Секция «Математика»

УДК 517.94

С.М. Бородич

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, г. Витебск, Беларусь

О ПОВЕДЕНИИ ПРИ $t \to +\infty$ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ТИПА «РЕАКЦИЯ – ДИФФУЗИЯ»

Рассматривается система типа «реакция – диффузия»

$$\partial_t u = \Delta u - f(u,T),\ \partial_t T = \Delta T + g(u,T),\ (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty), \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\partial u / \partial \nu \big|_{x \in \partial\Omega} = 0,\ \partial T / \partial \nu \big|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

где Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$, ν – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Предполагается, что $f(u,T),\ g(u,T) \in C^1(\mathbf{R}^2)$ и выполнены следующие условия:

$$\lim_{T \to +\infty} f(u,T) = \tilde{f}(u),\ \lim_{T \to +\infty} g(u,T) = \tilde{g}(u),\ \tilde{f}(u),\ \tilde{g}(u) \in C^1(\mathbf{R}),$$

$$f(u,T)u \ge C_0 |u|^p - C,\ \tilde{f}(u) \ge -C,$$

$$0 < \varepsilon \le g(u,T) \le C\left(\frac{|u|^q}{1+|T|^{1+\alpha}} + |u| + 1 \right),$$

$$f'_u \xi_1^2 + (f'_T - g'_u)\xi_1 \xi_2 - g'_T \xi_2^2 \ge -C|\xi|^2 \text{ для всех } \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2,$$

$$\left| f(u,T) - \tilde{f}(u) \right| \le k(T)(|u|^{p-1} + 1),\ |g(u,T) - \tilde{g}(u)| \le k(T)(|u|^q + 1),$$

где $C_0 > 0$, $p > 2$, $0 \le \alpha \le 1$, $0 < q < \frac{p(1+\alpha)}{2}$, $q < \max\left(\frac{n+2}{n-2}, \frac{p(n+2)}{2n}\right)$ при $n \ge 3$, $k(T) \in C(\mathbf{R})$, $k(T) < C$, $k(T) \downarrow 0$ при $T \uparrow +\infty$.

Стандартными методами (см. [1; 2]) устанавливается, что задача (1), (2) порождает в пространстве $E = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ полугруппу операторов $\{S_t,\ t \ge 0\}$:

$$S_t : (u_0, T_0) \to (u(t), T(t)),$$

где $(u_0, T_0) \in E$, $(u(t), T(t))$ – решение задачи (1), (2) с начальным условием

$$(u(0), T(0)) = (u_0, T_0).$$

Наряду с задачей (1), (2) рассматривается следующая краевая задача

$$\partial_t \tilde{u} = \Delta \tilde{u} - \tilde{f}(\tilde{u}),\ \partial_t \tilde{T} = \Delta \tilde{T} + \tilde{G}(\tilde{u}),\ (x,t) \in \Omega \times (0, +\infty), \quad (3)$$

$$\partial \tilde{u} / \partial \nu \big|_{x \in \partial\Omega} = 0,\ \partial \tilde{T} / \partial \nu \big|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad (4)$$

где

$$\tilde{G}(\tilde{u}) = \tilde{g}(\tilde{u}) - (mes\,\Omega)^{-1} \int_\Omega \tilde{g}(\tilde{u}) dx.$$

Пусть $V = \left\{ \tilde{T} \in L_2(\Omega) :\ \int_\Omega \tilde{T} dx = 0 \right\}$, $E_1 = L_2(\Omega) \times V$.

Задача (3), (4) порождает в E_1 полугруппу операторов $\{\tilde{S}_t,\ t \ge 0\}$.

Теорема 1. Полугруппа $\{\tilde{S}_t\}$ обладает максимальным аттрактором $\mathcal{A} \subset E_1$ (определение см. в [2]).

Пусть $V^\perp$ – ортогональное дополнение к V в $L_2(\Omega)$. Заметим, что

$$V^\perp = \{ \varphi \in L_2(\Omega) : \varphi = const \text{ почти всюду в } \Omega \}.$$

Для произвольного $T \in L_2(\Omega)$ через $\langle T \rangle$ обозначим его ортогональную проекцию в $L_2(\Omega)$ на $V^{\perp}$. Определим отображение π из E в $V^{\perp}$ следующим образом:

$$\pi: (u,T) \to \langle T \rangle .$$

Через Π обозначим оператор ортогонального проектирования в пространстве E на подпространство E_1.

Теорема 2. Пусть B – произвольное ограниченное в E множество. Тогда

$$\mathrm{dist}_E(\Pi S_t B, \mathcal{A}) \to 0 \text{ и } \inf \pi S_t B \to +\infty \text{ при } t \to +\infty ,$$

где $\{S_t\}$ – полугруппа, соответствующая задаче (1), (2), $\inf \pi S_t B = \sup\{\lambda \in \mathbf{R} : \pi S_t(u_0, T_0) \ge \lambda$ почти всюду в $\Omega \ \forall (u_0, T_0) \in B\}$.

Литература

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
2. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.

УДК 512.542

Е.А. Витько

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова, г. Витебск, Беларусь

О ФИТТИНГОВЫХ ФУНКТОРАХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ СВОЙСТВАМИ ПОКРЫВАЮЩИХ ПОДГРУПП

В определениях и обозначениях мы следуем [1].

Класс групп U называют S-замкнутым, если из условия $G \in$ U и N – нормальная подгруппа группы G, следует $N \in$ U;