УДК 517.94

***С.М. Бородич***

*Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, г. Витебск, Беларусь*

# О МАКСИМАЛЬНОМ АТТРАКТОРЕ СЕМЕЙСТВА ЭВОЛЮЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассматривается неавтономное эволюционное уравнение

$$\partial_t u = A(u,t), \ \ t \ge 0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(\tau) = u_0, \ \ \tau \ge 0, \tag{2}$$

где $u_0$ принадлежит банахову пространству $E$. Предполагается, что для любого $\tau \ge 0$ и любого $u_0 \in E$ задача (1), (2) имеет, и притом единственное, решение $u(t)$, $t \ge \tau$, причем $u(t) \in E$ при всех $t \ge \tau$. Тогда уравнение (1) порождает в $E$ семейство эволюционных операторов $\{S_{t,\tau}, t \ge \tau \ge 0\}$: $S_{t,\tau}u_0 = u(t)$.

Для любых непустых множеств $X, Y \subset E$ положим $dist(X,Y) = \sup\limits_{x\in X} \inf\limits_{y\in Y} \| x - y \|$ ($\|\cdot\|$ – норма в $E$).

Через $\mathcal{B}(E)$ обозначим множество всех ограниченных в $E$ множеств.

**Определение 1.** Множество $\mathcal{A}_{\text{н}} \subset E$ называется *максимальным аттрактором семейства* $\{S_{t,\tau}\}$, если оно обладает следующими свойствами:

1) $\mathcal{A}_{\text{н}}$ компактно в $E$;

2) $\forall B \in \mathcal{B}(E)$ $dist(S_{t,0}B, \mathcal{A}_{\text{н}}) \to 0$ при $t \to +\infty$ (свойство притяжения);

3) если $\mathcal{M}$ – компактное в $E$ множество и $\forall B \in \mathcal{B}(E)$ $dist(S_{t,0}B, \mathcal{M}) \to 0$ при $t \to +\infty$, то $\mathcal{A}_{\text{н}} \subset \mathcal{M}$ (свойство минимальности).

© *Бородич С.М., 2021*

Будем предполагать некоторую асимптотическую автономность уравнения (1), обеспечивающую стабилизацию операторов $S_{t,\tau}$ при $\tau \to +\infty$. Другими словами, рассматривается ситуация, когда $A(u,t)$ стремится (в некотором смысле) при $t \to +\infty$ к $\tilde{A}(u)$. Автономное уравнение

$$\partial_t v = \tilde{A}(v)$$

(при соответствующем предположении о существовании и единственности решения $v(t)$, $t \geq 0$, с начальным условием $v(0) = v_0 \in E$) порождает в $E$ полугруппу операторов $\{S_t, t \geq 0\}$.

**Определение 2 [1].** Множество $\mathcal{A} \subset E$ называется *максимальным аттрактором полугруппы* $\{S_t\}$, если:

1) $\mathcal{A}$ компактно в $E$;

2) $\forall B \in \mathcal{B}(E)$ $dist(S_t B, \mathcal{A}) \to 0$ при $t \to +\infty$;

3) $S_t \mathcal{A} = \mathcal{A}$ $\forall t \geq 0$.

**Теорема.** Пусть $\{S_{t,\tau}, t \geq \tau \geq 0\}$ и $\{S_t, t \geq 0\}$ – соответственно семейство эволюционных операторов и полугруппа операторов, действующие в банаховом пространстве $E$. Пусть операторы $S_{t,\tau}$ и $S_t$ непрерывны из $E$ в $E$ при любых фиксированных $t$ и $\tau$, $t \geq \tau \geq 0$. Пусть полугруппа $\{S_t\}$ обладает максимальным аттрактором $\mathcal{A}$. Предполагается также, что $\forall B \in \mathcal{B}(E)$ существуют $t_B \geq 0$ и множество $D_B \in \mathcal{B}(E)$, такие, что

1) $S_{t,0} B \subset D_B$ $\forall t \geq t_B$,

2) $\forall \theta \geq 0$ $\| S_{\tau+\theta,\tau} y - S_\theta y \| \to 0$ при $\tau \to +\infty$ равномерно по $y \in D_B$.

Тогда семейство $\{S_{t,\tau}\}$ имеет максимальный аттрактор $\mathcal{A}_\text{н}$, причем $\mathcal{A}_\text{н} \subset \mathcal{A}$ и $S_t \mathcal{A}_\text{н} = \mathcal{A}_\text{н}$ $\forall t \geq 0$. Если дополнительно предположить, что $S_{t,0} x$ непрерывно по $t \in [a, +\infty)$ $\forall x \in E$ $(a \geq 0)$, то $\mathcal{A}_\text{н}$ – связное множество.

**Литература**

1. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. – М.: Наука, 1989.