УДК 517.94

С.М. Бородич

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,
г. Витебск, Беларусь

ОБ ОДНОМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ, СОДЕРЖАЩЕМ МАЛЫЙ ПАРАМЕТР

Рассматривается гиперболическое уравнение

$$\partial_t^2 u + \gamma\,\partial_t u = \Delta u - f(u,t,\varepsilon) - g(x)\,,\ x \in \Omega\,,\ t \ge 0\,,\ u\big|_{x\in\partial\Omega} = 0\,, \quad (1)$$

где $\gamma > 0$, ε – малый параметр, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$, Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$, функция $f(u,t,\varepsilon)$ класса C^1 по u и ε и непрерывна по t, $g(x) \in L_2(\Omega)$. Предполагаем, что $f(u,t,0)$ не зависит от t:

$$f(u,t,0) \equiv \varphi(u)\,. \quad (2)$$

Предполагается также, что

$$f(u,t,\varepsilon)u \ge -C\,,\ -C \le f_u'(u,t,\varepsilon) \le C(1+u^2)\,,$$

$$\left|f_\varepsilon'(u,t,\varepsilon)\right| \le C(1+|u|^3)\,,\ \int_0^u \varphi(s)ds \ge -C$$

для всех $u \in \mathbf{R}$, $t \ge 0$, $\varepsilon \in [-\varepsilon_0,\ \varepsilon_0]$.

Уравнение (1) рассматривается при начальных условиях

$$u\big|_{t=0} = u_0\,,\ \partial_t u\big|_{t=0} = p_0\,, \quad (3)$$

где $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $p_0 \in L_2(\Omega)$.

Пусть $E = H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$. При любом ε, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$, задача (1), (3) имеет, и притом единственное, решение $u(t,\varepsilon)$, для которого

$$(u(t,\varepsilon), \partial_t u(t,\varepsilon)) \in C([0,+\infty); E)$$

(см. [1; 2]).

В силу условия (2) уравнение (1) автономно при $\varepsilon = 0$. В этом случае оно порождает в пространстве *E* полугруппу операторов $\{S_t,\ t \geq 0\}$:

$$S_t(u_0, p_0) = (u(t,0), \partial_t u(t,0)).$$

Пусть $w = (z,0) \in E$ – стационарная точка полугруппы $\{S_t\}$.. Обозначим через $M^H(w)$ совокупность всех точек $(u, p) \in E$, через которые проходят траектории $S_t(u_0, p_0)$, продолжаемые для всех $t \leq 0$ и удовлетворяющие условию: $S_t(u_0, p_0) \to w$ в Е при $t \to -\infty$.

Будем предполагать, что функция $g(x)$ является регулярным значением оператора

$$Av \equiv \Delta v - \varphi(v),\ v \in H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega).$$

В этом случае полугруппа $\{S_t\}$ имеет конечное множество стационарных точек $\{w_1, \ldots, w_n\}$ и, кроме того, множества $M^H(w_i)$ являются гладкими конечномерными многообразиями (см. [2]).

Пусть *B* – ограниченное в *E* множество, $V_\varepsilon(B)$ – совокупность всех фазовых траекторий $(u(t,\varepsilon), \partial_t u(t,\varepsilon))$ уравнения (1), выходящих в момент времени $t = 0$ из точек множества *B*. Под *семейством составных предельных траекторий, соответствующих* $V_\varepsilon(B)$, будем понимать совокупность кусочно-непрерывных по *t* траекторий $(\tilde{u}(t), \partial_t \tilde{u}(t))$ полугруппы $\{S_t\}$, таких, что:

1) число точек разрыва $(\tilde{u}(t), \partial_t \tilde{u}(t))$ конечно;

2) $(\tilde{u}(t), \partial_t \tilde{u}(t)) = S_t(u_0, p_0)$ при $0 \leq t < t_1$ для некоторых $(u_0, p_0) \in B$ и $t_1 > 0$;

3) при $t \geq t_1$ $(\tilde{u}(t), \partial_t \tilde{u}(t))$ состоит из конечного числа непрерывных кусков траекторий полугруппы $\{S_t\}$, лежащих на конечномерных многообразиях $M^H(w_i)$.

Теорема. Для любого ограниченного в *E* множества *B* найдутся такие малые $\varepsilon_1 > 0$ и $q > 0$ и достаточно большое число

C_0, что при $|\varepsilon| \le \varepsilon_1$ для любой траектории $(u(\cdot,\varepsilon), \partial_t u(\cdot,\varepsilon)) \in V_\varepsilon(B)$ существует составная предельная траектория $(\tilde{u}(t), \partial_t \tilde{u}(t))$, такая, что $(\tilde{u}(0), \partial_t \tilde{u}(0)) = (u(0,\varepsilon), \partial_t u(0,\varepsilon))$ и

$$\sup_{t\ge 0} \left\| (u(t,\varepsilon), \partial_t u(t,\varepsilon)) - (\tilde{u}(t), \partial_t \tilde{u}(t)) \right\|_E \le C_0 |\varepsilon|^q .$$

Литература

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972.
2. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. – М.: Наука, 1989.