1)(3n-2)}{\lfloor\underline{2}}-\frac{(3n-2)(3n-3)(3n-4)}{\lfloor\underline{3}}+$$
$$+\frac{(3n-3)(3n-4)(3n-5)(4n-6)}{\lfloor\underline{4}}-\ldots$$

гдѣ n нѣкоторое цѣлое положительное число, и что рядъ прерывается на первомъ исчезающемъ членѣ.

189. Опредѣлить, будетъ-ли слѣдующій рядъ сходящимся или расходящимся

$$1+\frac{1}{2}x+\frac{\lfloor\underline{2}}{3^2}x^2+\frac{\lfloor\underline{3}}{4^3}x^3+\frac{\lfloor\underline{4}}{5^4}x^4+\ldots$$

190. Если $\log\frac{1}{1-x-x^2+x^3}$ будетъ разложенъ въ рядъ по степенямъ x, то показать, что коэффиціентъ при x^n есть $\frac{3}{n}$ или $\frac{1}{n}$, смотря по тому, будетъ-ли n четное или нечетное.

191. Рѣшить уравненіе $(1+x^2)^2=2ax(1-x^2)$.

192. Показать, что если x, y, z дѣйствительныя количества, то $x^2(x-y)(x-z)+y^2(y-z)(y-x)+z^2(z-x)(z-y)$ не можетъ быть отрицательнымъ.

193. Рѣшить уравненія $x^2+y^2+1=m^2xy-x^2y^2$, $xy(n^2x-y)=x-n^2y$.

194. Показать, что уравненія $ax+by+cz=0$ и $ax^2+by^2+cz^2=0$ удовлетворяются, если принять, что $\frac{x}{1-bv}=\frac{y}{1+av}=\frac{z}{1+abv^2}$, гдѣ $a+b+c+abcv^2=0$.

195. Въ ст. 458 выведена ариѳметическая прогрессія, которой первый членъ равенъ $\frac{a}{q}-\frac{b}{2q}+\frac{b}{2q^2}$ и разность $\frac{b}{q^2}$; показать, что если она будетъ расположена по группамъ, содержащимъ q членовъ каждая, то m-я группа будетъ равна m-ому члену ариѳметической прогрессіи, первый членъ у которой a и разность b.

196. Первый членъ извѣстнаго ряда есть a, второй членъ b, а каждый слѣдующій членъ есть средній ариѳметическій между двумя предшествующими членами; показать, что n-ый членъ будетъ

$$\frac{2}{3}(b-a)\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}+a.$$

197. Если будутъ составлены всѣ перестановки изъ n буквъ a, b, c, ... l, въ каждую изъ которыхъ входятъ всѣ буквы, и изъ какой нибудь одной перестановки $abc....l$ будетъ составлена дробь $\frac{1}{a(a+b)(a+b+c)...(a+b+...+l)}$, то показать, что сумма всѣхъ такихъ дробей будетъ равна $\frac{1}{abc...l}$.

198. Показать, что

$$1+\frac{n^2x}{1}+\left\{\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\right\}^2x^2+\left\{\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\right\}^2x^3+... \text{ равняется}$$

$$(1+x)^n\left\{1+\frac{n(n-1)}{1.1}\frac{x}{(1+x)^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|2}\ \underline{|2}}\frac{x^2}{(1+x)^4}+...\right\}.$$

199. Опредѣлить, будетъ-ли сходящимся или расходящимся слѣдующій рядъ: $\left(\frac{3^2}{2^2}-\frac{3}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{4^3}{3^3}-\frac{4}{3}\right)^{-3}+\left(\frac{5^4}{4^4}-\frac{5}{4}\right)^{-4}+...$

200. Если n есть нѣкоторое цѣлое положительное число, то найти значеніе выраженія

$$n^{n+3}-n(n-1)^{n+3}+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+3}-...$$

201. Перемножить $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$; и найти видъ ряда до x^{12}, при безконечномъ числѣ множителей.

202. Показать, что

$$\frac{(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3}{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}=(a+b)(b+c)(c+a).$$

203. Показать, что капиталъ, при сложныхъ процентахъ по 4 въ годъ, увеличится въ 5 разъ втеченіе столѣтія. Дано $\log 2=0.301030$ и $\log 13=1.113943$.

204. Показать, что $\sqrt{p^2+4p}=p+\cfrac{2}{1+}\cfrac{1}{p+}\cfrac{1}{1+}\cfrac{1}{p+}\cfrac{1}{1+...}$

205. Найти, сколькими способами можно взвѣсить 2240 фунтовъ гирями въ 9 фунтовъ и 14 фунтовъ.

206. Если $\frac{1}{(1-2x)(1-2x+x^2)}$ разложено по восходящимъ степенямъ x, то найти общій членъ.

207. Если n цѣлое положительное число и x положительная правильная дробь, то показать, что $\frac{1-x^{n+1}}{n+1}$ меньше $\frac{1-x^n}{n}$.

208. Показать, что $n^4-4n^3+5n^2-2n$ дѣлится на 12 при всякихъ значеніяхъ n большихъ 2.

209. Изъ кошелька содержащаго 10 жетоновъ, изъ которыхъ три отмѣчены, нужно вынуть 5; вынимающій получитъ 60 копѣекъ, если при вынманіи всѣ три замѣченные жетоны выйдутъ вмѣстѣ. Найти величину его ожиданія.

210. Опредѣлить, будетъ-ли слѣдующій рядъ сходящимся или расходящимся: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{3^3}{4^4}+\ldots$

211. Если квадратъ суммы n дѣйствительныхъ величинъ равенъ $\frac{2n}{n-1}$-кратной суммѣ ихъ произведеній, взятыхъ по два, то всѣ эти величины равны каждая каждой.

212. Показать, что

$$25\{(b-c)^7+(c-a)^7+(a-b)^7\}\{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3\}$$
$$=21\{(b-c)^5+(c-a)^5+(a-b)^5\}^2.$$

213. Если человѣкъ, имѣющій 48 лѣтъ отъ роду, можетъ пріобрѣсти за 18128 рублей право на ежегодный пожизненный доходъ въ 1500 р., причемъ величина процента равна 5, то опредѣлить за какую величину принимается ожиданіе продолжительности его жизни въ возрастѣ 48 лѣтъ. Даны: $\log 2 = 0.3010300$, $\log 3 = 0.4771213$, $\log 7 = 0.8450980$, $\log 1.1872 = 0.0745239$.

214. Если $\frac{p_r}{q_r}$ означаетъ r-ную подходящую дробь къ $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, то показать, что

$$p_3+p_5+\ldots+p_{2n-1}=p_{2n}-p_2,\quad q_3+q_5+\ldots+q_{2n-1}=q_{2n}-q_2.$$

215. Найти правильныя дроби, удовлетворяющія условію, чтобы сумма пятикратнаго числителя и одиннадцатикратнаго знаменателя равнялась 1031.

216. Показать, что если n будетъ цѣлое положительное число, а x таково, что ни одинъ знаменатель не обращается въ нуль, то

$$\frac{1}{x+1}-\frac{n}{1}\frac{1}{x+2}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{x+3}-\ldots+\frac{(-1)^n}{x+n+1}$$
$$=\frac{\lfloor n}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)}.$$

217. Если p будетъ положительная правильная дробь, а a и b положительныя величины, то показать, что $(a+b)^p a^{1-p}$ меньше $a+pb$.

218. Если 3, или 5, или 7, или 9 будутъ возвышены въ нѣкоторую степень, то показать, что цифра десятковъ всегда будетъ четною; равнымъ образомъ показать, что когда 6 будетъ возвышено въ нѣкоторую степень, то цифра десятковъ всегда будетъ нечетною.

219. Въ кошлѣ имѣется три шара, причемъ неизвѣстно, сколько изъ нихъ черныхъ. Нѣкто вынимаетъ изъ кошля одинъ шаръ и кладетъ его обратно, дѣлая это три раза; если каждый разъ вынимался черный шаръ, то найти вѣроятность того, что всѣ шары въ мѣшкѣ черные.

220. Если $x=y+\cfrac{1}{2y+\cfrac{1}{2y+\ldots}}$, то показать, что $y=x-\cfrac{1}{2x-\cfrac{1}{2x-\ldots}}$.

221. Если $\cfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\cfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\cfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$, то показать, что двѣ изъ трехъ дробей въ лѣвой части равенства должны быть равны 1, а остальная равна -1.

222. Рѣшить $yz+zx+xy=a^2-x^2=b^2-y^2=c^2-z^2$.

223. Если срочными уплатами втеченіе p лѣтъ можно пріобрѣсть право на ежегодный доходъ за извѣстное число лѣтъ, а уплатами впродолженіе q лѣтъ — право на доходъ за вдвое большее число лѣтъ, то найти величину процента.

224. Обратить $\sqrt{\left(a^2+\cfrac{2x}{b}\right)}$ въ непрерывную дробь.

225. Разложить $2x^2-21xy-11y^2-x+34y-3$ на раціональные множители первой степени.

226. Показать, что возвратный рядъ, законъ составленія котораго $1-px-qx^2$, будетъ сходящимся или расходящимся, смотря по тому, будетъ-ли x численно меньше или больше, чѣмъ численно меньшій корень уравненія $1-px-qx^3=0$, причемъ предполагается, что корни дѣйствительные.

227. Показать, что если всѣ буквы означаютъ положительныя величины и p_1, p_2, p_3 ... и a_1, a_2, a_3 ... тѣ и другія расположены въ восходящемъ порядкѣ ихъ величинъ, или въ нисходящемъ, то

$$\frac{p_1a_1^2+p_2a_2^2+\ldots+p_na_n^2}{p_1+p_2+\ldots+p_n}$$ больше, чѣмъ $$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2.$$

228. Если $a^2+b^2=c^2$, и a, b, c цѣлыя числа, то показать, что одно изъ нихъ дѣлится на 5.

229. Написано наудачу число изъ n цифръ; показать, что каково бы ни было значеніе n, лишь бы только оно было дано, вѣроятность того, что число это будетъ кратнымъ 9, равняется $\frac{1}{9}$

230. Если n нѣкоторое положительное число, то показать, что ближайшее цѣлое, превышающее $(3+\sqrt{5})^n$, дѣлится на 2^n.

231. Если два выраженія x^3+px^2+qx+r, и $x^3+p'x^2+q'x+r'$ имѣютъ одинаковый множитель второй степени, то

$$\frac{r-r'}{p-p'}=\frac{p'r-pr'}{q-q'}=\frac{q'r-qr'}{r-r'}.$$

232. Въ предыдущемъ примѣрѣ показать, что третьи множители будутъ соотвѣтственно $x+\frac{p-p'}{r-r'}r$ и $x+\frac{p-p'}{r-r'}r'$ и что квадратный множитель будетъ $x^2+\frac{q-q'}{p-p'}x+\frac{r-r'}{p-p'}$.

233. По таблицамъ смертности Карлиля стоимость пожизненной ренты въ 1000 рублей ежегодно для лица, которому теперь 21 годъ, равняется 21500 рублей, считая по 3 процента. Если изъ 10 родившихся 6 достигаютъ возраста въ 21 годъ, то найти, какую сумму нужно заплатить тотчасъ при рожденіи ребенка, чтобы обезпечить ему доходъ въ 1000 рублей ежегодно по достиженіи имъ 21 года, причемъ вкладъ не возвращается обратно въ случаѣ смерти дитяти. Даны: $\log 43=1.63347$, $\log 2=0.30103$, $\log 103=2.01284$, $\log 1155=3.0628$.

234. Обратить $\sqrt{\left(a^2-\frac{a}{n}\right)}$ въ непрерывную дробь, если n больше единицы.

235. Число состоитъ изъ двухъ цифръ; если перемѣнить ихъ порядокъ, то число сдѣлается на единицу меньше его половины. Найти это число.

236. Показать, что если n положительное цѣлое число и x таково, что ни одинъ знаменатель не уничтожается, то

$$\frac{1}{x+1}-\frac{n}{(x+1)(x+2)}+\frac{n(n-1)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$
$$-\frac{+(-1)^n\lfloor n}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)}=\frac{1}{x+n+1}.$$

237. Показать, что x^n-1 больше $n\left(x^{\frac{n+1}{2}}-x^{\frac{n-1}{2}}\right)$, если n нѣкоторое цѣлое положительное число и x —положительная величина большая единицы.

238. Показать, что въ послѣдовательныхъ степеняхъ 4 цифра десятковъ будетъ попеременно четная и нечетная; показать также, что въ послѣдовательныхъ степеняхъ 2 и 8 будутъ встрѣчаться попеременно двѣ четныхъ и двѣ нечетныхъ цифры.

239. Берется какое попало число между 2 и 9 включительно и возводится въ какую нибудь высокую степень; показать, что вѣроятность того, что цифра на мѣстѣ десятковъ будетъ нечетная, равняется $\frac{5}{16}$.

240. Опредѣлить, будетъ-ли сходящимся или расходящимся рядъ, котораго n-ый членъ есть $\frac{2n^2+3n+2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

241. Рядъ a_1, b_1, a_2, b_2, ... составленъ слѣдующимъ образомъ: a_n есть среднее ариѳметическое между a_1 и b_{n-1}, а b_n есть среднее гармоническое между b_1 и a_{n-1}. Показать, что $a_n b_n = a_1 b_1$.

242. Показать, что слѣдующія уравненія будутъ или несовмѣстны, или недостаточны для опредѣленія значеній x, y, z:

$$x^2-a^2=zx+xy-yz,\ y^2-b^2=xy+yz-zx,\ z^2-c^2=yz+zx-xy.$$

243. Нѣкто начинаетъ проживать капиталъ, приносящій ему 4% годовыхъ при сложныхъ процентахъ. Ежегодно онъ издерживаетъ сумму, равную удвоенной прибыли съ первоначальнаго капитала. Найти, во сколько лѣтъ онъ проживетъ все. Дано $\log 2 = 0.3010300$, $\log 13 = 1.1139434$.

244. Обратить $\sqrt{\left(a^2+\frac{4a+2}{3}\right)}$ въ непрерывную дробь.

245. Хозяинъ издержалъ 250 рублей на покупку овецъ, платя за каждую по 15 рублей, и телятъ, платя за каждаго по 50 рублей. Найти, сколько овецъ и телятъ онъ купилъ.

246. Сравнивая коэффиціенты при разныхъ степеняхъ x, показать, что

$$\frac{1}{m}(1-x)^n+\frac{n}{m(m-1)}(1-x)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{m(m-1)(m-2)}(1-x)^{n-2}+\ldots$$

$$=\frac{1}{m-n}-\frac{n}{1}\frac{x}{m-n+1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{x^2}{m-n+2}-\ldots,$$ если n цѣлое положительное число, а m таково, что ни одинъ знаменатель не уничтожается.

247. Если всѣ n буквъ a, b, c, ... k означаютъ положительныя величины, то показать, что $n(a^{p+q}+b^{p+q}+c^{p+q}+\ldots+k^{p+q})$ больше, чѣмъ $(a^p+b^p+c^p+\ldots+k^p)(a^q+b^q+c^q+\ldots+k^q)$.

248. Если n будетъ первоначальное число и N—число, не дѣлящееся на n, то показать, что N^m-1 дѣлится на n^r, причемъ буквой m означено n^r-n^{r-1}.

249. Въ ящикѣ лежатъ три банковыхъ билета, и извѣстно, что билеты эти могутъ быть въ 50, въ 100 и въ 200 рублей, а другихъ тамъ нѣтъ. Былъ вынутъ одинъ билетъ и оказался 50-рублевымъ; онъ положенъ обратно. Опредѣлить величину ожиданія при слѣдующемъ вынманіи.

250. Приложить способъ синтетическаго дѣленія къ раздѣленію $x^4+3x^2-12x+4$ на $x^2-4x+12$ до члена, содержащаго x^{-2}, и дать остатокъ.

251. Рѣшить $x^2y+x=xy+x^2y^2-4y+4$, $xy+1=3xy^2-x^2y^3$.

252. Даны два числа a и b; требуется найти n промежуточныхъ чиселъ: a_1, a_2, ... a_n такихъ, чтобы a_1-a, a_2-a_1, a_3-a_2 ... $b-a_n$ могли составить ариѳметическую прогрессію съ разностью d. Найти также предѣлы, между которыми должно заключаться d.

253. Когда сторублевые 3% билеты стоили 88 р., внесена была сумма въ 100 рублей для вѣчной выдачи ежегоднаго дохода въ 3 рубля и еще другого ежегоднаго дохода, продолжающагося 30 лѣтъ. Предполагая, что цѣнность денегъ устанавливается цѣнностью 3-хъ процентныхъ 100-рублевыхъ билетовъ, найти величину этого 30-лѣтняго ежегоднаго дохода. Дано: $\log 1.1 = 0.04139$, $\log 1.3 = 0{,}11394$, $\log 2 = 0.30103$, $\log 7 = 0.84510$, $\log 3.658 = 0.56320$.

254. Если $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $\frac{p_n}{q_n}$, $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ будутъ три послѣдовательныя подходящія дроби, приближающіяся къ $\sqrt{(a^2+1)}$, то показать, что $2(a^2+1)q_n = p_{n-1}+p_{n+1}$, $2p_n = q_{n-1}+q_{n+1}$.

255. Мальчикъ истратилъ 48 копѣекъ на покупку яблоковъ, грушъ и персиковъ; яблоки продавались за пятокъ по 4 коп., груши—по 4 коп. каждая, а персики—по 8 коп. за штуку; всего онъ купилъ 12 штукъ плодовъ. Сколько было яблоковъ, грушъ и персиковъ?

256. Если дробь $\dfrac{a+bx}{(1-cx)\left(1-\dfrac{x}{c}\right)}$ будетъ разложена по степенямъ x, то показать, что коэффиціентъ при x^n будетъ

$$\frac{a+bc-(ac+b)c^{2n+1}}{c^n(1-c^2)}.$$

257. Показать, что $\left\{\left|\underline{n}\right.\right\}^2$ меньше чѣмъ $\left\{\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right\}^n$, и что $\left\{\left|\underline{n}\right.\right\}^3$ меньше чѣмъ $\left\{\frac{n(n+1)^2}{4}\right\}^n$.

258. Если n будетъ первоначальное число, а N—число, не дѣлящееся на n, то показать, что N^m+1 или N^m-1 будетъ дѣлиться на n^2; здѣсь буквой m означено для краткости $\frac{n(n-1)}{2}$.

259. Взятое на удачу число возвышено въ квадратъ. Показать, что одинаково вѣроятно, что цифра единицъ будетъ четной или нечетной, что можно ставить 4 противъ 1, что цифра десятковъ будетъ четнымъ числомъ и что можно ставить 59 противъ 41, что слѣдующая высшая цифра будетъ четная.

260. Когда въ разложеніи выраженія $\frac{(1+cx)(1+c^2x)(1+c^3x)\ldots}{(1-cx)(1-c^2x)(1-c^3x)\ldots}$ число множителей будетъ безконечно, а c будетъ меньше единицы, то показать, что коэффиціентъ при x^r будетъ $c^r\frac{(1+1)(1+c)(1+c^2)\ldots(1+c^{r-1})}{(1-c)(1-c^2)(1-c^3)\ldots(1-c^r)}$.

261. Если α и β означаютъ корни уравненія $ax^2+bx+c=0$, то найти значеніе $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4$.

262. Если m-ый членъ ряда, представляющаго гармоническую прогрессію, будетъ n, а n-ый членъ будетъ m, то r-ый членъ будетъ $\frac{mn}{r}$.

263. Первый членъ извѣстнаго ряда есть a, второй членъ его b, а каждый слѣдующій членъ есть средній геометрическій между двумя предшествующими; показать, что по мѣрѣ возрастанія n, n-ый членъ стремится къ величинѣ $\sqrt[3]{(ab^2)}$.

264. Если $\frac{a}{b}$ будетъ правильная дробь, то показать, что она можетъ быть выражена такимъ образомъ:

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_1q_2}+\frac{1}{q_1q_2q_3}+\ldots+\frac{1}{q_1q_2\ldots q_n},$$ гдѣ $q_1, q_2, \ldots q_n$ цѣлыя положительныя числа. Взять напримѣръ дробь $\frac{5}{7}$.

265. Діаметры двухъ монетъ равняются соотвѣтственно 0.81 и 0.666 дюйма; найти наименьшее число монетъ, которыя можно помѣстить въ рядъ длиною въ 9 футовъ. Найти также наименьшую сумму, которую можетъ представлять такой рядъ, предполагая, что большія монеты вдвое цѣннѣе меньшихъ.

266. Показать, что разность между какими нибудь двумя послѣдовательными нечетными подходящими дробями, приближающимися къ $\sqrt{(a^2+1)}$, есть дробь, числитель которой дѣлится на $2a$.

267. Въ геометрической прогрессіи, въ которой всѣ члены положительные, среднее ариѳметическое крайнихъ членовъ больше средняго ариѳметическаго всѣхъ членовъ.

268. Если $a^2+b^2=c^2$, причемъ a, b, c цѣлыя числа, то показать, что abc дѣлится на 60 и что если a—первоначальное число большее 3, то b дѣлится на 12.

269. Въ мѣшкѣ заключается n билетовъ съ нумерами 1, 2, 3,...n. Нѣкто вынимаетъ на удачу два билета съ условіемъ получить столько рублей, сколько единицъ въ произведеніи вынувшихся нумеровъ; найти величину его ожиданія.

270. Если A представляетъ первоначальный капиталъ, вносимый для того, чтобъ обезпечить извѣстному лицу пожизненный ежегодный доходъ въ 1 рубль, то показать, что для полученія этимъ лицомъ P рублей ежегоднаго дохода до его смерти, нужно внести тотчасъ и дѣлать это ежегодно впродолженіе его жизни $\frac{P}{R} - \frac{AP}{1+A}$ рубл., гдѣ R представляетъ то, во что обратится 1 р. по истеченіи года.

271. Если $\frac{x(y+z-x)}{\log x} = \frac{y(z+x-y)}{\log y} = \frac{z(x+y-z)}{\log z}$, то показать, что
$$y^z z^y = x^z z^x = x^y y^x.$$

272. Рѣшить $\sqrt{(x^2+a^2)(y^2+b^2)} + \sqrt{(x^2+b^2)(y^2+a^2)} = (a+b)^2$
$$x+y = a+b.$$

273. Найти рядъ квадратныхъ чиселъ, которыя по раздѣленіи ихъ на 7 давали-бы остатокъ 4.

274. Если $\frac{p_n}{q_n}$ будетъ n-ая подходящая дробь, приближающаяся къ $\sqrt{(a^2+1)}$, то показать, что
$$\frac{p_n}{q_n} = \sqrt{(a^2+1)} \frac{(a+\sqrt{a^2+1})^n + (a-\sqrt{(a^2+1)^n}}{(a+\sqrt{a^2+1})^n - (a-\sqrt{(a^2+1)^n}}.$$

275. Разложить $\frac{1+7x-x^2}{(1+3x)^2(1-10x)}$ въ рядъ по восходящимъ степенямъ x.

276. Найти законъ составленія каждаго изъ слѣдующихъ рядовъ
$$1+4x+18x^2+80x^3+356x^4+\ldots$$
$$1+2x+3x^2+8x^3+13x^4+30x^5+55x^6+\ldots$$

277. Если S представляетъ сумму m-ыхъ степеней n положительныхъ величинъ $a, b, c, \ldots k$; и P будетъ сумма произведеній этихъ величинъ, взятыхъ по m, то показать, что $\lfloor\underline{n-1}\ S$ будетъ больше $\lfloor\underline{n-m}\ \lfloor\underline{m}\ P$.

278. Если n будетъ первоначальное число больше 2, то показать, что всякое число въ системѣ счисленія, которой основаніе $2n$, оканчивается тою-же цифрою, какою оканчивается n-ая степень.

279. Въ кошлѣ находится 5 монетъ, причемъ извѣстно, что это шиллинги или суверены (20 шиллинговъ); было вынуто одновременно 2 шиллинга, которые не были положены обратно; опредѣлить цѣнность другого вынутія двухъ монетъ (въ шиллингахъ).

280. Если n будетъ цѣлое положительное число, а m таково, что ни одинъ знаменатель не уничтожается, то доказать, что

$$-\frac{1}{m}(1+x)^n-\frac{n}{m(m+1)}(1+x)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{m(m+1)(m+2)}(1+x)^{n-2}-\ldots$$

$$-\left\{\frac{1}{m}(1-x)^n-\frac{n}{m(m+1)}(1-x)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{m(m+1)(m+2)}(1-x)^{n-2}-\ldots\right\}$$

$$=2\left\{\frac{n}{m+n-1}x+\frac{n(n-1)(n-2)}{(m+n-3)\,\underline{|3}}x^3+\ldots\right\}.$$

281. Опредѣлить, между какими предѣлами заключается $\frac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}$ для всѣхъ дѣйствительныхъ значеній x.

282. Рѣшить уравненія $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$, $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}+(2xy)^{\frac{1}{2}}=b$.

283. Если $\frac{p^n}{q^n}$ представляетъ n-ую подходящую къ непрерывной дроби $\frac{1}{a+}\,\frac{1}{b+}\,\frac{1}{a+}\,\frac{1}{b+}\ldots$, то показать, что p_n и q_n будутъ соотвѣтственно коэффиціентами при x^{n-1} въ разложеніяхъ выраженій $\frac{1+bx-x^2}{1-(ab+2)x^2+x^4}$ и $\frac{a+(ab+1)x-x^3}{1-(ab+2)x^2+x^4}$.

284. Показать, что въ предыдущемъ примѣрѣ, если λ и μ будутъ значенія x^2, найденныя изъ уравненія $1-(ab+2)x^2+x^4=0$, то

$$ap_{2n}=bq_{2n-1}=\frac{ab(\lambda^n-\mu^n)}{\lambda-\mu},\quad p_{2n+1}=q_{2n}=\frac{\lambda^{n+1}-\mu^{n+1}-\lambda^n+\mu^n}{\lambda-\mu}.$$

285. Найти два числа такихъ, что первое было-бы равно произведенію цифръ второго и было-бы меньше удвоеннаго второго на 100.

286. Если A_m представляетъ величину годового дохода, получаемаго впродолженіе жизни m лицами вмѣстѣ, имѣющими одинаковый возрастъ, то показать, что величина такого-же ежегоднаго дохода, продолжающагося до тѣхъ поръ пока остается въ живыхъ одинъ изъ n лицъ одного возраста, можетъ быть найдена изъ таблицъ, дающихъ значенія A_m по формулѣ

$$nA_1-\frac{n(n-1)}{2}A_2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}A_3-\ldots\pm A_n.$$

287. Если x, y, z дѣйствительныя величины, то показать, что

$$a^2(x-y)(x-z)+b^2(y-x)(y-z)+c^2(z-x)(z-y)$$

не можетъ быть отрицательнымъ, если только какія нибудь двѣ изъ трехъ величинъ a, b, c въ суммѣ будутъ больше третьей.

288. Показать, что всякое квадратное число бываетъ одного изъ видовъ $5m$ или $5m\pm1$. Показать, что n^5-n всегда дѣлится на 30, а если n нечетное, то на 240.

289. Въ мѣшкѣ содержится n шаровъ, причемъ совершенно не извѣстно, какого они цвѣта. Вынутый шаръ оказался черным; онъ положенъ обратно; второе вниманіе дало такой-же результатъ. Предполагая, что вынутый во второй разъ шаръ положенъ опять, показать, что можно ставить $3n+3$ противъ $n-1$ въ пользу того, что при третьемъ вниманіи получится тоже черный шаръ.

290. Если x есть правильная дробь, а p положительная величина, то показать, что $n^p x^n$ будетъ безконечно малой величиною при n безконечно большомъ.

291. Если $1, x, x^3$ и $1, y^2, y^3$ каждые составляютъ гармоническую прогрессію, то показать, что $-y^2, y, x, x^2$ будутъ составлять ариѳметическую прогрессію и что ихъ сумма будетъ x^3+y^3, если предположить, что $x+y$ не будетъ равняться нулю и что ни x, ни y не равно единицѣ.

292. Показать, что $1^2r+3^2r^2+5^2r^3+\ldots+(2n-1)^2r^n$

$$=\frac{r(1+6r+r^2)-\{(2n-1)(1-r)+2\}^2r^{n+1}-4r^{n+2}}{(1-r)^3}.$$

293. Показать, что если r меньше единицы, и рядъ предыдущаго примѣра будетъ продолженъ до безконечности, то онъ будетъ сходящимся. Найти сумму его при безконечномъ числѣ членовъ.

294. Найти два рѣшенія уравненія $x^2-7y^2=1$ въ цѣлыхъ положительныхъ числахъ.

295. Если при обращеніи $\sqrt{N}$ въ непрерывную дробь первыя два частныя будутъ каждое равняться 5, то найти N.

296. Показать, что если x положительная величина, то наименьшее значеніе дроби $\frac{x^3+2a^3}{x}$ будетъ при $x=a$.

297. Количество топлива, истребляемаго пароходомъ, пропорціонально кубу скорости. Онъ потребляетъ 1.5 тонны каменнаго угля въ часъ, стоящаго по 9 р. за тонну, при скорости 15 англ. миль въ часъ; другіе расходы составляютъ 8 р. въ часъ. Найти наименьшій расходъ, какой можно сдѣлать при переходѣ въ 2000 англ. миль.

298. Показать, что если какое нибудь нечетное число на мѣстѣ десятковъ будетъ имѣть четную цифру, то всѣ цѣлыя степени его будутъ имѣть то-же четную цифру на мѣстѣ десятковъ.

299. Въ кошелькѣ находится три билета, означенныхъ нумерами 1, 2, 3; вынимается одинъ билетъ и кладется опять назадъ, что дѣлается четыре раза; показать, что можно ставить 41 противъ 40 за то, что сумма вынутыхъ нумеровъ будетъ четное число.

300. Доказать, что непрерывная дробь $\cfrac{1}{\cfrac{2}{1}+}\ \cfrac{1}{\cfrac{2}{2}+}\ \cfrac{1}{\cfrac{2}{3}+}\cdots\ \cfrac{1}{\cfrac{2}{n}} = S$,

гдѣ $S = \frac{1}{1\,2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$.

Найти значеніе этой непрерывной дроби, когда n будетъ безконечно большою величиной.

ОТВѢТЫ. I, II, III.

I. 1. 23. 2. 35. 3. 63. 4. 88. 5. 92. 6. 26. 7. $1\frac{1}{5}$.
8. 6. 9. 5. 10. 2. 11. 9. 12. 10. 13. 0. 14. 26. 15. 43.
16. 38 17. 76.536. 18. 9.

II. 1. $9a - 7b + 4c$.
2. $10x^3 - 4x + 13$.
3. $12x^2 + 6xy - y^2 + 3x + 4y$.
4. $4x^3 + a^2x$.
5. $2ab + 2x^2 + 2ax + 2bx$.
6. $3a - b + c - 6d$.
7. $2x^3 + x$ 8. $2a^2 - ax$. 9. $a - b + c - d$.
10. $2bx + 2by$. 11. $a - b + c - d$. 12. $a - b + c + d$.
13. $a - 7b$. 14. $5a$. 15. $2a - b - d$. 16. $12x - 8y$. 17. $3a$.
18. a. 19. $2a + x - 2b + y = 9$. 20. $3x^2$.

III. 1. $3pq + 2p^2 - 2q^2$.
2. $7a^3 + 16a^2b - ab^2 - 10b^3$.
3. $a^4 - a^2b^2 + 2ab^3 - b^4$.
4. $a^4 - a^2b^2 + 4ab^3 - 4b^4$.
5. $a^4 + 4a^3x + 4a^2x^2 - x^4$
6. $a^4 - 8a^2x^2 + 16x^4$.
7. $a^2b + (a-b)^2x - 2ax^2 - x^3$.
8. $60x^4 + 42x^3a - 107x^2a^2 + 10xa^3 + 14a^4$.
9. $6x^4 - 96$.
10. $4x^3 - 22x^2y + 42xy^2 - 27y^3$.
11. $12x^3 - 17x^2y + 3xy^2 + 2y^3$.
12. $x^6 - x^4y^2 + x^2y^4 - y^6$.
13. $x^2 - 4y^2 + 12yz - 9z^2$.
14. $6x^4 + x^3y + 2x^2y^2 - 13xy^3 + 4y^4$.
15. $x^4 + x^3(y+z) + x^2(y^2 + yz + z^2) + xyz(y+z) + y^2z^2$.
16. $a^3 + b^3 - c^3 + 3abc$.
17. $x^3 + y^3 + 3xy - 1$.
18. $x^5 + 151x - 264$.
19. $x^5 - 41x - 120$.
20. $4x^6 - 5x^5 + 8x^4 - 10x^3 - 8x^2 - 5x - 4$.
21. $x^6 + 10x - 33$.
22. $x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 17x^4 - 25x^3 + 6x^2 - 2x - 4$.
23. $a^8 + 2a^6 + 3a^4 + 2a^2 + 1$.
24. $a^4 - x^4$.
25. $x^4 - 10x^2 + 9$.
26. $x^8 + x^4 + 1$.

27. $x^8-x^6a^2+2x^5ab-(b^2+2ac)x^4+2x^3(bc+ad)-(c^2+2bd)x^2+2xcd-d^2$.

30. $abc+(ab+bc+ca)x+(a+b+c)x^2+x^3$.

31. $x^4-x^3(a+b+c+d)+x^2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)-x(bcd+acd+abd+abc)+abcd$.

32. $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$. 33. b^2-d^2.

34. $4(a^2+b^2+c^2+d^2)$. 36. $2(a^2+b^2+c^2)$. 37. $8x^3$.

38. $2(a^4+b^4+c^4)$. 39. $4(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$.

43. $x^6-22x^4+60x^3-55x^2+12x+4$.

44. $x^8-2x^7a+2x^5a^3-2x^4a^4+2x^3a^5-2xa^7+a^8$.

45. $a^5-a^4b-2a^3b^2+2a^2b^3+ab^4-b^5$.

IV. 1. x^2-x+1. 2. $9x^2-6xy+4y^2$. 3. a^2+ab-b^2.

4. a^2-3ab. 5. $32x^5+16x^4y+8x^3y^2+4x^2y^3+2xy^4+y^5$.

6. $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$. 7. x^2+y^2. 8. x^2+3x+2.

9. $16x^4-8x^3y+4x^2y^2-2xy^3+y^4$. 10. x^2-xy+y^2.

11. x^2-x+1. 12. $a^2-2ab+3b^2$. 13. $a^3-2a^2b+2ab^2-b^3$.

14. $16a^3-24a^2b+36ab^2-27b^3$. 15. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$.

16. x^4-5x^2+4. 17. $a^2-2ab+3b^2$. 18. x^4-8x^2+16.

19. x^3+3x^2+x-2. 20. $2x^3-8x^2+3x-12$.

21. $a+x$ 22. x^2-a^2. 23. $a+b+c$.

24. $3x^2-2abx-2a^2b^2$. 25. x^2-2x+1. 26. $3a^2+4ab+b^2$.

27. $x^2-xy+y^2+x+y+1$. 28. $a^2+b^2+c^2+bc+ca-ab$.

29. $b(2a^3+3a^2b-ab^2+4b^3)$. 30. $ab-ac+bc$. 31. $b+c-a$.

32. $(b+c)(c+a)$. 33. $a^4-4a^2bc+7b^2c^2$. 34. a^2+ax+x^2.

35. $(x+2z)y^2+(x^2-2z^2)y-xz(x+z)$. 36. $ab+bc+ca$.

37. $x^2-(a+b)x+ab$. 38. $x-b$. 39. $ab-ac+b^2-c^2$.

40. $a^2+b^2+c^2$. 41. $a+x$. 42. $(a+b-c-d)(a-b+c-d)$.

43. x^2-ax+a^2. 45. Частное будетъ $7xy(x+y)$.

46. Каждое равняется $abc-ap^2-bq^2-cr^2+2pqr$.

47. $(a-x)(a+x)(a^2+x^2)(a^4+x^4)(a^8+x^8)$.

48. $(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)$.

49. $(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)$.

V. 2. 9. 3. 70. 4. 6. 5. $y^4+11y^3+47y^2+93y+69$.

VI. 1. $x-2$. 2. $x+3$. 3. x^2+2x+3. 4. $x+1$. 5. $3x+4a$.

6. $x-y$. 7. $3x-7$. 8. $x-1$. 9. $x-2$. 10. x^2+x+1.

11. $x+2$. 12. $x-3$. 13. $2x-1$. 14. $x-y$. 15. x^2+2x+3.

16. $a(2a-3x)$. 17. $2x-9$. 18. $ax-by$. 19. $x^2+(a+y)x+y^2$.
20. $(x+1)^3$. 21. $2x^3-4x^2+x-1$. 22. $x-2a$. 23. $x-2$.
24. x^2-1.

VII. 1. $(2x^2+3x-2)(3x+1)$. 2. $(x^3-1)(x+2)$.
3. $(x^3-9x^2+23x-15)(x-7)$. 4. $(3x-2)(4x^3-4x^2-x+1)$.
5. $(x+1)^2(x^3-1)$. 6. $(x^2-y^2)(x^2-4y^2)$. 7. $16x^4-1$.
8. $x(x^6-1)$. 9. $(x^2-4a^2)^3$. 10. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.
11. $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$. 12. $(x^2-1)(x^2-9)(x+7)$.
13. x^4-16a^4. 14. $(x-a)(x-b)(x-c)$.
15. $(x+c)(2x-3b)(x^2+ax-b^2)$. 16. $36(a^4-b^4)(a^2-b^2)^2(a^3-b^3)$.

VIII. 1. $\frac{x+3}{x+7}$. 2. $\frac{x-4}{x-5}$. 3. $x-3$. 4. $a+b$. 5. $x+1$.
6. $\frac{3x-1}{2x-1}$. 7. $\frac{3x+2}{x+1}$. 8. $\frac{2x+3}{3x-4}$. 9. $\frac{3x+9}{x^4-x^3+6x^2-6x+6}$.
10. $\frac{x-5}{x+5}$. 11. $\frac{x^2+2x+3}{x^2-2x-3}$. 12. $\frac{1}{x^2-2x+2}$. 13. $\frac{(x-1)^2}{x^2-3x+1}$.
14. $\frac{a^2+b^2}{a}$. 15. $\frac{1}{b-2x}$. 16. $\frac{7(x^2+xy+y^2)}{5}$. 17. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.
18. $\frac{1}{2}$. 19. $\frac{-2}{(4x^2-1)x}$. 20. $\frac{2a}{n}$. 21. $\frac{9}{(x-1)(x+2)^2}$.
22. $\frac{2x-3}{(x^2-1)(2x+3)}$. 23. $\frac{ax-b^2}{x^2-b^2}$. 24. $\frac{1}{x+2}$. 25. 0.
26. $\frac{2ab^2}{a^4-b^4}$. 27. $\frac{x^2-4xy-y^2}{(x^2-y^2)^2}$. 28. $\frac{4ab}{(a-b)^2}$. 29. $\frac{4a}{a+x}$.
30. $\frac{81a-4b}{84}$. 31. 0. 32. 0. 33. 0.
34. $\frac{a^2b+b^2c+c^2a-b^2a-c^2b-a^2c}{(b-c)(c-a)(a-b)}=-1$. 35. $\frac{1}{abc}$. 36. 0. 37. 0.
38. $\frac{(a-b)b}{x(a+b)}$. 39. $\frac{x^3-y^3}{y(x^2+y^2)}$. 40. $\frac{3x}{4y}$. 42. $\frac{1-y}{x}$.
43. $\frac{ax}{a^2-x^2}$. 44. $\frac{a^2+b^2}{a}$. 45. 2. 46. $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}$.
47. $\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^2}{a^2}+1$. 48. $x^2+1+\frac{1}{x^2}$. 49. $\frac{(x+a)^2}{(x-b)^2}$. 50. $\frac{(a-x)^2}{x(a+x)}$.
51. $\frac{2(a-b)^2}{3b^2(a+b)}$. 52. $\frac{2y}{x^2-xy+y^2}$. 53. $\frac{y^2}{x^2+y^2}$. 54. $\frac{x+y}{y}$.

*

55. 1. 56. 1. 57. $x^3-x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}$. 58. $\frac{x^2+1}{x}$.

59. $\frac{x^2+x+1}{x}$. 60. $a^2-b^2+c^2+2ac$. 61. $\frac{a+x}{x-y}$.

62. $a^2-b^2+c^2-2ac$. 63. $\frac{x^2+3ax-2a^2}{x+6a}$ 64. $\frac{x^2-2a^2}{ax}$. 65. $\frac{ac-bd}{ac+bd}$.

66. $\frac{a^2+x^2}{2ax}$. 67. $\frac{bc+ca+ab}{bc+ca-ab}$. 68. $-\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{ab(a-b)^2}$.

69. $-\frac{bc(b-c)^2}{b^4+c^4+b^2c^2}$. 70. $\frac{xy}{x^2+y^2}$. 71. $\frac{(a^2+b^2)^2}{2a^2b^2}$. 72. m.

73. $\frac{4a^3x}{x^4-a^4}$. 74. $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$. 75. $\frac{4}{3(x+1)}$. 76. $\frac{adf+ae}{bdf+be+cf}$

IX. 1. 1. 2. 20. 3. 3. 4. 11. 5. $\frac{6}{7}$. 6. 13.

7. 8. 8. 1. 9. 7. 10. 7. 11. 4. 12. 3.
13. 5. 14. 28. 15. 2. 16. 2. 17. 3. 18. 10.
19. $1\frac{1}{3}$. 20. $2\frac{1}{2}$. 21. 5. 22. $\frac{1}{5}$. 23. 13. 24. 9.
25. 4. 26. 4. 27. 9. 28. $\frac{4}{13}$. 29. 13. 30. $\frac{2}{3}$.
31. 4. 32. 56. 33. 7. 34. $8\frac{3}{5}$. 35. $4\frac{1}{2}$. 36. $2\frac{3}{13}$.
37. $1\frac{4}{7}$. 38. 3. 39. 2. 40. 12. 41. 12. 42. 2.
43. 3. 44. —2. 45. 1. 46. 1. 47. 5. 48. $\frac{79}{29}$.

49. $3\frac{3}{8}$. 50. $\frac{8a}{25}$. 51. $\frac{cd-ab.}{a+b-c-d}$. 52. $\frac{a^2(b-a)}{b(b+a)}$.

53. $\frac{a(1-b^2)}{b(a^2-1)}$. 54. $\frac{a^2c+b^2a+c^2b-a-b-c}{ac+bc+ab-1}$. 55. $\frac{ac}{b}$.

56. $\frac{ab(a+b-2c)}{a^2+b^2-ac-bc}$. 57. $\frac{rb-cq}{pc-ra}$. 58. $\frac{ab}{a+b}$. 59. $\frac{nb-ma}{m-n.}$.

60. $\frac{a-b}{2}$. 61. $\frac{1}{3}(a+b+c)$. 62. 2. 63. 20. 64. 5.

X. 1. 1290 р. 2580 р. 2. 120 р. 300 р. 3. 32 р.
4. 1680 р. 50 к. 5. 28, 18. 6. 38 дѣтей, 76 женщ. 152 мужчинъ.
7. 720 рубл. 8. 144 р. 240 р. 210 р. 9. 350 р. 450 р. 720 р.
10. A 162 р., B 118 р.. C 104 р. 11. 3456, 2304.
12. 126 кружекъ. 13. 17 р. 40 к. 14. 22 р. 5 к.
15. 3780 р. 1575 р. 16. 400 дюйм. 17. 30. 18. 42.

19. 7, 8. 20. 8, 6, 3, 2; всего 24 короля. 21. 3.
22. 6 шиллинг. 23. 22680 р. 24. 11 быковъ, 24 овцы.
25. Каждый взялъ по 5 гривенниковъ; въ кошелькѣ ихъ было 20.
26. 240. 27. 90 и 180; 100 и 230. 28. 48 минутъ.
29. 90000 р. 30. 5. 31. 60 апельсин. и 240 яблоковъ.
32. 10 изъ A, 4 изъ B. 33. 11, 22, 33. 34. 2650 р.
35. Черезъ $6\frac{6}{11}$ м. послѣ одного 36. $\frac{abc}{b+c}$. 37. $2\frac{2}{3}$ шилл. 38. 40.

XI. 1. $x=11$, $y=4$. 2. $x=5$, $y=7$. 3. $x=16$, $y=7$.
4. $x=2$, $y=13$. 5. $x=8$, $y=1$. 6. $x=2$, $y=6$.
7. $x=3$, $y=5$. 8. $x=3$, $y=4$. 9. $x=12$, $y=3$.
10. $x=4$, $y=3$. 11. $x=10$, $y=20$. 12. $x=60$, $y=36$.
13. $x=12$, $y=20$. 14. $x=-6$, $y=12$. 15. $x=18$, $y=6$.
16. $x=7$, $y=11$. 17. $x=2$, $y=7$. 18. $x=0.4$, $y=0.1$.
19. $x=4$, $y=1$. 20. $x=\frac{10}{3}$, $y=\frac{20}{3}$. 21. $x=12$, $y=6$.
22. $x=2$, $y=-1$. 23. $x=3$, $y=2$. 24. $x=18$, $y=12$.
25. $x=5$, $y=6$. 26. $x=10$, $y=5$. 27. $x=y=\frac{a}{6}$.
28. $x=y=m+n$. 29. $x=3a$, $y=-2b$. 30. $x=\frac{nc+bd}{mb+na}$, $y=\frac{mc-ad}{mb+na}$.
31. $x=b+c$, $y=a+c$. 32. $x=(a+b)^2$, $y=(a-b)^2$.

XII. 1. $x=7$, $y=5$, $z=4$. 2. $x=2$, $y=3$, $z=4$.
3. $x=1$, $y=2$, $z=3$. 4. $x=2$, $y=3$, $z=5$.
5. $x=2$, $y=3$, $z=4$. 6. $x=8$, $y=4$, $z=2$.
7. $x=10$, $y=2$, $z=3$. 8. $x=4$, $y=3$, $z=5$.
9. $x=3$, $y=4$, $z=6$. 10. $x=\frac{4}{3}$, $y=4$, $z=\frac{4}{5}$.
11. $x=\frac{7}{6}$, $y=-\frac{7}{2}$, $z=\frac{21}{10}$. 12. $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=\frac{1}{4}$.
13. $x=2$, $y=3$, $z=1$. 14. $x=6$, $y=\frac{20}{3}$, $z=\frac{46}{3}$.
15. $x=4$, $y=9$, $z=16$, $u=25$. 16. $u=4$, $x=12$, $y=5$, $z=7$.
17. $x=3$, $y=1$, $u=9$, $z=5$. 18. $x=3$, $y=2$, $u=5$, $z=-4$.
19. $x=2, y=4, z=3, u=3, v=1$. 20. $x=2, y=1, z=3, u=-1, v=-2$.
21. $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{b}{2}$, $z=\frac{c}{2}$. 22. $x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. 23. $x=2a, y=2b, z=2c$.
24. $x=\frac{1}{(a-b)(a-c)}$. 25. $x=\frac{A(A-b)(A-c)}{a(a-b)(a-c)}$. 26. $\frac{2}{x}=-\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.
27. $x=b+c-a$. 28. $x=abc$, $y=ab+bc+ca$, $z=a+b+c$.

XIII. 1. $\frac{5}{8}$. 2. 250, 320. 3. $\frac{4}{15}$. 4. 5, 6. 5. 42 к., 26 к. 6. 75 шилл. и 35 шилл. 7. 5 и 7. 8. 7 и 10. 9. $\frac{11}{14}$ р., $\frac{11}{21}$ р. 10. 1. 3, 5. 11. Чай 2 р. 40 к. сахаръ 16 к. фунтъ. 12. 50. 13. 24000, 32000, 36000 р.; соотвѣтственно 4, 5, 6 процентовъ. 14. 20 лицъ; по 6 рубл. каждый. 15. 8 и 12. 16. 540 ф.; 17 пенсовъ. 17. 300, 140, 218. 18. 672 р. быкъ стоитъ 96 р.; ягненокъ 9 р. 19. A 21 партію, B 13 партій. 20. A 5 р. 28 к., B 18 р. 24 к. C 15 р. 84 к. D 15 р. 36 к., E 17 р. 28 к. 21. 90 верстъ. 22. A исполнитъ работу одинъ въ 80 дней, B — въ 48 дней; A долженъ получить $\frac{11}{32}$ всѣхъ денегъ, а B — $\frac{21}{32}$ всѣхъ денегъ. 23. A въ 5 минутъ, B въ 6 минутъ. 4. $2\frac{1}{2}$, 2 версты въ часъ; разстояніе 5 верстъ. 25. 100 верстъ; начальн. скор. 25 верстъ въ часъ. 26. A 26, B 14, C 8 р. 27. A въ $\frac{pm}{p+n-m}$ дней, B въ $\frac{pm}{m-n}$ дней. 28. $\frac{b(n-1)}{a-c}$ верстъ въ часъ. 29. 4 и 5 аршинъ. 30. 27. 31. 63. 32. Карета дѣлаетъ 10 верстъ въ часъ; поѣздъ 30 верстъ. Отъ A до B $16\frac{2}{3}$ версты; отъ A до C 20 верстъ; отъ C до B 40 верстъ. 33. 600 арш.

XIV. 1. a. 2. $\frac{2x^2-4}{x+3}$. 3. $\frac{b}{a}$. 4. 0. 6. $\frac{a+b+c}{2}$.
8. $x=a+b$. 9. $x=a, y=b, z=c$. 10. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$.

XV. 1. $\frac{x^2+2x+3}{x^2+x+1}$. 3. $t=x$. 6. $\frac{11}{2}$. 7. $x=b-c$, $y=c-a$, $z=a-b$. 8. Освободимъ данное соотношеніе отъ дробей; тогда найдемъ, что $(a+b)(b+c)(c+a)=0$, слѣдовательно одинъ изъ трехъ множителей долженъ уничтожиться; отсюда слѣдуетъ искомый выводъ. 9. Каждый изъ дѣтей получаетъ 18437 р. 76 к.; каждый изъ братьевъ 9218 р. 88 к. 10. $x=-3a$.

XVI. 1. $1+4x+10x^2+12x^3+9x^4$.
2. $1-2x+3x^2-4x^3+3x^4-2x^5+x^6$.
4. $1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$. 5. $2(1+15x^2+15x^4+x^6)$.
9. Найдемъ, что числитель будетъ равенъ $5(1+x^2)^4$, а знаменатель $(1+x^2)^3$, такъ что дробь будетъ $=\frac{5}{1+x^2}$.

XVII. 1. x^2-x+1. 2. x^2-2x-2. 3. $2x^2+3x-1$.
4. $2x^2-x+1$. 5. $2x^2-3ax+4a^2$. 6. $5x^2-3ax+4a^2$.
7. $(x-a)^3$. 8. a^2+b^2. 9. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$. 10. $a^2-b^2+c^2-d^2$.

11. $x-2-\frac{1}{x}$. 12. $x^2-\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$. 13. $\frac{a^2}{2}+\frac{a}{x}-\frac{x}{a}$.

14. $a^2+(2b-c)a+c^2$. 15. $(a-2b)x^2-ax+2b-3$. 16. 1.14.

17. x^2-3x+2. 18. $2x^2+4cx-3c^2$. 19. $2x^2-3cx+4c^2$.

20. 5.51. 21. 9009. 22. 22,22.

23. 111111111. 24. $x-\frac{1}{x}$. 26. Данное выраженіе $=(x^2-yz)$ $\{(x^2-yz)^2-(y^2-zx)(z^2-xy)\}$ + два подобныхъ-же выраженія $=(x^2-yz)x\{x^3+y^3+z^3-3xyz\}$ + два подобныхъ-же выраженія $=\{x^3+y^3+z^3-3xyz\}^2$.

XVIII. 1. $x^{\frac{4}{3}}$. 2. $a^{-\frac{17}{60}}$. 3. $\frac{y^{\frac{1}{3}}}{(bx)^{\frac{1}{6}}}$. 4. 1. 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^{mn}$.

6. $a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$. 7. $x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{3}{2}}y-xy^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{5}{2}}$ 8. a^4-1.

9. $a+a^{\frac{1}{3}}-1+a^{-\frac{1}{3}}+a^{-1}$. 10. $-4a^{-7}b^{-1}+9a^{-9}b$. 11. $x+y$.

12. $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}$. 13. a^n+1+a^{-n}. 14. $2x^2-3xy+2y^2$.

15. $a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-b$. 16. $\frac{x+a}{x^2+3xa+a^2}$. 17. $\frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}+y^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}-\frac{x}{2y^{\frac{1}{2}}}$.

18. $2a^{\frac{1}{2}}-3b^{\frac{1}{3}}+4c^{\frac{1}{4}}$. 19. $16x^{\frac{2}{3}}-16x^{\frac{1}{3}}+12-4x^{-\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}$.

XIX. 1. $a^{\frac{5}{2}}+a^2b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{4}{3}}+ab^2+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{8}{3}}+b^{\frac{10}{3}}$.

2. $2^{\frac{5}{2}}+2^2.3^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{3}{2}}.3^{\frac{2}{3}}+2.3+2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{4}{3}}+3^{\frac{5}{3}}$.

3. $3^{\frac{3}{2}}-3.5^{\frac{1}{4}}+3^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{2}{4}}-5^{\frac{3}{4}}$. 4. 0.2679492. 7. $3\sqrt{\frac{x}{y}}-4+3\sqrt{\frac{y}{x}}$.

8. $a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-b$. 9. $1+\sqrt{3}$. 10. $2-\sqrt{3}$. 11. $\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

12. $\sqrt{10}+2\sqrt{2}$. 13. $3\sqrt{7}-2\sqrt{3}$. 14. $\sqrt{\frac{25}{2}}+\sqrt{\frac{7}{2}}$.

15. $\sqrt{\left\{\frac{(a+c)(b+c)}{2}\right\}}+\sqrt{\left\{\frac{(a-c)(b-c)}{2}\right\}}$. 16. $\sqrt[4]{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

17. $\sqrt[4]{3}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{*}{}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$. 18. $\frac{1}{\sqrt[4]{(1-c^2)}}\left\{\sqrt{\left(\frac{1+c}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1-c}{2}\right)}\right\}$.

19. $\frac{5}{3}\sqrt{3}-2$. 20. 1. 21. $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.
22. $1+\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}$. 23. $\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{5}-1$. 24. $1+\sqrt{2}$.
25. $1+\sqrt{5}$. 26. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$. 27. $\sqrt{6}-\sqrt{5}$. 29. $x=25$.
30. $x=7$. 31. $x=\frac{ab}{a+b}$. 32. $x=\frac{a^2+b^2+c^2-2bc-2ca-2ab}{4c}$.

XX. 1. $x=1, 3$. 2. 1, 4. 3. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$. 4. 4, $-\frac{5}{3}$.
5. 3, $\frac{1}{2}$. 6. 17, $\frac{2}{3}$. 7. $-4, -6$. 8. $5, -\frac{32}{7}$.
9. 3, 11. 10. $\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$. 11. $\frac{5}{3}, -\frac{3}{2}$. 12. $\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$.
13. $\frac{1}{10}, \frac{1}{11}$. 14. $\frac{1}{13}, \frac{1}{60}$. 15. $4, -1$. 16. $3, -\frac{4}{3}$.
17. 4, $\frac{7}{5}$. 18. $6, -1$. 19. $5, -\frac{5}{2}$. 20. 8, $\frac{5}{2}$.
21. $\frac{1}{2}, \frac{9}{2}$. 22. $3, -\frac{1}{25}$. 23. $10, -2$. 24. $-\frac{1}{2}-\frac{73}{50}$.
25. $\frac{2}{3}, \frac{3}{10}$. 26. $\pm\sqrt{6}$. 27. $-1, \frac{3}{5}$. 28. $7, -\frac{7}{9}$.
29. $3, -\frac{24}{13}$. 30. 2, 16. 31. $-2, -16$. 32. $5, -3$.
33. $3, -5$. 34. $29, -10$. 35. $10, -29$. 36. $1, -\frac{3}{5}$.
37. $3, -\frac{4}{5}$. 38. 2, $\frac{1}{3}$. 39. $8, -8$. 40. $10, -\frac{2}{5}$.
41. $2, -3$. 42. 24, $\frac{42}{5}$. 43. $3, -\frac{14}{3}$. 44. $3, -\frac{5}{3}$.
45. $3, -\frac{4}{5}$. 46. $\frac{7}{4}$, 1. 47. $\frac{13}{3}$, 1. 48. 0, 4.
49. 0, $\frac{4}{3}$. 50. $1, -\frac{3}{7}$. 51. $2+\sqrt{3}$, II$-(2+\sqrt{3})2$.
52. $a\pm b$. 53. $a\pm\sqrt{(a^2-b^2)}$. 54. $\frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$.
55. $\frac{1}{3}\{a+b+c\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}\}$. 56. $a+b+c$.
57. $-a, -b$. 58. $\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{\{(a^2-b^2)^2+4abc^2\}}}{2ab}$.
59. 0, $\frac{2ab-ac-bc}{a+b-2c}$. 60. $\frac{2a-b}{ac}, -\frac{3a+2b}{bc}$.

61. $\frac{1}{a+b+c}\left\{ab+bc+ca\pm\sqrt{\{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc(a+b+c)\}}\right\}$.

62. $-a$, $\frac{a(1+c)}{c(2c+3)}$.

Въ слѣдующихъ главахъ ирраціональные и невозможные корни не вездѣ даны; а нѣкоторые изъ данныхъ корней не имѣютъ приложенія. См. ст. 329 и 330.

XXI. 1. 1, $\frac{1}{9}$. 2. 1, -2. 3. $(-41)^{\frac{2}{3}}$, 9. 4. 14^{2n}, $(-1)^{2n}$.
5. 2, 3. 6. 2^n, $(-1)^n$. 7. $\{-\sqrt{a}\pm\sqrt{(a-c)}\}^2$ 8. ± 11.
9. $\pm 2, \pm\sqrt{10}$. 10. 8, $\frac{125}{64}$. 11. 8, $\left(-\frac{13}{7}\sqrt{2}\right)^2$. 12. $2^{\frac{3}{2n}}$, $\left(-\frac{8}{3}\right)^{\frac{3}{2n}}$.
13. 4, -1. 14. 4, $\frac{1}{4}$. 15. 16, $\left(\frac{11}{5}\right)^4$. 16. $(-1)^{\frac{4}{3}}\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{4}{3}}$.
17. $\frac{17}{4}$, $\frac{1}{4}$. 18. 2^n, $\frac{1}{2^n}$. 19. 9, $-\frac{18}{5}$. 20. ± 5. 21. $\frac{\pm\sqrt{(4ab-b^2)}}{2}$.
22. 16, 0. 23. 18, 3. 24. $2^x=8$ или -10; такъ что $x=3$.
25. 5, -8. 26. 0, $\frac{\pm\sqrt{3}}{2}a$. 27. $x^2=\frac{n}{n-2}$ или $\frac{n-1}{n+1}$.
28. $x^2=-ab\pm\frac{1}{2}(a^2-b^2)\sqrt{3}$.
29. $\{\sqrt{(x+2)}+\sqrt{(x^2+2x)}\}^2=(a-x-\sqrt{x})^2$, квадратное уравненіе относительно $\sqrt{x}$, изъ котораго $\sqrt{x}=\frac{-(2+a)\pm\sqrt{(2a^3+3a^2)}}{2+2a}$.
30. 1, $\frac{c^2-2}{(c+2)^2}$. 31. Умножить и расположить $x\{\sqrt{(a-x)}-\sqrt{(a+x)}\}$ $=\sqrt{a}\{\sqrt{(a^2-x^2)}-a\}$, возвести въ квадратъ и проч. $x=0$, $\pm\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
32. $\pm 2a$. 33. 1, $-\frac{25}{3}$. 34. 1, $\frac{1}{21}$. 35. $\pm 2a$, $\pm 2a\sqrt{(-1)}$.
36. $x^n=0$ или $\frac{4c^2a}{(c^2-1)^2b}$. 37. $\frac{1}{2}$, $-\frac{25}{6}$. 38. $\pm a$, $\pm\frac{1}{a}$.
39. $\pm\frac{5a}{3}$, $\pm\frac{a\sqrt{(-34)}}{3}$. 40. $\pm\sqrt{2}$. 41. 0, $\frac{a\{1\pm\sqrt{(-8)}\}^6}{3^6}$.
42. $\frac{a}{2}(1\pm\sqrt{5})$ 43. $x^2=\frac{m^4-4m^2}{4(m^2-1)}$. 44. $x^2=9$. 45. $x^2=\frac{a^4-b^4}{7a^2-2b^2}$.
46. $x^2=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. 47. $\{c\pm\sqrt{(c^2-1)}\}^{\frac{2pq}{p-q}}$. 48. 0, $\frac{16}{25}$.

49. $\pm 2a, \pm a\sqrt{(-6)}$. 50. $\frac{3}{2}, \frac{2}{3}$. 51. $0, -\frac{4(a+b)(a^2+b^2)}{3a^2+3b^2+10ab}$.

52. $1, -\frac{4}{3}$. 53. $8, -\frac{23}{5}$. 54. $\frac{ac^2}{b^2}$. 55. $1, \frac{47-44\sqrt{6}}{23}$.

56. $1, \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2+4}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-4}$. 57. $0, -1$. 58. $0, \frac{1}{2}(-b \pm \sqrt{b^2-4a})$.

59. $0, \frac{1}{2}\{a+b+c \pm \sqrt{(a^2+b^2+c^2-2bc-2ca-2ab)}\}$.

60. $0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. 61. $0, \pm\sqrt{(a^2+b^2)}$. 62. $0, \pm\sqrt{\{mn+a(m-n)\}}$.

63. $0, a\left(1 \pm 2\sqrt{\frac{b}{c}}\right)$. 64. Перенести члены и возвести въ квадратъ; получимъ $2x(2x+1)\sqrt{(x^2+2)} = 2(x^2+1)(2x+1)$; отсюда найдемъ, что единственное рѣшеніе будетъ $x = -\frac{1}{2}$. 65. 1. 66. 4, —9.

67. 0, 2. 68. $0, -5, \frac{1}{3}, -\frac{16}{3}$. 69. $1, -4, \frac{-3 \pm \sqrt{109}}{2}$. 70. $1, \frac{1}{2}$.

71. $2, -5, \frac{1}{2}\{-3 \pm \sqrt{241}\}$. 72. $a+2, -\frac{a+6}{3}$. 73. $2, -\frac{1}{2}$.

74. 1, —2. 75. $x^2+5ax = -5a^2 \pm \sqrt{(a^4+c^4)}$, отсюда найдется x.

76. $x^2+3x = \frac{1}{4}$ или $-\frac{9}{4}$, откуда найдется x.

77. $\frac{a^2+x^2}{ax} = \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$, и проч.; $x = \frac{a}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$.

78. $a = \left(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^4 + \left(x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^4$; квадратное уравненіе относительно $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$.

79. $(x^2-x)^2-(x^2-x) = a$. 80. 4, —3.

81. $\{\sqrt{x}+\sqrt{(x+7)}\}^2+\sqrt{x}+\sqrt{(x+7)} = 42$. $x = 9$ или $\left(\frac{29}{12}\right)^2$.

82. $(x-4\sqrt{x})^2+2(x-4\sqrt{x})+1 = 0$; $x = 7 \pm 4\sqrt{3}$.

83. $\{\sqrt{x}+\sqrt{(a+x)}\}^2+\sqrt{x}+\sqrt{(a+x)} = b+a$; и проч.

84. $(x^2+x)^2+4(x^2+x)+4 = 16x^2$. $x = 1$ или 2.

85. $(x^2+a^2)^2 = 2a^2(x-a)^2$. 86 $\left(x+\frac{c}{ax}\right)^2+a\left(x+\frac{c}{ax}\right)+b = \frac{2c}{a}$.

87. $\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\right)^2-2\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\right)+1 = 0$. 88. $x+\frac{1}{x} = \frac{10}{3}$ или $-\frac{16}{3}$.

89. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{x}\right)+1 = 0$, послѣ сокращенія на $\frac{\sqrt{(x-1)}}{\sqrt{x}}$.

90. $1+\sqrt{3}\pm\sqrt{(3+2\sqrt{3})}$, $1-\sqrt{3}\pm\sqrt{(3-2\sqrt{3})}$.

91. $(x+1)(x^2-x+1)=0$. 92. $(x+1)\{1+n(x^2-x+1\}=0$.

93. $x=5$ будетъ очевидно одно изъ рѣшеній.

94. $x=6$ будетъ одно рѣшеніе. 95. $x=5$ есть очевидно одно рѣшеніе.

96. $x=0$ есть очевидно одно рѣшеніе. 97. $(x^2-4)(x+1)=0$.

98 $x=a$ есть очевидно одно рѣшеніе.

99. $8x^3-1+8(2x-1)=0$; слѣдовательно $x=\frac{1}{2}$ есть одно рѣшеніе.

100. $x^2-\frac{4}{9}=\frac{1}{x}\left(x+\frac{2}{3}\right)$; слѣдовательно одно рѣшеніе $x=-\frac{2}{3}$.

101. $x^2=1$, какъ видно съ перваго взгляда.

102. $x=-m$ очевидно, есть рѣшеніе. 103. $x=a$, b, или $-(a+b)$.

104. $x+p-1$ есть множитель. 105. $x(p-1)+1$ есть множитель.

XXII. 1. $3(x-5)(x+\frac{5}{3})$. 2. $(x+60)(x+13)$.

3. $2(x+2)(x-\frac{3}{2})$. 4. $(x-62)(x-26)$. 5. $x^2-14x+48=0$.

6. $x^2-9x+20=0$. 7. $x^2+x-2=0$. 8. $x^2-2x-4=0$.

9. 42, 36, 117. 10. $m=8$. 11. $\frac{p^2-2q}{q}$, $p(p^2-3q)$.

12. $cx^2+bx+a=0$.

XXIII. 1. $x=\pm3$; $y=\pm4$. 2. $x=60,\ 40$; $y=40,\ 60$.

3. $x=2,\ y=2$. 4. $x=4,\ \frac{16}{3}$; $y=3,\ \frac{5}{3}$. 5. $x=7, 5, y=-5, -7$.

6. $x=2,\ 5$; $y=6,\ 3$. 7. $x=\pm7,\ \pm4$; $y=\pm4,\ \pm7$.

8. $x=-1,\ \frac{5}{3}$; $y=-1,\frac{3}{5}$. 9. $x=1,\ y=1$.

10. $x=\pm3\mp8$; $y=\pm5$. 11. $x=5,\ \frac{333}{28}$; $y=9,\ \frac{370}{84}$.

12. $x=\pm3,\ \pm36$; $y=\pm5,\ \mp\frac{23}{2}$. 13. $x=\pm3,\pm\frac{5}{\sqrt{2}}$; $y=\pm2,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

14. $x=\pm2,\ \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$; $y=\pm\frac{1}{2},\ \mp2\sqrt{\frac{2}{5}}$.

15. $x=\pm3,\ \pm\frac{8}{\sqrt{6}}$; $y=\pm1,\ \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. 16. $x=\pm4,\pm3\sqrt{3}$; $y=\pm5,\pm\sqrt{3}$.

17. $x=\pm\frac{15}{\sqrt{21}}$, $y=\pm\frac{3}{\sqrt{21}}$. 18. $x=3,\ -\frac{53}{27}$; $y=-4,\ \frac{227}{27}$.

19. $x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$; $y=2\mp\sqrt{\frac{5}{2}}$. 20. $x=\pm6$, $y=\pm3,\ \mp3$.

21. $x=\pm3\sqrt{2}$; $y=\pm\sqrt{2},\ \mp\sqrt{2}$. 22. $x=0,\ 4$; $y=0,\ 5$.

23. $x=0,\ -1;\ y=0,\ -\frac{12}{5}$. 24. $x=0,\ 15;\ y=0,\ 45$.

25. $x=0,\ 2,\ \pm\sqrt{2};\ y=0,\ 2,\ 2\mp\sqrt{2}$. 26. $x=0,\ 4,\ -2;\ y=0,\ 2,\ -4$.

27. $x=5,\ \frac{21}{5};\ y=3,\ \frac{7}{5}$. 28. $x=4,\ 2;\ y=2,\ 4$.

29. $x=2,0;\ y=0,\ -2$. 30. $x=1,\ 4;\ y=4,1$.

31. $x=1,\ 10;\ y=10,\ 1$. 32. $x=3,\ 2;\ y=2,\ 3$.

33. $x=8,\ 4;\ y=4,\ 8$. 34. $x=17,\ 1;\ y=1,\ 17$.

35. $x=4,\ 2,\ -1\pm\sqrt{\frac{11}{3}};\ y=2,\ 4,\ -1\mp\sqrt{\frac{11}{3}}$.

36. $x=4,\ y=1$. 37. $x=1,\ 4;\ y=4,\ 1$.

38. $x=2,\ 3;\ y=3,\ 2$. 39. $x=\pm2,\ y=\pm2$; или $x=\pm2,\ y=\mp2$.

40. $x=3,\ y=1;\ x=1,\ y=3$. 41. $x=5,\ -2;\ y=2,\ -5$.

42. $x=\pm2,\ \pm1;\ y=\pm1,\ \pm2$. 43. $x=\frac{1}{4}(9\pm\sqrt{73}),\ y=\frac{1}{4}(9\mp\sqrt{73})$.

44. $x=\pm3,\ \pm2;\ y=\pm2,\ \pm3$. 45. $x=\pm5,\ \pm3;\ y=\pm3,\ \pm5$.

46. $x=\pm3,\ \pm2;\ y=\pm2,\ \pm3$. 47. Первое уравненіе можно написать такъ: $xy(y+x-3)=3(4x+y-xy)$; комбинируя его со вторымъ уравненіемъ, найдемъ $x=\pm\sqrt{(-3)},\ \pm\sqrt{3};\ y=3\mp\sqrt{(-3)},\ \pm2\sqrt{3}$.

48. $x=8,\ 2;\ y=2,\ 8$. 49. $x=9,\ 4;\ y=4,\ 9$.

50. $x=8,\ 64;\ y=64,\ 8$. 51. $x=5,\ 13;\ y=4,\ 12$.

52. $x=4,\ 9;\ y=9,4$. 53. $x=2,\ 8;\ y=8,\ 2$.

54. $\sqrt{x}=2\pm\sqrt{6},\ \frac{1}{2}\{\pm\sqrt{(15)}-5\};\ \sqrt{y}=-2+\sqrt{6},\ \frac{1}{2}\{\pm\sqrt{(15)}+5\}$.

55. $x=5,\ y=3$. 56. $x=\pm1,\ y=3$. 57. $x=\frac{a}{2},\ y=\frac{b}{2}$.

58. $x^2=\frac{1}{2}\{a^2\pm\sqrt{(a^4+4b^4}\};\ y^2=\frac{1}{2}\{-a^2\pm\sqrt{(a^4+4b^4,}\}$.

59. $xy=\frac{1}{2}\{2a^2\pm\sqrt{(2a^4+2b^4)}\}$; затѣмъ можно идти дальше.

60. $x=\frac{a}{2}\{1\pm\sqrt{3}\},\ \frac{a}{2}\left\{1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right\};\ y=\frac{a}{2}\{1\mp\sqrt{3}\},\ \frac{a}{2}\left\{1\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

61. $x=a,\ b;\ y=b,\ a$. 62. $x=a,\ \frac{3ab-a^2}{a+b};\ y=b,\ \frac{3ab-b^2}{a+b}$.

63. Поступать какъ на стр. 171. 64. $x^2=\pm\frac{5a^2}{3},\ \pm a^2;\ y^2=\frac{4a^2}{3},\ 0$.

65. $x=0,\ 2(a+b),\ y=0,\ 2ab$. 66. $4axy=(1-xy)^2$; это даетъ квадратное уравненіе относительно xy.

67. $\frac{x+y}{x-y}=\frac{ay}{c}$; такимъ образомъ $x=\frac{(ay+c)y}{ay-c}$, и проч.

68. $x=\frac{a^3\pm b(2b^2-a^2)}{4(a^2-b^2)}$; $y^2=ax-\frac{a^2}{4}$. 69. $x^2=b^2\{2\pm\sqrt{3}\},\ y^2=a^2\{2\mp\sqrt{3}\}$.

70. Сложимъ; тогда $x^2(x-1)^2+y^2(y-1)^2=a+b$; точно также первое данное уравненіе можетъ быть написано такъ: $x(x-1)+y(y-1)=a$; такимъ образомъ мы получаемъ $x(x-1)=\frac{1}{2}\{a\pm\sqrt{(2a+2b-a^2)}\}$; $y(y-1)=\frac{1}{2}\{a\mp\sqrt{(2a+2b-a^2)}\}$. 71. $x=0, 2a$; $y=b, -b$; $z=c, -c$.

72. $x=\frac{1}{2}, \frac{5}{26}$; $y=\frac{1}{3}, \frac{15}{13}$, $z=\frac{1}{4}, \frac{15}{44}$. 73. Три простыя уравненія для нахожденія xy, yz, zx. 74. Три простыя уравненія для нахожденія $\frac{1}{xy}$, $\frac{1}{yz}$, $\frac{1}{zx}$; также x, y и z могутъ быть каждое $=0$.

75. Изъ перваго и второго уравненій посредствомъ вычитанія находимъ $x=y$ или $x+y=z$; тогда нужно воспользоваться третьимъ уравненіемъ, чтобы пополнить рѣшеніе. Такимъ образомъ мы получаемъ $x=y=\pm\frac{1}{2}\{2c+a\pm\sqrt{(a^2+4ac-4c^2)}\}^{\frac{1}{2}}$ и $z=\{2c-a\mp\sqrt{(a^2+4ac-4c^2)}\}:4x$; или $x2\sqrt{2}=\sqrt{(a+c)}+\sqrt{(5c-3a)}$, $y2\sqrt{2}=\sqrt{(a+c)}-\sqrt{(5c-3a)}$, $z\sqrt{2}=\sqrt{(a+c)}$.

76. Составить квадратное уравненіе относительно z; тогда $z=6$ или $-\frac{5}{2}$; съ первымъ значеніемъ мы найдемъ $x=4$ и $y=5$; со вторымъ $x=\frac{355}{42}$, $z=\frac{190}{21}$.

77. Исключая z, получимъ $x+y+\frac{1}{xy}=\frac{7}{2}$ и $xy+\frac{x+y}{xy}=\frac{7}{2}$; слѣдовательно $(x+y)\left(1-\frac{1}{xy}\right)=\frac{x^2y^2-1}{xy}$ и проч. 2, 1, $\frac{1}{2}$ будутъ значеніями x, y, z; эти значенія могутъ быть расположены шестью способами.

78. Мы можемъ вывести $xyz=0$; такимъ образомъ одна или болѣе изъ трехъ величинъ x, y, z должна быть равна нулю. Рѣшенія будутъ 0, 0, 1,которыя можно расположить тремя способами. 79. $x=a^2 : \pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}$.

80. Составить квадратное уравненіе относительно $x+y+z$, которое даетъ для одного рѣшенія 9; оно приведетъ къ кубическому уравненію относительно xy, котораго корни, какъ увидимъ, будутъ 6, 8, и 12; отсюда для значеній x, y, z мы получаемъ 2, 3, 4, которыя можно распредѣлить шестью способами.

XXIV. 1. 15 и 24. 2. 3, 4, 5; т.-е. 60. 3. 360 ф. и 363 ф. 4. Пять верстъ въ часъ. 5. 66 на одной сторонѣ, 22—на другой.

6. 28 десятинъ. 7. 14. 8. $\frac{a}{4}(1+\sqrt{5})$ будетъ продолженная часть, если a означаетъ данную линію. 9. 50 и 15. 10. 12. 11. 36 коп. 12. 30 австр.; 36 баварскихъ. 13. 5 и 4. 14. Первый работалъ 24 дня по 1 р. 28 к. въ день; второй 18 дней по 96 коп. въ день. 15. 15 человѣкъ; каждый издержалъ 3 р. 40 к. 16. 100 акцій по 15 фунт. за каждую. 17. $x^2+x^3=9(x+1)$; слѣдовательно $x^2=9$; число равно 3. 18. 7 и 6 процентовъ. 19. Скорость поѣзда равна $\frac{7}{2}$ скорости кареты; 14 миль. 20. A въ 40 часовъ; B въ 60 часовъ. 21. 70 верстъ. 22. 150 верстъ. 23. 5 час. и 3 часа. 24. 15 часовъ и 10 часовъ. 25. 36 рабочихъ и каждый переноситъ вразъ 77 фунтовъ; или 28 рабочихъ, если каждый будетъ переносить по 45 фунтовъ въ разъ.

XXV. 1. 1. 4. Выраженіе $=\frac{abc(3abc-a^3-b^3-c^3)}{(2a^2+bc)(2b^2+ca)(2c^2+ab)}$;

затѣмъ см. ст. 55. 6. $1+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}-x^2$. 7. $\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{(a+b)}+\sqrt{(a-b)}\}$.

8. $\frac{a}{2}\{\sqrt{(1+n+n^2)}+\sqrt{(1-n+n^2)}\}$. 9. $x=10$. 12. Производя дѣйствія, получаемъ $(b^2xx'+a^2yy'-a^2b^2)^2+a^2b^2(xy'-yx')^2=0$.

13. 192 р. 14. 2, 5, 9. 16. $x=0, \frac{5}{3}$. 17. $x=1\pm\sqrt{2}, 1\pm\sqrt{-1}$.

18. $x=1, 2, 3, \frac{1}{12}\{-11\pm\sqrt{(-23)}\}$. 19. $x=3\pm\sqrt{5}, 1\pm\sqrt{5}$.

20. $\sqrt{(2x-1)}-\sqrt{(5x-4)}=\sqrt{(4x-3)}-\sqrt{(3x-2)}$; затѣмъ возведемъ въ квадратъ; $x=1$. 21. $x-a+4c\sqrt{(x-a)}+4c^2=x+a-4b\sqrt{(x+a)}+4b^2$; извлечемъ квадр. корень; $x=(c\pm b)^2+\frac{a^2}{4(c\pm b)^2}$.

22. $nx=n(x+a-a)$; раздѣлимъ на $\sqrt{(x+a)}-\sqrt{a}$; $x=0, \frac{4an(1-n^2)}{(1+n^2)^2}$.

23. $x=a, \frac{1}{2}(a+b)$; $y=b, \frac{1}{2}(a+b)$. 24. $x=\frac{ac}{a+b}$; $y=\frac{bc}{a+b}$.

25. $x=3, \frac{2}{5}$; $y=2, -\frac{3}{5}$.

26. $2x=a+c-b\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2-2bc-2ca-2ab)}$; $x+y=c$, а также $x=\sqrt{(ac)}, y=\sqrt{(bc)}$. 27. $x=2, y=\frac{1}{3}, z=1$. 28. Сложить всѣ четыре уравненія; тогда $(v+x+y+z)^2=4(a+b+c)$; отсюда

и изъ перваго даннаго уравненія найдется $(v+x-y-z)^2=8a$; $2v=\pm\sqrt{(a+b+c)}\pm\sqrt{(2a)}\pm\sqrt{(2b)}\pm\sqrt{(2c)}$.

XXVI. 1. 4 : 9; 10 : 12. 2. 7 : 15. 3. 18 и 27.

5. Короткая дорога изъ A въ B 26 верстъ; изъ B въ C—52 версты.

6. Или $xa=yb=zc=\dfrac{2abc}{bc+ca+ab}$; или $xa+yb+zc=0$, а $x+y+z=-1$. 11. $x=6$, $y=8$, $z=10$. 12. $x=\pm a(b^2-c^2)$, $y=\pm b(c^2-a^2)$, $z=\pm(a^2-b^2)$; также x, y и z каждое могутъ равняться нулю.

XXVII. 1. 3 2. 6400. 3. 57. 4. $\dfrac{2.8.22}{xy}$. 9. Положимъ, что $ad=bc$; тогда $a+d-(b+c)=a-b-\left(c-\dfrac{bc}{a}\right)=\dfrac{(a-b)(a-c)}{a}$,

10. Въ первомъ вина $\frac{1}{3}$ всего; во второмъ $\frac{2}{3}$.

11. A имѣетъ 72 р., B 96 р.; каждый ставитъ $\frac{5}{12}$ своихъ денегъ.

12. Женскія преступленія составляютъ $\frac{4}{5}$ мужскихъ.

XXVIII. 1. 9. 2. $a=5b$. 3. 4. 4. 1. 6. $\frac{3}{4}$. 7. 10. 8. $27x^2=4y^3$. 9. $y=2x+\dfrac{2}{x}$. 10. 16. 13. 10. 14. $(r^3+r'^3)^{\frac{1}{3}}$.

15. Мы имѣемъ $y+z-x=A$, $(x+y-z)(x+z-y)=Byz$; такимъ образомъ $x^2-(y-z)^2=Byz$; слѣдовательно $x^2-(y+z)^2=(B-4)yz$, а потому $(x-y-z)(x+y+z)=(B-4)yz$ или $-A(x+y+z)=(B-4)yz$.

16. $2(n-1)$ часовъ. 18. 4 часа.

XXIX. 1. 1022634. 2. 321420111. 3. 3015333. 4. 20846A. 5. 209. 6. 624. 7. 2223. 8. 15A1. 9. 1105A. 10. 22441. 11. 17.6. 12. 75346,1. 13. 1341.111. 14. 124.96. 15. 1099.39. 16. 1589.349609375. 17. 450,1214; произведеніе 613260. 18. 3483. 19. 152. 20. 11111. 21. 44.4; въ 3-ной системѣ 1001.2. 22. 62444261, квадратный корень будетъ 7071. 23. 1101111. 24. 8AB7. 25. 0,739. 26. Восемь. 27. Шесть. 28. Одиннадцать. 29. Пять 30. Шесть. 31. Пять. 35. $2^{10}+2^9+2^7+2^5+2^4+2^2+2+1$. 36. $3^6+3^5+3^4-3^3+1$. 37. 3^6-3^2-3-1. 38. $3^6-3^5-3^2-3+1$. 39. Три фута одиннадцать дюймовъ. 40. Двадцать-три дюйма съ третью. 43. r^n-1 и r^{n-1}; гдѣ r основаніе и n данное число. 45. Число это сто-двадцать.

XXX. 1. 800. 2. 4. 3. —333. 4. $26\frac{2}{3}$. 5. —2. 6. $61\frac{1}{2}$.

7. 5. 8. 425. 9. 0. 10. $n(8+n)$. 11. $\frac{n(13-n)}{12}$.
12. Разность —3. 13. 9. 14. 4 или —11. 15. $2n-1$. 16. Число членовъ 10 или 12. Посл. чл. 3 или —1. 17. Разность 7. 18. 5, 9, 13, 17, 21, 25. 20. $\frac{n}{2}\{2+4(n-1)\}$, т.-е. $n(2n-1)$. 21. 1111. 22. 20. 23. $\frac{1}{3}(n-1)n(2n-1)$ аршинъ. 24. 1, 1334. 25. Девять среднихъ 3, 5, 7 ... 19. 26. Число членовъ 19 или —?. 27. 5 или —10. 28. 4 или 7. 30. Число членовъ $m+n-1$, или $m+n$; въ первомъ случаѣ послѣдній членъ будетъ 1; во второмъ случаѣ послѣдній членъ нуль. 31. 4 или 9. 32. $p+q(m-1)2q$. 37. 17. 38. 100 или — 107. 39. Число членовъ 7; средній членъ 11. 41. n^2. 42. $-n(-1)^n$. 43. $\frac{1}{4}\{1-(2n+1)(-1)^n\}$. 46. 9. 47 $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.
50. $\frac{n}{4}(19-n)$ 51. $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}$. 52. 25 мѣсяцевъ. 53. 15.
54. $\frac{2mr}{r+1}$ часовъ. 55. 468.

XXXI. 1. $\frac{12}{5}\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^6-1\right\}$. 2. $-\frac{2}{3}\{2^{10}-1\}$. 3. $9\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$.
4. $\frac{8}{3}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$. 5. 2. 6. $\frac{16}{3}$. 7. 1. 8. 9. 9. 10. 10. $\frac{4}{3}$.
11. $\frac{50}{11}$. 12. $\frac{2}{3}$. 13. $\frac{27}{26}$. 14. $\frac{1}{6}$. 15. $\frac{1}{3}$. 16. $4+3\sqrt{2}$.
17. $\frac{25}{24}\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}\right)$. 18. $\frac{r-nr^{n+1}}{1-r}+\frac{r^2(n-r^{n-1})}{(1-r)^2}$. 19. $4-(n+2)2^{-n+1}$.
20. $6-(2n+3)2^{-n+1}$. 21. $\frac{1}{9}\left\{2+(-1)^{n-1}\frac{6n+1}{2^{n-1}}\right\}$. 23. 81.
24. 108, 144, 192, 256 р. 25. $\frac{a^4}{a^4+1}\{a^{4n}(-1)^n-1\}$. 28. 20 р. 48 к.
32. Знамен. $\frac{1}{10+1}$. 33. $\frac{ar(r^n-1)}{(r-1)^2}-\frac{na}{r-1}$. 38. $r=2$, $a=3$, гдѣ r находится изъ нетруднаго кубическаго уравненія.
39. $\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}\left(r^2+\frac{1}{r^{2n}}\right)-2n$. 40. $\frac{50}{81}(10^n-1)-\frac{5n}{9}$. 42. 2, 4, 8, 12. или $\frac{25}{2}, \frac{15}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}$. 43. 2, 5, 8. 45. $\frac{ar}{(1-r)(1-br)}$.

XXXII. 1. $\frac{6}{11}, \frac{3}{7}$. 2. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \frac{1}{19}$. 3. Пусть p означаетъ этотъ членъ; тогда $\frac{1}{p}=\frac{1}{a}+(n-1)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$. 4. $\frac{PQ(p-q)}{pQ-qP}$.

8. 2 или 4. 11. 2, 3, 6. 12. Члены будутъ $\frac{2}{13}$ и $\frac{1}{8}$; тогда рядъ можетъ быть продолженъ. 14. Мы можемъ показать, что $A=\frac{a^2}{2a-b}$ и $G=\frac{ab-a^2}{2a-b}$; такъ какъ A и G такимъ образомъ становятся извѣстными, будучи выражены посредствомъ a и b, то мы можемъ найти двѣ величины, выраженныя посредствомъ a и b. 19. a^2+ab, a^2-b^2, a^2-ab. 20. Разность въ ариѳметической прогрессіи, составленной изъ обратныхъ величинъ, будетъ $\frac{2}{n-1}$.

XXXIII. 1. 1341. 1323. 7. 36 верстъ. 8. 64 штофа. 9. A 100 р., B 80 р.

XXXIV. 1. 1120. 2. 453600. 3. 454053600.

4 34650. 5. 6. 6. $\frac{\lfloor\underline{10}}{\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{3}\,\lfloor\underline{5}}$. 7. $\frac{20.19}{1.2}, \frac{19.18}{1.2}$.

8. $\frac{\lfloor\underline{95}}{\lfloor\underline{9}\,\lfloor\underline{86}}, \frac{\lfloor\underline{95}}{\lfloor\underline{10}\,\lfloor\underline{85}}$. 9. $\frac{\lfloor\underline{60}}{\lfloor\underline{12}\,\lfloor\underline{48}}$. 10. $2r$. 11. $\frac{\lfloor\underline{5}}{2}$.

12. Положимъ, что выбрано одно лицо и изъ остальныхъ $n-1$ лицъ составлены всѣ возможныя перестановки. Это дастъ $\lfloor\underline{n-1}$ способовъ. Но здѣсь считается за различные способы пары случаевъ, въ которыхъ каждое лицо будетъ имѣть тѣхъ-же самыхъ сосѣдей, но сосѣдъ съ правой стороны въ одномъ случаѣ, будетъ сосѣдомъ слѣва въ другомъ, и наоборотъ. Если каждую пару такихъ случаевъ считать за одинъ случай, то должно раздѣлить нашъ первоначальный выводъ на 2. Напримѣръ, если будетъ 3 лица, то будетъ только одинъ способъ размѣстить ихъ, понимая это въ послѣднемъ смыслѣ. 13. $\lfloor\underline{9}, \lfloor\underline{10}, -\lfloor\underline{9}$.

14. $\frac{12.11.10}{\lfloor\underline{3}} \times \frac{16.15.14.13}{\lfloor\underline{4}}$. 15. Если будетъ только одинъ предметъ, то его можно дать n способами; затѣмъ, такъ какъ второй предметъ можно дать то-же n способами, то для раздачи двухъ предметовъ будетъ существовать n^2 способовъ, и такъ далѣе. 16. $n=2r+1$; $r=8$.

17. $\frac{\lfloor\underline{m}}{\lfloor\underline{r}\,\lfloor\underline{m-r}} \times \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{5}\,\lfloor\underline{n-s}} \times \lfloor\underline{s+r}$. Или, если m предметовъ будутъ совершенно одинаковы съ n другими, то $\frac{\lfloor\underline{s+r}}{\lfloor\underline{r}\,\lfloor\underline{s}}$. 18. $\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor\underline{3}}$.

20. 4080. 21. 86400. 22. $\lfloor\underline{5} \times \lfloor\underline{3}$; если кромѣ того *три* буквы должны быть удержаны въ неизмѣнномъ порядкѣ, то отвѣтъ будетъ $\lfloor\underline{5}$. 23. 10.9.8.7 — 9.8.7 четырьмя флагами; 10.9.8—9.8 тремя флагами; 10.9 — 9 двумя флагами; 10 однимъ флагомъ; всего 5275 сигналовъ. 24. 90. 25. 36. 26. $3 \times \lfloor\underline{4} \times \lfloor\underline{4}$. 27. n^m. 28. $\frac{\lfloor\underline{52}}{\{\lfloor\underline{13}\}^4}$. 29. 120.

30. $\frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{p(p-1)}{1.2} + 1$. 31. $\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor\underline{3}} - \frac{p(p-1)(p-2)}{\lfloor\underline{3}}$.

32. Увеличить предыдущій выводъ на единицу 34. $\frac{\lfloor\underline{24}}{\{\lfloor\underline{3}\}^2\{\underline{2}\}^3}$.

35. $\lfloor\underline{7}$; если сверхъ того каждый рядъ считать въ порядкѣ слѣва направо или справа налѣво, то отвѣтъ будетъ $8 \times \lfloor\underline{7}$. 36. I. 8.7.6.5 случаевъ безъ повторенія. II. $\frac{7.6}{1.2} \times \frac{\lfloor\underline{4}}{2}$ случаевъ, въ которыхъ a встрѣчается дважды, столько-же такихъ, въ которыхъ i встрѣчается дважды, и столько-же такихъ, въ которыхъ n встрѣчается дважды. III. $\frac{\lfloor\underline{4}}{\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{2}}$ случаевъ, въ которыхъ a и i каждое встрѣчается дважды, столько-же такихъ, въ которыхъ i и n встрѣчаются дважды, и столько-же такихъ, въ которыхъ a и n встрѣчаются дважды. Всего 2454. 37. 53. 39. $\lfloor\underline{4} \times 11111 \times 15$.

XXXV. 1. $\frac{15.14}{1.2}a^{13}b^2$. 2. $\frac{50.49}{1.2}x^{48}a^2$. 3. $\frac{12.11.10.9}{\lfloor\underline{4}}a^{16}b^3$.

4. $\frac{2002.2001}{1.2}a^{\frac{6}{10}}x^{600}$. 5. $625 - 2000x + 2400x^2 - 1280x^3 + 256x^4$.

6. $\frac{9.8.7.6}{\lfloor\underline{4}}3^5x^{\frac{5}{2}}4^4y^2$. 7. $-\frac{10.9.8.7.6}{\lfloor\underline{5}}2^5a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{15}{2}}$. 9. $\frac{\lfloor\underline{10}}{\lfloor\underline{5}\,\lfloor\underline{5}}a^5x^5$.

10. $\frac{\lfloor\underline{9}}{\lfloor\underline{4}\,\lfloor\underline{5}}(a^5x^4 + a^4x^5)$. 11. $64a^6 - 96a^4 + 36a^2 - 2$. 12. $10c^9$.

14. Это слѣдуетъ непосредственно, или такъ: $(1+x)^{n+1}(1-x)=(1+x)^n(1-x^2)$. 16. Изъ 2-го и 5-го членовъ разлож. $(3+2)^6$.

18. $\dfrac{\lfloor\underline{2n+1}}{\lfloor\underline{n-r}\,\lfloor\underline{n+r+1}}(-1)^{n-r}$. 19. $\dfrac{\lfloor\underline{2n}(-1)^{r-1}x^{2n-2r+2}}{\lfloor\underline{r-1}\,\lfloor\underline{2n-r+1}}$,

$\dfrac{\lfloor\underline{2n}(-1)^{r-1}x^{2r-2n-2}}{\lfloor\underline{r-1}\,\lfloor\underline{2n-r+1}}$, $\dfrac{(-1)^n\lfloor\underline{2n}}{\lfloor\underline{n}\,\lfloor\underline{n}}$.

20. $(x^2+a^2)^n=\{x+a\sqrt{(-1)}\}^n\{x-a\sqrt{(-1)}\}^n$
$=\{A+B\sqrt{(-1)}\}\{A-B\sqrt{(-1)}\}=A^2+B^2$.

XXXVI. 13. $\dfrac{(r+1)(r+2)(r+3)}{\lfloor\underline{3}}x^r$.

14. $\dfrac{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}{\lfloor\underline{4}}x^r$.

15. $-\dfrac{(n-1)(2n-1)(3n-1)\ldots\{(r-1)n-1\}}{n^r\lfloor\underline{r}}x^r$.

16. $-\dfrac{(p-1)(2p-1)(3p-1)\ldots\{(r-1)p-1\}}{\lfloor\underline{r}}x^r$.

17. $\dfrac{1.3.5\ldots(2r-1)}{\lfloor\underline{r}\,2^r}(-1)^rx^r$. 18. $\dfrac{2.5.8\ldots(3r-1)}{\lfloor\underline{r}\,3^r}x^{2r}$.

19. $\dfrac{7.9.11\ldots(2r+5)}{\lfloor\underline{r}}x^r$. 20. $\dfrac{1.5.9\ldots(4r-3)}{4^r\lfloor\underline{r}}$.

28. Второй и третій члены $\dfrac{4}{1}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{3}$. 29. 3-й членъ $-\dfrac{12\,13}{1.2}\cdot\dfrac{1}{5^2}=\dfrac{78}{25}$.

30. Пятый и шестой члены $=\dfrac{3\,4.5.6}{\lfloor\underline{4}}\left(\dfrac{5}{7}\right)^4=\dfrac{9375}{2401}$.

31. Третій членъ $=\dfrac{8.11}{3.6}\left(\dfrac{7}{12}\right)^2$. 32. Если $n=1$, то второй и третій члены будутъ наибольшими, если $n=2$, то второй членъ наибольшій; а для всѣхъ другихъ значеній n первый членъ наибольшій.

33. $\dfrac{11.12.13}{\lfloor\underline{3}}$. 34. Шестой членъ. 37. $\dfrac{n+1}{3}(2n^2+4n+3)$.

38. Коэффиц. при x^{2r} есть $\dfrac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2^ra^{2r}\lfloor\underline{r}}$; коэффиц. при x^{2r+1} получается дѣленіемъ этого выраженія на a. 41. $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$,

то-есть $\sqrt{2}$. 42. $\dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}$. 45. $\dfrac{2n(2n+1)\ldots(2n+r-1)}{\lfloor r}$.

XXXVII. 1. 6. 2. -16. 3. $2^6.3^2+2^7.3+2^5.3^3+3^4=1905$.

4. 3. 5. $-2^9.5+2^6.3^3.5-2^2.3.^4 5$.

6. $\lfloor 12\left\{\dfrac{2^4}{\lfloor 8 \lfloor 4}+\dfrac{2^3}{\lfloor 7 \lfloor 2 \lfloor 3}+\dfrac{2^2}{\lfloor 6 \lfloor 4 \lfloor 2}+\dfrac{2}{\lfloor 5 \lfloor 6}+\dfrac{1}{\lfloor 4 \lfloor 8}\right\}$.

7. $2^4.5.7^2-2^3.3.5^3.7+2.5^5$. 8. -64. 9. -20.

10. $-\dfrac{15}{8}-\dfrac{35}{4}-\dfrac{63}{8}=-\dfrac{37}{2}$. 11. $-\dfrac{1}{4}$. 12. $-3+6+15+\dfrac{35}{8}$.

13. $\left(\dfrac{3.7}{2^5}-\dfrac{7.11.19}{2^{10}}\right)$. 14. 50. 15. $\dfrac{n^4+6n^3-13n^2+6n}{24}$.

16. Выраженіе будетъ $\{(1+x)(1-x)^{-2}\}^7$. Отсюда коэффиц. будетъ

$$\frac{7.6.5.4}{\lfloor 4}+\frac{7.6.5}{\lfloor 3}\cdot\frac{14}{1}+\frac{7.6}{1.2}\cdot\frac{14.15}{1.2}+\frac{7}{1}\cdot\frac{14.15.16}{\lfloor 3}+\frac{14.15.16.17}{\lfloor 4}.$$

17. $m+1$. 18. $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor 4}3^4+\dfrac{n(n-1)\ldots(n-4)}{\lfloor 2 \lfloor 3}2^2 3^3$

$+\dfrac{n(n-1)\ldots(n-5)}{\lfloor 4 \lfloor 2}2^4 3^2+\dfrac{n(n-1)\ldots(n-6)}{\lfloor 6}2^6 3+\dfrac{n(n-1)\ldots(n-7)}{\lfloor 8}2^8$.

19. 0. 20. $5a_3{}^4+20a_1a_2a_3{}^3+10a_2{}^3a_3{}^2$.

21. $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2}a_0{}^{n-3}a_1a_2{}^2+\dfrac{n(n-1)\ldots(n-3)}{\lfloor 3}a_0{}^{n-4}a_1{}^3a_2$

$+\dfrac{n(n-1)\ldots(n-4)}{\lfloor 5}a_0{}^{n-5}a_1{}^5$. 22. -23.

23. $-\dfrac{b}{2}+\dfrac{3a^2}{8}$. 24. $ma_3+m(m-1)a_1a_2+\dfrac{m(m-1)(m-2)}{\lfloor 3}a_1{}^3$.

25. 20. 26. -210. 27. 1260. 28. 12600.

29. $a^n+na^{n-1}(b+c)+\dfrac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}(b+c)^2+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}a^{n-3}(b+c)^3$.

30. $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}d^{n-3}(a+b+c)^3$. 31. $\dfrac{\lfloor 10}{\{\lfloor 3\}^3.4}$. 32. $\dfrac{\lfloor 14}{\{\lfloor 3\}^4.4^2}$.

35. $1+bx-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{3b^2}{2}\right)x^2-\left(\dfrac{3b}{2}-\dfrac{5b^3}{2}\right)x^3+\left(\dfrac{3}{8}-\dfrac{15b^2}{4}+\dfrac{35b^4}{8}\right)x^4$.

36. $a^{-1}-a^{-2}bx-(a^{-2}c-a^{-3}b^2)x^2+(2a^{-3}bc-a^{-4}b^3)x^3$

$+(a^{-3}c^2-3a^{-4}b^2c+a^{-5}b^4)x^4$.

37. $1-nx+\frac{n(n-3)}{2}x^2-\frac{n(n-2)(n-7)}{6}x^3$.

38. Можно доказать наведеніемъ. 39. Для первой части нужно положить $x=1$. Для второй части, пусть S означаетъ этотъ рядъ, такъ что $S=a_1+2a_2+3a_3+\ldots+nra_{nr}$; такъ какъ коэффиціенты членовъ, равностоящихъ отъ начала и конца, равны (примѣръ 38), то $S=a_{nr-1}+2a_{nr-2}+\ldots+nra_0$. Тогда сложеніемъ получимъ

$$2S=nr\{a_0+a_1+\ldots+a_{nr}\}=nr(r+1)^n.$$

40. $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{2n-2}x^{2n-2}+a_{2n-1}x^{2n-1}+a_{2n}x^{2n}$; измѣнимъ знакъ xy; тогда, такъ какъ коэффиціенты членовъ, равностоящихъ отъ начала и конца, равны, то мы будемъ имѣть

$$(1-x+x^2)^n=a_{2n}-a_{2n-1}x+a_{2n-2}x^2-a_{2n-3}x^3+\ldots$$

Умножимъ другъ на друга и соберемъ коэффиціенты при x^{2n}; коэффиціентъ его поэтому будетъ равенъ коэффиціенту при x^{2n} въ

$$(1+x+x^2)^n(1-x+x^2)^n, \text{ т.-е. въ } (1+x^2+x^4)^n.$$

Затѣмъ поставимъ a_0^2 вмѣсто a^2_{2n}, a_1^2 вмѣсто a^2_{2n-1} и раздѣлимъ обѣ части на 2.

XXXVIII. 1. 4. 2. 2. 3. 1. 4. 5.
5. 3; —2. 6. 0.698970—2; 0.732393. 7. 0.778151—3.
10. $\frac{1}{2}\{\log 10-3\log 2\}$. 15. 20. 20. Около 125 лѣтъ.

XXXIX. 1. Это примѣръ уравненія (1) въ ст. 545, въ которомъ $m=(x+1)(x-1)$ и $n=x^2$.

2. $\log(x+2h)x-\log(x+h)^2=\log\left\{1-\frac{h^2}{(x+h)^2}\right\}$. 3. См. прим. 1.

5. $\log(3+3x+x^2)x-3\log(1+x)=\log\left\{1-\frac{1}{(1+x)^3}\right\}$. 6. Намъ нужно найти рядъ для $\log(x+1)-\frac{4x}{2x+1}\log x+\frac{2x-1}{2x+1}\log(x-1)$, то-есть для $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{2x-1}{2x+1}\log\left(1-\frac{1}{x}\right)$, то-есть для $\frac{2x}{2x+1}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{2x+1}\log\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$. 9. $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x\left(1-\frac{x^2}{2n}+\frac{x^3}{3n^2}\ldots\right)$.

XL. Рядъ $=\frac{1}{a}\left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+2a}-\right.$ и проч. $\left.\right\}$; онъ по ст. 558

будетъ сходящійся. 2. Расходящійся, если $x>1$, сходящійся, если $x<1$. Если $x=1$, то общій членъ будетъ $\frac{2n+1}{n^2+1}$, что больше $\frac{1}{n}$, и рядъ будетъ расходящимся. 3. Сходящійся, если $a>1$; расходящійся, если $a<1$. Если $a=1$, то рядъ очевидно расходящійся. 4. Расходящійся, если $x>1$, сходящійся, если $x<1$. Если $x=1$, то рядъ дѣлается очевидно расходящимся. 5. То-же, что и въ примѣрѣ 4.

6. Рядъ $>1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+3}+\frac{1}{1+4}+\ldots$, а слѣдоват. расходящійся.

7. Расходящійся, если $x>1$, сходящійся, если $x<1$; если $x=1$, то очевидно рядъ расходящійся. 8. Выводы тѣ-же, что въ ст. 562.

9. Расходящійся, если $x>1$, сходящійся, если $x<1$; если $x=1$, то случай этотъ разобранъ въ ст. 562. 10. Сходящійся, если $x<1$, расходящійся, если $x>1$; если $x=1$, то выводы будутъ тѣ-же, что въ ст. 562.

XLI. 2. 900 р. 3. $\frac{B-A}{A}$. 4. $2\frac{1}{2}$ 5. 40 : 41.

6. Между 48 и 49. 7. Приблизительно около 32.

XLII. 1. 7 лѣтъ. 2. 120 дней.

4. $\frac{x}{R^{-a}}=\frac{y}{R^{-b}}=\frac{z}{R^{-c}}=\frac{\text{данная сумма}}{R^{-a}+R^{-b}+R^{-c}}$. 8. Уравняемъ коэффиціенты при x^r въ $(1+x)^n=(1+x)^2(1+x)^{n-2}$. 9. Уравняемъ коэффиціенты при x^m въ $(1+x)^n=(1+x)^{n-m+1}(x+1)^{m-1}$. 10. Найдемъ, что весь коэффиціентъ при α уничтожается, какъ равнымъ образомъ и весь коэффиціентъ при β.

XLIII. 1. 235 р. 20 к. 2. 7 процент. 3. 4 процента.
4. 61440 р. 5. $3\frac{1}{2}$. 6. 72979 р. 80 к. 7. $2252\frac{348}{1951}$ руб.
8. $\frac{\log 15-\log 2}{\log 5-\log 4}=$ не менѣе 9. 9. $\frac{A}{R^{p-1}}\cdot\frac{1}{R-m}$, гдѣ A первый платежъ; m должно быть меньше R. 10. e^{-1}.
11. $P\left(\frac{m+1}{m}\right)^n$. 12. $P(1-r)^n$. 13. $A\times 2.617238$.

XLIV. 1. $1+\frac{1}{3+}\frac{1}{5+}\frac{1}{7+}\frac{1}{9+}$. 2. $\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{55}$.
3. $\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{170}$. 4. $1+\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3}$.

5. $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{355}{113}$. 6. $\frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{39}{161}, \ldots$

XLV. 1. $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{14}{5}, \frac{17}{6}$. 2. $\frac{3}{1}, \frac{19}{6}, \frac{117}{37}, \frac{721}{228}$.

3. $\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{11}{3}, \frac{15}{4}$. 4. $\frac{4}{1}, \frac{33}{8}, \frac{268}{65}, \frac{2177}{528}$. 5. $\frac{4}{1}, \frac{9}{2}, \frac{13}{3}, \frac{48}{11}$.

6. $\frac{5}{1}, \frac{51}{10}, \frac{515}{101}, \frac{5201}{1020}$. 7. $\frac{5}{1}, \frac{26}{5}, \frac{265}{51}\ \frac{1351}{260}$. 8. $\frac{6}{1}, \frac{7}{1}, \frac{27}{4}, \frac{34}{5}$.

9. $\frac{7}{1}, \frac{22}{3}, \frac{29}{4}, \frac{51}{7}$. 10. $\frac{10}{1}, \frac{201}{20}; \frac{4030}{401}, \frac{80801}{8040}$.

11. $a+\cfrac{1}{2a+}\ \cfrac{1}{2a+}\ \cfrac{1}{2a+}\cdots \frac{a}{1}, \frac{2a^2+1}{2a}, \frac{4a^3+3a}{4a^2+1}, \frac{8a^4+8a^2+1}{8a^3+4a}$.

12. $a-1+\cfrac{1}{1+}\ \cfrac{1}{2(a-1)+}\ \cfrac{1}{1+}\ \cfrac{1}{2(a-1)+}\cdots \frac{a-1}{1}, \frac{a}{1}; \frac{2a^2-a-1}{2a-1}, \frac{2a^2-1}{2a}$.

13. $a+\cfrac{1}{2+}\ \cfrac{1}{2a+}\ \cfrac{1}{2+}\ \cfrac{1}{2a}\cdots \frac{a}{1}, \frac{2a+1}{2}, \frac{4a^2+3a}{4a+1}, \frac{8a^2+8a+1}{8a+4}$.

14. $a-1+\cfrac{1}{2+}\ \cfrac{1}{2(a-1)+}\ \cfrac{1}{2+}\ \cfrac{1}{2(a-1)+}\cdots \frac{a-1}{1}, \frac{2a-1}{2}, \frac{4a^2-5a+1}{4a-3}, \frac{8a^2-8a+1}{8a-4}$. (13 и 14 примѣры находятся во взаимной связи, такъ какъ $a^2-a=(a-1)^2+a-1$).

15. $\frac{256}{71}$. 16. $\frac{1520}{273}$. 18. $\frac{1}{(44)^2}$ и $\frac{1}{2(49)^2}$. 20. $\frac{1}{(240)^2}$ и $\frac{1}{2(2111)^2}$.

21. $\frac{1}{(273)^2}$ и $\frac{1}{2(2885)^2}$. 26. $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{13}{30}, \frac{42}{97}$. 27. $\frac{485}{396}$. 28. $\frac{211}{80}$.

29. $\frac{1549}{360}, \frac{251}{360}$. 30. $\frac{114}{41}$. 31. $\frac{17}{114}$. 32. $\sqrt{2}$.

33. Положительный корень ур. $x^2+2x-2=0$. 34. Пол. кор. урав. $7x^2-8x-3=0$. 35. Пол. корень ур. $7x^2+8x-3=0$.

36. Полож. корень урав. $59x^2-319x+431=0$.

XLVI. 1. $x=2,\ y=1$. 2. $x=4,\ y=5$.

3. $x=1$, или 6, $y=20$, или 1. 4. $y=1+7t,\ x=41-10t$.

5. $x=25-7t,\ y=25+3t$. 6. $x=90-19t,\ y=13t$.

7. $x=8,\ y=3$. 8. $x=7,\ y=5$. 9. $x=11,\ y=18$.

10. $x=37,\ y=13$. 11. 4 или 5. 12. 19 или 20. 13. 4 или 5.

14. 2. 15. 16. 16. 5. 17. 3 гин. (по 21 шил.), 21 п.-кр. 18. 3 гинеи,

20 франковъ, 19. 185, 15; 119, 81; 53, 147. 20. 28, 20. 21. Если n четное число, то разность равна 2; если n нечетное, то разность можетъ быть 1 или 2. 22. 245. 23. $104+3.5.7t$. 24. 97. 25. Припишемъ y послѣдовательно значенія 1, 2 ... 8; и въ каждомъ случаѣ найдемъ соотвѣтствующія значенія x и z. 26. $x=1+3t$, $y=51-7t$, $z=63+13t$. 27. Допуская нулевое рѣшеніе, получимъ 15 рѣшеній; или 14 безъ него. Рѣшенія получаются изъ $100-t$ пятикопѣечныхъ $6t$ двухкопѣечныхъ и $100-7t$ копѣечныхъ монетъ. 28. Считая нулевыя, 4 рѣшенія; исключая ихъ, 2. Рѣшенія найдутся изъ $4-t$ двугривенниковъ, $5t$ пятаковъ и $12-4t$ копѣекъ. 29. 6 десятикопѣечныхъ, 4 пятикопѣечныхъ, 2 четырехкопѣечн. 30. 100. 31. 205, 502. 32. 974. 33. 5567. 34. 80 утокъ, 19 быковъ, 1 овцу, или 100 овецъ. 35. $\frac{5}{6}, \frac{8}{9}, \frac{17}{18}$. 36. 49, 43, 38. 37. 107-е и 104-е дѣленіе, считая отъ одного и того-же конца. 38. Мы должны рѣшить уравн. $5x+4y+3z=20$; прилагаемая табличка даетъ рѣшенія этого уравненія. Мы можемъ взять рѣшенія (1), (4), (5); или (2), (3), (5); или (3), (4), (4).

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
x	0	0	1	1	2	4
y	2	5	0	3	1	0
z	4	0	5	1	2	0

39. 10 р. 30 к. 40. 11 руб.

XLVII. 1. $x=2, y=4; x=3, y=1$. 2. $x=4, y=21, x=5, y=7$. 3. $x=18, y=5$, 4. $x=10, y=1$. 5. 360. 6. 1684 кв. саж. 7. 10 и 7. 9. $x=0, y=3; x=2, y=1$. 10. $x=1, y=3; x=53, y=15$.

XLVIII. 1. $\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{3}\right)^n$. 2. $\left\{3(-1)^n-\frac{3^n}{2^{n+1}}\right\}x^n$.

3. $-\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{7}{2.3^{n+1}}\right\}x^n$. 4. $\frac{1-p^n}{1-p}x^n$.

5. $(n+1)x^n$. 6. $(7n+5)(3x)^n$. 7. $(n+1)^3x^n$.

8. $1+x-x^3-x^4\ldots$. 9. $1+2x+x^2-4x^3-11x^4\ldots$.

10. $\frac{1}{2}+\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{4}+\frac{x^3}{2}+\frac{7x^4}{8}\ldots$. 11. $\frac{1}{a^2}-\frac{x}{a^3}-\frac{x^3}{a^5}-\frac{x^4}{a^6}\ldots$

12. $1+px+p(p-1)x^2+(p^3-2p^2+1)x^3+p(p^3-3p^2+p+2)x^4\ldots$

13. $\frac{1}{a-1}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+a^nx}\right)$.

14. $-\frac{1}{(1-a)^2}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+ax}-\frac{1}{1+a^nx}+\frac{1}{1+a^{n+1}x}\right)$.

15. $a=1,\ b=11,\ c=11,\ d=1,\ e=0$.

XLIX. 1. $\frac{4-11x}{1-5x+6x^2}$; $(3x)^n+3(2x)^n$.

2. $\frac{1+x}{1-10x+21x^2}$; $2(7x)^n-(3x)^n$. 3. $\frac{1-2x}{1-5x+4x^2}$; $\frac{1}{3}(1+2^{2n+1})x^n$.

4. x меньше $\frac{1}{4}$. 5. $2^{n-1}(5n+6)$. 6. 3^n-n-1.

7. $\frac{64}{2^n}-\frac{54}{3^n}$; 47. 8. $\frac{2+5x+5x^2}{(1+x)^3}$; $(-1)^nx^n.(n^2-2n+2)$.

L. 3. $1-\frac{1}{1+n}$; 1. 4. $\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\right\}$, $\frac{1}{32}$.

5. $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$; $\frac{11}{18}$.

6. $\frac{11}{96}-\frac{1}{2(n+2)(n+3)}-\frac{3}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$; $\frac{11}{96}$.

7. $\frac{5}{6}-\frac{3n+5}{(n+2)(n+3)}$; $\frac{5}{6}$. 8. $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

11. $\frac{x^n\{n(x-1)-1\}^2+x^{n+1}-(x+1)}{(x-1)^3}$. 12. $nar\ (a+br)^{n-1}$.

13. Разложивъ, будемъ имѣть $\frac{x}{(1-x)^2}\left\{1+\frac{cx}{(1-x)^2}+\frac{c^2x^2}{(1-x)^4}+\ldots\right\}$.

14. $b^n\left\{1+na+\frac{n(n+1)}{1.2}a^2+\ldots+\frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{\underline{|m-1}}a^{m-1}\right\}$.

15. $\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-n}=2^n\left(1-\frac{1}{3}\right)^{-n}$. 18. 165. 19. 460.

22. Нужно поступать такъ: Положимъ, что

$(1+xv)(1+x^2v)(1+x^3v)\ldots(1+x^pv)=1+A_1v+A_2v^2+\ldots+A_pv^p$, гдѣ A_1, A_2, ... A_p не содержатъ въ себѣ v. *Теперь перемѣнимъ* v на xv; тогда мы можемъ заключить, что

$$(1+A_1v+A_2v^2+A_3v^3+\ldots+A_pv^p)(1+x^{p+1}v)$$
$$=(1+A_1xv+A_2x^2v^2+\ldots+A_px^pv^p)(1+xv).$$

Теперь уравняемъ коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ v въ обоихъ рядахъ.

25. $\frac{1+x}{1+x^3}=\frac{1}{1-x+x^2}$; поэтому $(1+x)\left\{1-x^3+x^6-x^9+\ldots\right\}=$

$$= \frac{1}{1-x}\left(1+\frac{x^2}{1-x}\right)^{-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^2}{(1-x)^2} + \frac{x^4}{(1-x)^3} - \frac{x^6}{(1-x)^4} + \ldots$$

Разложимъ каждый членъ послѣдней строки по теоремѣ Ньютона и уравняемъ коэффиціенты при x^n въ обоихъ рядахъ.

LI. 8. $2x^3$ будетъ $>$ или $<$ $x+1$, смотря по тому, будетъ-ли $x >$ или < 1. 16. Это зависитъ отъ знака $(a-b)(b-c)(c-a)$. 22 и 24 зависятъ отъ ст. 681. 23. Сколько-бы ни взяли слѣдующихъ неравенствъ, всегда окажется справедливымъ $2(n-1) > n$, $3(n-2) > n$, ...; тогда, перемножая, получимъ требуемый результатъ. 25. Это можно вывести изъ примѣра 23. 29. Смотр. примѣръ 3 главы XXV. 31. Перемножимъ; тогда воспользуемся ст. 681. 32. Положимъ $1-a=b$ и разложимъ $(1-b)^x$ по теоремѣ Ньютона; рядъ будетъ сходящійся. Тогда намъ нужно будетъ показать, что

$$1 - \frac{(x-1)b}{|\underline{2}} + \frac{(x-1)(x-2)b^2}{|\underline{3}} - \ldots > 1;$$

а это очевидно, такъ какъ $x < 1$.

LII. 2. 66. 3. $3.\ 5^2.\ 41^2$. 4. $2^2.\ 3^2.\ 5^2$. 5. $2^2.\ (823)^2$. 12. Положимъ, что n заключается между m^2 и $(m+1)^2$; тогда $n-ab=(m^2+m-n)^2$. 19. n^2-n+1 больше $(n-1)^2$ и меньше n^2. 20. Предположимъ, если возможно, что $n^3+1=m^2$; тогда $n^3=(m-1)(m+1)$. Но ни одинъ множитель, исключая 2, не можетъ быть дѣлителемъ $m-1$ и $m+1$, и 2 не можетъ быть дѣлителемъ, потому что n нечетное. Слѣдовательно $m-1$ и $m+1$ оба должны быть точными кубами; но это невозможно, потому что разность двухъ кубовъ не можетъ быть столь малой какъ 2. 35, 36, 37, 38. Всѣ зависятъ отъ теоремы Фермата. 40. 48. 41. 96. 42. 400. 43. 22680. 44. $2^{n+1}\ 5^{n-1}$. 45. 12. 46. 12. 47. 160; 1481040. 48. 6. 49. 126. 50. 24; 15. 51. $(n+1)^2$. 53 и 54 должно рѣшить испытаніемъ; отвѣтъ для 53 будетъ: $2^4.\ 3^2.\ 5$, а отвѣтъ для 54 будетъ $2^3.\ 3^3.\ 5.\ 7$. 57. $x=2.\ 5^2.\ 7^2.\ t^3$; $y=2.\ 5.\ 7.\ t$.

LIII. 1. 27 за и 8 противъ. 2. $\frac{29}{45}$. 4. $\frac{3}{4}$. 5. $\frac{1}{4}$. 6. $\frac{5}{18}$. 7. $\frac{11}{36}$. 8. 7 противъ 2. 10. Для A вѣроятн. проиграть $\frac{2}{3}$, а ни выиграть, ни проиграть $\frac{1}{3}$; для D вѣроятность проиграть $\frac{2}{3}$, а ни проиграть ни выиграть $\frac{1}{3}$; B и C каждый имѣютъ вѣроятность выиграть $\frac{1}{3}$, проиграть $\frac{1}{3}$, ни выиграть, ни проиграть $\frac{1}{3}$. Или проще, вѣроятность A

выиграть $\frac{1}{6}$, B и C $\frac{1}{2}$, D $\frac{5}{6}$, если предположимъ, что одинъ изъ двухъ *долженъ* выиграть. 11. $\frac{5}{9}$. 12. $\frac{2}{145}$. 14. $\frac{3}{14}$. 15. $\frac{1}{2}$. 16. $\frac{n}{2^n}$.

18. $\frac{18586}{(36)^6}$. 19. $\frac{31031}{6^6}$. 20. $\frac{12393}{12500}$. 21. $1-\left(\frac{5}{6}\right)^3$. 22. $1-\left(\frac{35}{36}\right)^3$.

23. $\frac{2551}{7^5}$. 24. $\frac{13^3\times 6}{51\times 50\times 49}$. 25. $\frac{\underline{|4}\,.\,4}{52.51.50.49}$. 27. $\frac{2072}{5^5}$. 29. $\frac{4}{9}$.

30. $\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{r-1}:\left\{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^p\right\}$. 31. $\frac{7}{15}$. 32. Вѣроятность нахожденія червонца въ первомъ кошелькѣ относится къ вѣроятности нахожденія его во второмъ, какъ 10 къ 9. 33. $\frac{1}{2}$. 34. $\frac{10}{6^3}$.

35. $\frac{3}{6^3}$. 36. $\frac{1}{2}$. 39. $\frac{1}{10^{10}\,\underline{|9}}\left\{\frac{\underline{|23}}{\underline{|14}}-\frac{10\,\underline{|13}}{\underline{|4}}\right\}$. 40. $1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^m$.

41. 0.033. 42. $\frac{1}{60}$. 44. $\frac{1}{7}+\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

45. $\frac{\underline{|m}\;\underline{|n}}{\underline{|m+n}}$ въ обоихъ случаяхъ. 46. $\frac{\underline{|p_1}\,\underline{|p_2}\,\underline{|p_3}\cdots}{\underline{|n}}$. 47. $\frac{\underline{|n}}{n^n}$.

48. 11 пр. 5. 49. $6;\frac{\underline{|6}}{6^6}$. 51. $\frac{16}{35}$. 53. Пусть шансъ A выиграть въ одну игру будетъ x, а шансъ B $1-x$; тогда шансъ A выиграть рядъ будетъ $\frac{x^2(2-x)}{1-x+x^2}$. 54. $\frac{9}{16}$.

55. $p_1+p_2+p_3-p_1p_2-p_2p_3-p_3p_1+p_1p_2p_3$;
$p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1-2p_1p_2p_3$.

56. $\frac{64}{169}$, $\frac{56}{169}$, $\frac{49}{169}$. 57. $(0.55)^7$. 58. $\frac{30}{61}$ и $\frac{31}{61}$.

59. 21 шиллингъ. 61. 400 рублей. 63. 10 рублей.

64. Два шиллинга (флоринъ). 65. 3 монеты въ 2 шиллинга и 1 монета въ 20 шиллинговъ. 66. 2 къ 1; $\frac{1}{3}$ того, что ставитъ каждый. 67. $\frac{2r+1}{3}$. 68. $\frac{3r(r+1)}{2(2r+1)}$. 69. 33333 р.

70. $\frac{b}{a}n$ рублей. 71. $\frac{8}{11}$. 72. $\frac{1}{2}$. 73. $\frac{2}{n(n+1)}$. 74. $\frac{3}{5}$.

75. $\frac{1265}{1286}$; $\frac{5087}{5144}$. золот. единицъ. 76. $\frac{910}{46}$ фунт. 77. $\frac{2}{3}$.

80. $\frac{11}{50}$. 81. $\frac{ab+ac+bc}{(a+c)(b+c)}$. 82. 4.

LIV. 1. $\sqrt{(1-x^4)}=-1\pm\sqrt{3}$. 2. Подставимъ значеніе x^2 изъ перваго уравненія во 2-е; тогда получимъ или $y^2=bn$, или $x=\frac{ay}{y-b}$. 4. Возвед. въ квадратъ и представимъ уравненіе въ видѣ $(x^2-4x)^2$ $24(x-1)^2$. 5. $c=220$. 6. Перемножимъ члены въ данномъ соотношеніи. 7. $\left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\left\{\frac{(N+n)^2}{4n^2}-\frac{(N-n)^2}{4n^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$ и $=\left\{\frac{(N+n)^2}{4N^2}-\frac{(N-n)^2}{4N^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}$. 9. Уравняемъ коэффиціенты при x^n въ разложеніи выраженія $\frac{1}{1-x+cx^2}$ и въ разложеніи частныхъ дробей, на которыя выраженіе это распадается.

LV. 1. $\sqrt{(m^2+n^2)}\sqrt{(a^2+b^2)-na}\}^2$. 2. $1+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{7}{2}}$. 3. 8. 5. 5. 6. $x=26t$, $y=495-21t$. 7. $1-\frac{(1-z)z^{p-1}}{1-z^p}$, гдѣ $p=2^n$. 8. $(1-x^2)^2+x^2(1-x)^2$ никогда не можетъ быть отрицательнымъ. 12. $-\log n=\log\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}\ldots\frac{n-1}{n}$. Отсюда мы можемъ разсматривать $\frac{1}{n}+\log\left(1-\frac{1}{n}\right)$ за общій членъ этого ряда; и посредствомъ разложенія $\log\left(1-\frac{1}{n}\right)$ найдемъ, что общій членъ меньше $-\frac{1}{n^2}$. Затѣмъ см. ст. 562. 14. Если онъ будетъ вынимать опять изъ *того-же* мѣшка, то вѣроятность вынуть гинею $\frac{2}{7}$, а—шиллингъ $\frac{5}{7}$; такимъ образомъ его ожиданіе будетъ $\frac{45}{7}$ шиллинговъ. Если онъ будетъ вынимать изъ *другого* мѣшка, то вѣроятность вынуть гинею $\frac{4}{7}$, а—шиллингъ $\frac{3}{7}$; такимъ образомъ его ожиданіе будетъ $\frac{83}{7}$ шиллинговъ. 16. $\frac{(n-1)R-n+R^{1-n}}{n(R-1)^2}$, гдѣ R, величина, въ которую обращается 1 рубль черезъ годъ.

LVI. 6. Сходящійся, если x равно единицѣ, расходящійся—если x больше единицы; если x равно единицѣ, то будетъ сходящимся при a отрицательномъ и расходящимся при a положительномъ. 8. Расходящійся, если x больше единицы; сходящійся, если x не больше единицы.

9. Расходящійся. 10. Сходящійся, если $q-p-1$ положительная величина; расходящійся, если $q-p-1$ величина отрицательная, или нуль. 13. Сходящійся, если x меньше e^{-1}; расходящійся, если x не меньше e^{-1}. 16. I. Положимъ, что $a-A$ величина положительная; рядъ будетъ сходящійся, если $\beta+1$ больше α; расходящійся, если $\beta+1$ меньше α; если $\beta+1=\alpha$, то рядъ будетъ сходящійся, если $a-A$ больше единицы, и расходящійся, если $a-A$ не больше единицы. II. Положимъ, что $a-A$ величина отрицательная; тогда рядъ расходящійся. III. Положимъ, что $a-A=0$; тогда можно приложить ст. 767 и сдѣлать разборъ какъ въ I случаѣ.

LVII. 4. $$p_n=ba^{n-1}+(n-2)b^2a^{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{\lfloor 2}b^3a^{n-5}+\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{\lfloor 3}b^4a^{n-7}+\ldots$$

тогда q_n можно получить, пользуясь примѣромъ 3.

10. Знаменатель у каждой составляющей — единица; числитель первой составляющей 1, второй $\frac{1}{2}x$, и вообще $(2r)$-й $\frac{r^2x}{(2r-1)\,2r}$ и $(2r+1)$-ой $\frac{r^2x}{2r(2r+1)}$.

LVIII. 2. $ab+bc+ca+2abc=1$.

3. $(a^2+b^2+c^2)^3=-8(ab+bc+ca)^3$.

4. $a^2+b^2+c^2-abc=4$.

5. $a^2b^2c^2(a^3+b^3+c^3+2abc)=a^3b^3c^3$.

6. $(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})^3=z^{\frac{3}{2}}$.

7. $5\,(a^3-b^3)(2a^3+b^3)=9a(a^5-c^5)$.

8. $\left(\frac{c^2+a^2}{ac}\right)^{\frac{2}{5}}-\left(\frac{c^2-a^2}{ac}\right)^{\frac{2}{5}}=1$.

9. $\alpha\beta=1+\gamma$.

10. $(a-b)^2(a^2+b^2)=a^2b^2$.

11. $(\alpha+\beta)^{\frac{2}{3}}+(\alpha-\beta)^{\frac{2}{3}}=2$.

13. $x\,(y^2-z^2)+2y(z^2-x^2)+4z(x^2-y^2)=0$.

14. $(a+b)^{\frac{2}{3}}-(a-b)^{\frac{2}{3}}=(8c)^{\frac{2}{3}}$.

16. 399.

17. Задачу эту можно рѣшить при помощи началъ I и II статьи 814. Пусть p_1 будетъ вѣроятность одной карты выбранной масти, p_2 вѣроятность двухъ картъ, p_3 вѣроятность трехъ картъ выбранной масти, и т. д. Тогда $P_1=mp_1$; $P_2=\frac{m(m-1)}{2}p_2$; $P_3=\frac{m(m-1(m-2)}{\lfloor 3}p_3$;... Теперь

нужно найти p_1, p_2, p_3, ... Вообразимъ, что три карты скрѣплены между собою, такъ что составляютъ одну карту; тогда мы должны имѣть $mn-2$ картъ вмѣсто mn. Число благопріятныхъ случаевъ тогда было-бы $\lfloor\underline{mn-2}$, а все число случаевъ $\lfloor\underline{mn}$; это дало-бы шансъ, выражающійся чрезъ $\dfrac{\lfloor\underline{mn-2}}{\lfloor\underline{mn}}$; и чтобы получить p_1, мы должны умножить этотъ результатъ на $\lfloor\underline{3}$, потому что карты, предположенныя скрѣпленными вмѣстѣ, могутъ быть перемѣшаны между собой на $\lfloor\underline{3}$ способовъ. Итакъ $p_1=\dfrac{6}{mn(mn-1)}$.

Подобнымъ образомъ $p_2=\dfrac{6^2\lfloor\underline{mn-4}}{\lfloor\underline{mn}}$; и такъ далѣе. Отсюда окончательно искомая вѣроятность будетъ

$$\frac{6m}{mn\,(mn-1)}=\frac{6^2\dfrac{m(m-1)}{2}}{mn\ldots(mn-3)}+\frac{6^3\dfrac{m(m-1)(m-2)}{\lfloor\underline{3}}}{mn\ldots(mn-5)}-\ldots$$

18. $\dfrac{\lfloor\underline{m+n}}{\lfloor\underline{m}\,\lfloor\underline{n}}$.

19. Выраженіе $\dfrac{x}{1-x^2}\dfrac{x^3}{1-x^6}+\dfrac{x^5}{1-x^{10}}-\ldots$ при разложеніи обратится въ

$$\begin{array}{l}
x+x^3+x^5+x^7+x^9+\ldots\\
-x^3-x^9-x^{15}-x^{21}-x^{27}-\ldots\\
+x^5+x^{15}+x^{25}+x^{35}+x^{45}+\ldots\\
-x^7-x^{21}-x^{35}-x^{49}-x^{63}-\ldots\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot
\end{array}$$

Тогда, складывая вертикальные столбцы, мы получимъ

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^3}{1+x^6}+\frac{x^5}{1+x^{10}}+\ldots$$

20. Пусть

$$\alpha=(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots,\quad \beta=(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\ldots,$$
$$\gamma=(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\ldots\quad \delta=(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)\ldots;$$

тогда $\alpha\beta=(1-x^2)(1-x^6)(1-x^{10})\ldots$ $\gamma\delta=(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{12})\ldots$;

итакъ $\alpha\beta\gamma\delta=\gamma$; а потому $\alpha\beta\delta=1$, и слѣдовательно $\dfrac{1}{\alpha}=\beta\delta$.

21. $$4\left\{r^6\pm\sqrt{(2s^{12}-p^6q^6)}\right\}=\left\{q^3\pm\sqrt{(2r^6-p^6)}\right\}^2.$$

ОТВѢТЫ КЪ РАЗНЫМЪ ЗАДАЧАМЪ.

1. $7x-2y-6z$. 2. ax^4+bx^2+c. 3. $\frac{5x+2}{7x-4}$.

4. $\frac{26x^2+38ax}{(5x+3a)(7x+9a)}$; $\frac{3a^2+6ax}{(2a+x)(a^2-x^2)}$. 5. 1. 6. $x=\frac{5}{2}$, $y=\frac{7}{2}$.

7. B ѣдетъ впродолженіе $6\frac{1}{2}$ часовъ, прежде чѣмъ встрѣчаетъ A.

8. 80, 128. 9. $a^2+a-\frac{1}{2}$. 10. 2, $\frac{1}{2}$. 11. 10.

12. $x^4-(4a^2+9b^2)x^2+36a^2b^2$; $7x^3+5x^2y-8xy^2-3y^3$.

13. $(x+2)(x+3)(x+4)$. 14. $\frac{15x^2-4ax+2a^2}{(3x+4a)(4x+5a)}$. 15. $\frac{3}{2}$.

16. $x=11$, $y=6$. 17. $49\frac{1}{11}$ мин. послѣ 9. 18. Каждый въ 50 дней.

19. $2x-3y+z$. 20. 2, 4. 21. 17. 22. $x^4+(a+b)x^3-(6a^2-ab+6b^2)x^2-6ab(a+b)x+36a^2b^2$; $x^2+4x+15$.

23. $x+2$. 24. 1. 25. 3. 26. $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{1}{2}$.

27. $9\frac{1}{7}$ верстъ отъ A. 28. 90 скамей; 10 человѣкъ на каждой.

29. x^3-2x^2+x-2. 30. $\frac{3}{2}, -\frac{15}{22}$. 31. 7, 1, 3.

32. $\frac{6}{100}-\frac{3x}{10}+\frac{2x^2}{10}-x^3$; 0.031. 33. $\frac{x^2+5x+24}{24x^2+5x+1}$. 34. $\frac{3(1+x^2)}{1-x^2}$.

35. 15. 36. $x=11$, $y=7$. 37. 48 каждаго сорта. 38. Мужчина получаетъ 42 р. женщина 30 р. и каждый изъ дѣтей 18 р. 39. $\frac{x}{y}-\frac{1}{2}-\frac{y}{2x}$.

40. $6, -\frac{8}{3}$. 41. 4, 2, 4. 43. Первое выраженіе раздѣлится на второе; такъ что второе будетъ общій наибольшій дѣлитель, а первое—наименьшее кратное. 44. $\frac{(x+1)(x+2)}{x^2}$. 45. $\frac{2}{5}$. 46. $x=3, y=5, z=7$.

47. 30. 48. 10. 49. $\sqrt{(a-b)}+\sqrt{(b-c)}$. 50. 1, 3. 51. $4(ax+by+cz)$.

53. x^2+y^2. 54. 2. 55. $\frac{1}{2}$ 56. $x=\frac{3}{2}$, $y=-\frac{9}{2}$.

57. A въ 36 дней, B въ 60 дней, C въ 15 дней. 58. $4\frac{7}{8}$ версты.

59. $2x^3-x^2-3$. 60. $0, \pm\sqrt{(ab)}$. 61. $2(x+4)$. 62. $\frac{(x^2-a^2)^3}{x^3a^3}$.

63. $x-3y$. 64. $\frac{x^8-x^4+1}{x^8+x^4+1}$. 65. 2. 66. $x=a$, $y=b$.

67. 10000 р. 68. 84 за предложеніе и 63 противъ него. 69. b.

70. $\frac{76}{77}$, $\frac{309}{77}$. 71. 9. 73. $x-5$. 74. x^2. 75. $2a$.

76. $x=y=z=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$. 77. Черезъ 10 минутъ.

78. Въ первый день $8\frac{1}{3}$ к., во второй $2\frac{1}{2}$ коп. 80. -4, -7.

83. $x^2-2ax+a^2$. 84. $\frac{16x^{15}}{1-x^{16}}$. 85. 2. 86. $x=\frac{1}{2}(b+c)$, $y=\frac{1}{2}(c+a)$, $z=\frac{1}{2}(a+b)$. 87. 6000000 рубл. 88. Соотвѣтственно 3, 4, 5 верстъ въ часъ. 89. 0.05772. 90. c, $c-\frac{a+b}{2}$. 91. 20.

93. $x^2+(2m-3)x-6m$. 95. $x=1$. 96. $x-a=y-b=z-c=-\frac{1}{3}(a+b+c)$. 97. 60, 30, 12. 98. 14 верстъ отъ A до B, 16 верстъ отъ B до C. 100. 111, 112. 101. $+1$, $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$,

102. 3, 4, 5. 103. $x=3$, 6; $y=6$, 3. 104. 3, -12. 105. $-7\frac{1}{2}$.

106. $\frac{28}{3}\left(1-\frac{1}{2^6}\right)$; $\frac{28}{3}$. 107. 6. 110. Между 90 и 119, включая и оба эти числа. 111. $\pm(a+b)$, $\pm(a-b)$. 112. $x^2+\frac{2ac-b^2}{ac}x+1=0$.

113. $x=\pm2$, ±4; $y=\pm4$, ±2. 114. 7. 115. 162.

116. $\frac{1}{\sqrt{2}}\{1-(\sqrt{2}-1)^n\}$. 118. $n-m+1$, если r не больше m; $n-r+1$, если r заключается между $m+1$ и $n+1$, включая и ихъ; 0, если r больше $n+1$. 119. Расходящійся. 120. 3.06864.

121. 1, -4, $\frac{5\pm\sqrt{41}}{2}$. 122. $2b^2=9ac$. 123. 3, 4, $-6\mp2\sqrt{6}$; 4, 3, $-6\mp2\sqrt{6}$. 124. 30, 36, 45. 125. $\frac{b-2a}{b}$ должно быть положительной величиною и $\left(\frac{2a}{b}-1\right)^2+\frac{8s}{b}$ должно быть точнымъ квадратомъ и цѣлымъ положительнымъ числомъ; эти два цѣлыя числа оба должны быть четными или оба не четными, причемъ первое больше, чѣмъ квадратъ второго. 126. $\frac{1-r^n}{ar^{n-1}(1-r)}$. 129. 3. 131. 3, $\frac{17}{3}$.

133. $x-a=\frac{k(b-c)}{bc}$, $y-b=\frac{k(c-a)}{ca}$, $z-c=\frac{k(a-b)}{ab}$, гдѣ $k=0$ или

$$k=-2abc\,\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2}.$$

134. A 31 четверт., 16 гривенн., 13 пятачковъ; B 29 четвертаковъ, 24 гривенн. и 7 пятачковъ. 137. $6|\underline{6}$. 139. Расходящійся. 141. 6,—3. 142. 6400. 143. $x=\mp\frac{3}{4}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$; $y=\mp\frac{1}{2}, \mp\frac{3\sqrt{2}}{8}$. 144. 45 верстъ въ часъ. 149. 18. 151. $5,-\frac{13}{32}$. 153, $x=2^{\frac{3}{4}}$, $\left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$; $y=2^{\frac{1}{4}}, \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$ 154. 75 процент. 157. $|\underline{7}-2|\underline{6}$. 159. 0. 160. Приблизительно 1666. 161. $x+\frac{1}{x}=-4\mp\sqrt{6}$, откуда можно найти x. 162. A 15 верстъ въ часъ, B 18 верстъ въ часъ. 163. $x=-2,-\frac{3}{11}$; $y=\frac{19}{7}$, 0. 164. $x=0$, $y=0$, $z=0$; или $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{6}$, $z=-\frac{1}{6}$. 166. Или $a=b=c$, или $b=-2a$ и $c=4a$. 169. $-\frac{40726}{3^8}$. 170. Приблизительно 1.21534. 171. $\mp 8, \mp\frac{1}{8}$.

172. $a^4x^2-2a^2(b^2-2ac)x+b^2(b^2-4ac)=0$. 173. $x=5,-\frac{23}{5}$, $\frac{25\mp\sqrt{19968}}{29}$; $y=3,-\frac{69}{25},\frac{21}{29}.\frac{25\mp\sqrt{19968}}{29}$ 174. 9 дней.

176. 1, 2, 4, 8. 177. $\frac{|\underline{2n-p-q}}{|\underline{n-p}\,|\underline{n-q}}\,|\underline{n}\,|\underline{n}$. 181. $1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}$.

182. 10450р. 183. $x=81,16$; $y=16,81$. 184. $1=a^2+b^2+c^2+2abc$.

186. $\frac{a^3}{6}\left\{\frac{1}{(1-r)^3}+\frac{2}{1-r^3}-\frac{3}{(1-r)(1-r^2)}\right\}$. 189. Сходящійся, если x меньше e; въ противномъ случаѣ — расходящійся.

191. $x-\frac{1}{x}=-a\mp\sqrt{(a^2-4)}$, откуда найдется x. 193. x и y найдутся изъ уравненій $x^2+1=\mp\frac{m}{n}x$, $y^2+1=\mp mny$.

199. Сходящійся. 200. $|\underline{n+3}\left\{\frac{n}{24}+\frac{n(n-1)}{12}+\frac{n(n-1)(n-2)}{48}\right\}$.

201. $1-x-x^2+x^5+x^6+x^7-x^8-x^9-x^{10}+x^{13}+x^{14}-x^{15}$; $1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}$. 205. Рѣшенія найдутся изъ выраженій $14t$ гирь въ 9 фунт. и $160-9t$ гирь 14 фунтовыхъ. 206. $(2^{n+2}-n-3)x^n$.

209. 5 копѣекъ. 210. Расходящійся. 213. 19 лѣтъ. 215. Рѣшенія найдемъ, принимая за числитель $204-11t$ и за знаменатель $1+5t$; такъ что t можетъ имѣть нѣкоторое цѣлое значеніе, заключающееся между 13 и 18, включая и эти два числа. 219. $\frac{3}{4}$.

222. $x^2-a^2=y^2-b^2=z^2-c^2=\frac{b^4c^4+c^4a^4+a^4b^4-2a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)}{4a^2b^2c^2}$.

223. $rp+\frac{q}{p}=2$. 224. Частныя будутъ, a, b, $2a$, b, $2a$, .. 225. $(x-11y+1)(2x+y-3)$. 233. 6930 р. 234. Частныя будутъ $a-1$, 1, $2(n-1)$, 1, $2(a-1)$... 235. 52. 240. Расходящійся. 243. Приблизительно въ 18 лѣтъ. 244. Первое частное есть a; тогда мы имѣемъ 1, 2, a, 2, 1, $2a$, которыя будутъ повторяться. 245. Или 10 овецъ и 2 теленка; или 5 телятъ. 249. $83\frac{1}{3}$ рубл.

250. $x^2+4x+7-32x^{-1}-208x^{-2}-\frac{448x^{-1}-2496x^{-2}}{x^2-4x+12}$.

251. $x=1, \frac{4}{3}$; $y=1, \frac{3}{2}$. 252. $a_r-a=r(a_1-a)+\frac{r(r-1)}{2}d$; поставимъ $n+1$ вмѣсто r и b вмѣсто a_{n+1}; тогда a_1 сдѣлается извѣстнымъ. d должно заключаться между $-\frac{2(b-a)}{n(n+1)}$ и $\frac{2(b-a)}{n(n+1)}$. 253. 0.645 р. приближенно. 255. Или 5 яблок., 3 груши и 10 персиковъ; или 12 грушъ. 261. $\frac{b^2}{a^4}-\frac{4b^2c}{a^3}+\frac{3c^2}{a^2}$. 265. Наименьшее число монетъ будетъ состоять изъ 121 большихъ и 15 малыхъ; наименьшая сумма денегъ будетъ при 10 большихъ и 150 малыхъ монетахъ. 269. $\frac{(n+1)(3n+2)}{12}$ рублей. 272. $x=a, b$; $y=b, a$. 273. $(7t\mp2)^2$. 275. Коэффиціентъ при x^n есть $10^n+n(-3)^{n-1}$. 276. $1-4x+2x^2$; $1-3x^2-2x^3$. 279. $11\frac{1}{2}$ шиллинговъ. 281. Между 1 и -1. 282. $(xy)^{\frac{1}{2}}=\frac{a^2-b^2}{4a-2b\sqrt{2}}$; изъ этого и изъ перваго изъ данныхъ уравненій можно найти $x^{\frac{1}{2}}$ и $y^{\frac{1}{2}}$. 285. 56,78; или 30,65. 293. $\frac{r(1+6r+r^2)}{(1-r)^3}$.

294. $x=8$, $y=3$; $x=127$, $y=48$. 295. 27. 297. 2400 рублей. 300. 2 log 2—1.