(ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ)

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 515.7 + 517.5 + 517.73

АЛЕХНО ЕГОР АЛЕКСАНДРОВИЧ

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ИДЕАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.01 — математический анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Минск, 2004

Работа выполнена в Белорусском государственном университете

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Забрейко Петр Петрович,
Белгосуниверситет,
кафедра математических методов
теории управления
механико-математического факультета.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
доцент Бахтин Виктор Иванович,
Белгосуниверситет,
кафедра высшей математики и
математической физики
физического факультета;

кандидат физико-математических наук,
доцент
Быкодоров Юрий Александрович,
Белорусский государственный
педагогический университет,
кафедра математического анализа.

Оппонирующая организация: Воронежский государственный
университет

Защита состоится 28 мая 2004 в 10^{00} на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 в Белорусском государственном университете по адресу: 220050, Минск, пр. Скорины, 4, ауд. 206, тел. ученого секретаря — 209-55-58.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан "___" апреля 2004 г.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций
доктор физико-математических наук,
профессор А. Килбас А.А.Килбас

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Теория банаховых решеток и положительных операторов в них представляет собой один из важнейших разделов современного анализа. Это можно объяснить, например, тем фактом, что большинство классических пространств функционального анализа являются банаховыми решетками (или, по крайней мере, пространствами Рисса). Сейчас можно говорить о тесном (пусть даже еще неокончательном) единении теории банаховых решеток с многими другими разделами функционального анализа, что позволяет исследовать большое число важных математических объектов с единой точки зрения, представляющей собой синтез идей, охватывающих сразу топологическую, алгебраическую и решеточную структуру изучаемого объекта. Это особенно четко подчеркнуто в недавних монографиях Абрамовича – Алипрантиса “An invitation to the operator theory” и “Problems in operator theory”.

Можно утверждать, что спектральная теория положительных операторов является одним из важнейших разделов теории положительных операторов, стоящим у истоков зарождения всей теории. Эта теория, благодаря усилием многих математиков, содержит большое количество серьезных и глубоких результатов, представляющих замечательное обобщение теории неразложимых матриц Перрона – Фробениуса. Первоначально спектральная теория положительных операторов была сконцентрирована преимущественно на исследовании идеально неразложимых операторов. Так, в своих работах Шефер Х., Андо Т., Стеценко В.Я., Савасшима И., Криегер Х., Нииро Ф., де Пахте Б. построили теорию идеально неразложимых операторов, дав ответ на многие возникшие там вопросы, а затем Гроблер Дж., Шефер Х., Каселс В., Абрамович Ю., Алипрантис К., Беркиншо О. начали исследования компонентно неразложимых операторов. В последнем случае главный акцент был сделан на доказательство справедливости для случая компонентно неразложимых операторов классической теоремы Андо – Криегера.

В то же самое время фактически не исследованными остались другие спектральные свойства компонентно неразложимых операторов. Даже для таких классических объектов, как линейные интегральные операторы, оставались не изученными вопросы о существовании положительного собственного вектора и собственного функционала, примитивность и импримитивность, связь всех этих понятий со свойствами ядра. Все это круг изучаемых в диссертации вопросов.

Эти вопросы оказываются тесно связаны с существованием на банаховой решетке E антинормальных функционалов, изучение которых требует рассмотрение слабых топологий на пространстве E. Даже в пространстве $\mathcal{L}_\infty$, самом классическом идеальном пространстве с ненулевым множеством антинормальных функционалов, весьма неполно исследованы многие вопросы, связанные со слабой топологией. Практически, не считая работ Шрагина И.В., Аппеля Ю. и Забрейко П.П., Цолетти Т., не изучалась слабая непрерывность нелинейных операторов в пространстве $\mathcal{L}_\infty$, в частности, слабая непрерывность оператора суперпозиции. Этот же вопрос представляет интерес и в случае произвольного идеального пространства. Условия слабой непрерывности оператора суперпозиции могут оказаться полезными при исследовании разрешимости нелинейных интегральных операторов. Всему этому посвящены третья и четвертая главы работы.

Связь работы с крупными научными программами и темами. Исследования проводились в соответствии с планом научных исследований Белорусского государственного университета в рамках программы "Геометрические и алгебраические методы анализа операторных уравнений" (№2002290).

Цель и задачи исследования. Основной целью диссертационной работы является распространение классических результатов теории неразложимых матриц на случай компонентно неразложимых интегральных операторов в идеальных пространствах и получение условий слабой непрерывности операторов суперпозиции, действующих в идеальных пространствах.

Для достижения этой цели в работе решаются следующие задачи: устанавливаются основные спектральные свойства компонентно неразложимых интегральных операторов; доказываются критерии импримитивности и примитивности компонентно неразложимых интегральных операторов в терминах ядер; изучается слабая топология в пространстве $\mathcal{L}_\infty$; дается необходимое и достаточное условие слабой непрерывности оператора суперпозиции в идеальном пространстве в случае непрерывной меры; приводятся условия эквивалентные слабой секвенциальной непрерывности оператора суперпозиции в пространстве $\mathcal{L}_\infty$ и необходимые и достаточные условия слабой непрерывности оператора суперпозиции в пространстве ℓ_∞; устанавливаются новые теоремы о разрешимости уравнений Гаммерштейна в пространстве $\mathcal{L}_\infty$.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются компонентно неразложимые интегральные операторы и операторы суперпозиции, действующие в идеальных пространствах. Предмет исследования — задача установления спектральных свойств компонентно неразложимых интегральных операторов и задача выяснения условий слабой непрерывности оператора суперпозиции.

Гипотеза. Основные результаты диссертации получены при исследовании достоверности следующих гипотез: I) для компонентно неразложимого интегрального оператора остаются ли справедливы результаты теоремы Перрона – Фробениуса? II) для примитивных компонентно неразложимых интегральных операторов будет ли справедлив точный аналог критерия примитивности для неотрицательных матриц, утверждающий, что неотрицательная матрица примитивна в том и только том случае, когда некоторая ее степень положительна? III) слабая непрерывность оператора суперпозиции в произвольном идеальном пространстве равносильна ли его аффинности? Так, гипотеза I) подтвердилась при ряде естественных дополнительных предположений. Гипотеза II) была опровергнута. В работе приведен соответствующий пример и, тем не менее, доказана теорема, обобщающая упомянутый критерий примитивности неотрицательной матрицы и превращающаяся в него в конечномерном случае. Гипотеза III) оказалась верной лишь для случая идеального пространства с непрерывной мерой. Для случая произвольной меры она была опровергнута; в пространстве ℓ_∞ был обнаружен целый класс слабо непрерывных отображений, определяемых операторами суперпозиции, которые не являются аффинными.

Методология и методы проведенного исследования. В диссертационной работе используются методы классического и функционального анализа, методы нелинейного анализа, теории банаховых решеток, идеальных пространств и положительных операторов в них. При доказательстве результатов, относящихся к компонентно неразложимым операторам, использовались методы общей спектральной теории и спектральной теории положительных операторов. Исследования, связанные с операторами суперпозиции, основываются на методах теории операторов суперпозиции в идеальных пространствах и теории слабых топологий в банаховых пространствах. Доказательства теорем о разрешимости уравнений Гаммерштейна опираются на идеи теории неподвижных точек; основным инструментом здесь является теорема Шаудера – Тихонова.

Научная новизна и значимость полученных результатов. Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми и имеют важное значение для развития спектральной теории положительных операторов в банаховых решетках, теории операторов суперпозиции в идеальных пространствах и связанных с этой теорией вопросов разрешимости нелинейных уравнений.

Научная новизна полученных результатов состоит в следующем. Получены теоремы, дающие полную характеристику спектральных свойств компонентно неразложимых интегральных операторов и обобщающие классические результаты теории неотрицательных матриц и теории идеально неразложимых операторов. Научная значимость этих теорем связана с их возможным применением к вопросам разрешимости операторных уравнений с положительными операторами. Получены теоремы, описывающие множество слабо непрерывных операторов суперпозиции. Их новизна состоит в общности полученных результатов (охватываются все идеальные пространства с непрерывной мерой и слабо непрерывные операторы суперпозиции в них) и в том обстоятельстве, что до этого не было известно никаких условий, при которых оператор суперпозиции будет слабо (секвенциально) непрерывен в пространстве $\mathcal{L}_\infty$, в частности, в пространстве ℓ_∞. Значимость данных результатов связана с полученными при их помощи условиями разрешимости уравнений Гаммерштейна и с распространением хорошо развитой техники теории банаховых решеток на исследование слабой непрерывности оператора суперпозиции.

Практическая значимость полученных результатов. Полученные теоретические результаты могут быть использованы при исследовании разрешимости, существования нетривиальных решений, применимости различных схем приближенного построения решений для уравнений с положительными, линейными и нелинейными операторами и для более общих нелинейных уравнений, в частности, уравнений Гаммерштейна.

Экономическая и социальная значимость полученных результатов. Работа относится к фундаментальным исследованиям, что не позволяет на данном этапе оценить экономическую и социальную значимость полученных результатов. Тем не менее, опираясь на тот факт, что теория неотрицательных матриц (частный случай компонентно неразложимых интегральных операторов) имеет важные приложения в экономике (модели леонтьевского типа), необходимо отметить возможность экономических приложений полученных в диссертации результатов.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту. В настоящей диссертационной работе получены и выносятся на защиту следующие результаты:

– *описание спектральных свойств компонентно неразложимых интегральных операторов;*

– *критерии импримитивности и примитивности компонентно неразложимых интегральных операторов в терминах ядер;*

– *теорема о сходимости почти всюду слабо сходящейся последовательности в пространстве $\mathcal{L}_\infty$; теорема о совпадении множества слабо компактных линейных интегральных операторов в пространстве ℓ_∞ с множеством компактных линейных интегральных операторов;*

– *аффинность слабо непрерывного оператора суперпозиции в произвольном идеальном пространстве с непрерывной мерой; условия эквивалентные слабой секвенциальной непрерывности оператора суперпозиции в пространстве $\mathcal{L}_\infty$; условия слабой непрерывности оператора суперпозиции в пространстве ℓ_∞.*

Личный вклад соискателя. Основные результаты, приведенные в выносимой на защиту диссертационной работе, получены автором лично. Из совместно опубликованных работ в диссертацию вошли результаты, полученные лично автором при исследовании задач, поставленных научным руководителем.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались:

– на международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений" (г. Минск, сентябрь 2003);

на республиканской конференции студентов и аспирантов Белорусского государственного университета (г.Минск, май 1999; г.Минск, май 2000);

на семинаре по нелинейному анализу, проводимом в Институте математики НАН Беларуси под руководством доктора физико-математических наук, профессора Гороховика В.В. и доктора физико-математических наук, профессора Забрейко П.П.

Опубликованность результатов. Результаты диссертации опубликованы в 7 научных работах. Среди них 5 статей в научных журналах и 2 тезисов. Общий объем опубликованных материалов составляет 25 страниц.

Структура и объем диссертации. Диссертация включает введение, общую характеристику работы, 4 главы, заключение, список использованных источников, состоящий из 139 наименований. Полный объем — 103 с., из них 11 с. занимает список использованных источников.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во *введении* дается оценка современного состояния спектральной теории положительных операторов в банаховых решетках и теории, связанной со слабой непрерывностью оператора суперпозиции, выделяется круг проблем, нуждающихся в изучении, определяется направление исследования.

В *первой главе* диссертации дается краткий обзор литературы по теме исследований.

Основное содержание *второй главы* составляют теоремы, описывающие спектральные свойства компонентно неразложимых интегральных операторов в идеальных пространствах.

Пусть Ω — произвольное множество с неотрицательной счетно-аддитивной σ-конечной полной мерой μ на некоторой σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств Ω, а X — произвольное идеальное пространство на Ω, причем, считаем, что $\operatorname{supp} X = \Omega$. Через E будет обозначаться произвольная банахова решетка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию спектральных свойств компонентно неразложимых линейных интегральных операторов в идеальных пространствах и нахождению условий слабой непрерывности оператора суперпозиции в идеальных пространствах.

В диссертации получены следующие результаты:

1. В терминах квазивнутренних точек получены характеристики некоторых классов банаховых решеток. В частности доказано, что банахова решетка E счетного типа обладает порядково непрерывной нормой в том и только том случае, когда в E множество квазивнутренних точек совпадает с множеством слабых порядковых единиц [2]. Описан широкий класс идеальных пространств без квазивнутренних точек. К ним относятся все квазиправильные симметрические идеальные пространства с непрерывной мерой не являющиеся правильными [2]. Найдены новые условия, гарантирующие существование на банаховой решетке строго положительного функционала [3].

2. Установлены спектральные свойства: положительность спектрального радиуса, существование собственного вектора и собственного функционала у компонентно неразожимых линейных интегральных операторов в идеальных пространствах [4]. Даны критерии примитивности и импримитивности компонентно неразложимых линейных интегральных операторов в терминах ядер [1, 2].

3. Доказана аффинность слабо непрерывного оператора суперпозиции в идеальном пространстве с непрерывной мерой [7].

4. Доказана теорема о сходимости почти всюду слабо сходящейся последовательности в пространстве $\mathcal{L}_\infty$ [7]. Доказана теорема о совпадении множества слабо компактных линейных интегральных операторов в пространстве ℓ_∞ с множеством компактных линейных интегральных операторов. Исследованы свойства функционалов Мазура [6].

5. Найден критерий слабой секвенциальной непрерывности оператора суперпозиции в пространстве $\mathcal{L}_\infty$ [7]. Найдены необходимые и достаточные условия слабой непрерывности оператора суперпозиции в пространстве ℓ_∞.