УДК 517.94

С.М. Бородич

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова,
г. Витебск, Беларусь

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО НЕАВТОНОМНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО МАЛЫЙ ПАРАМЕТР

Рассматривается неавтономное параболическое уравнение

$$\partial_t u = \Delta u - f(u) - \varphi(u,t,\varepsilon) - g(x)\,,\ x \in \Omega\,,\ t \geq 0\,,\ u\big|_{x\in\partial\Omega} = 0\,, \quad (1)$$

где ε – малый параметр, $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$, Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $f(u) \in C^{1+\alpha}(\mathbf{R})$, $0 < \alpha < 1$, $\varphi(u,t,\varepsilon)$ – класса C^1 по *u* и ε и непрерывна по *t*, $g(x) \in L_2(\Omega)$. Предполагается, что

$$\varphi(u,\,t,\,0) = 0\,, \quad (2)$$

$$(f(u) + \varphi(u,\,t,\,\varepsilon))u \geq -C\,,\ f'(u) + \varphi'_u(u,t,\varepsilon) \geq -C\,,$$

$$|f'(u)| + |\varphi'_u(u,\,t,\,\varepsilon)| \leq C(1+|u|^{p-1})\,,\ |\varphi'_u(u,\,t,\,\varepsilon)| \leq C(1+|u|^{p})\,,$$

$$p \leq \frac{n}{n-2}\,,\ F(u) = \int_0^u f(s)ds \geq -C$$

для всех $u \in \mathbf{R}$, $t \geq 0$, $\varepsilon \in [-\varepsilon_0,\ \varepsilon_0]$.

Пусть $E = H_0^1(\Omega)$. При любом ε, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$, и любых $T > 0$ и $u_0 \in E$ уравнение (1) имеет единственное решение $u(t,\varepsilon)$, принадлежащее классу

$$V = L_\infty([0,T], L_2(\Omega)) \bigcap L_2([0,T], E)$$

и удовлетворяющее начальному условию $u\big|_{t=0} = u_0$ (см. [1]).

В силу условия (2) уравнение (1) автономно при $\varepsilon = 0$. В этом случае оно порождает в пространстве E полугруппу операторов $\{S_t,\ t \ge 0\}$, сопоставляющих начальному значению $u_0 \in E$ значение соответствующего решения в момент времени t.

Пусть $z \in E$ – стационарная точка полугруппы $\{S_t\}$. Обозначим через $M^H(z)$ совокупность всех точек $u \in E$, через которые проходят траектории $S_t u_0$, продолжаемые для всех $t \le 0$ и удовлетворяющие условию: $S_t u_0 \to z$ в E при $t \to -\infty$.

Будем предполагать, что функция $g(x)$ является регулярным значением оператора $Av = \Delta v - f(v)$, $v \in H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega)$. В этом случае полугруппа $\{S_t\}$ имеет конечное множество стационарных точек $\{z_1,\ \ldots,\ z_n\}$ и, кроме того, множества $M^H(z_i)$ являются гладкими конечномерными многообразиями (см. [2]).

Пусть B – ограниченное в E множество, $U_\varepsilon(B)$ – совокупность всех решений уравнения (1) с начальными условиями из множества B, определенных при $t \ge 0$. Под *семейством составных предельных траекторий, соответствующих* $U_\varepsilon(B)$, будем понимать совокупность кусочно-непрерывных по t траекторий $\tilde{u}(t)$ полугруппы $\{S_t\}$, таких, что: 1) число точек разрыва $\tilde{u}(t)$ конечно; 2) $\tilde{u}(t) = S_t u_0$ при $0 \le t < t_1$ для некоторых $u_0 \in B$ и $t_1 > 0$; 3) при $t \ge t_1$ $\tilde{u}(t)$ состоит из конечного числа непрерывных кусков траекторий полугруппы $\{S_t\}$, лежащих на конечномерных многообразиях $M^H(z_i)$.

Теорема. Для любого ограниченного в E множества B найдутся такие малые $\varepsilon_1 > 0$ и $q > 0$ и достаточно большое число

C_0, что при $|\varepsilon| \le \varepsilon_1$ для любого $u(\cdot, \varepsilon) \in U_\varepsilon(B)$ существует составная предельная траектория $\tilde{u}(t)$, такая, что $\tilde{u}(0) = u(0, \varepsilon)$ и

$$\sup_{t \ge 0} \| u(t, \varepsilon) - \tilde{u}(t) \|_E \le C_0 |\varepsilon|^q .$$

Литература

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972.
2. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. – М.: Наука, 1989.