ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ТИПА «РЕАКЦИЯ–ДИФФУЗИЯ»

С.М. Бородич

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассматривается система типа «реакция-диффузия»

$$\partial_t u = \Delta u - f(u,T), \quad \partial_t T = \Delta T + g(u,T), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty), \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\partial u/\partial\nu|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad \partial T/\partial\nu|_{x\in\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Здесь $u = u(x,t)$, $T = T(x,t)$, $\nu = \nu(x)$ – нормаль к $\partial\Omega$. Предполагается, что $f(u,T)$, $g(u,T) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ и выполнены следующие условия:

$$\lim_{T\to+\infty} f(u,T) = \widetilde{f}(u), \quad \lim_{T\to+\infty} g(u,T) = \widetilde{g}(u), \quad \widetilde{f}(u), \widetilde{g}(u) \in C^1(\mathbb{R}),$$

$$c_0|u|^p - C \leqslant f(u,T)u \leqslant C(|u|^p + 1), \quad 0 < \varepsilon \leqslant g(u,T) \leqslant C\left(\frac{|u|^q}{1+|T|^\alpha} + |u|^r + 1\right),$$

$$f'_u\xi_1^2 + (f'_T - g'_u)\xi_1\xi_2 - g'_T\xi_2^2 \geqslant -C|\xi|^2 \ \ \forall \xi = (\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\widetilde{f}'(u) \geqslant c_0|\widetilde{g}'(u)|^2 - C, \quad |\widetilde{g}'(u)| \leqslant C(|u|^{r-1} + 1),$$

$$|f(u,T) - \widetilde{f}(u)| \leqslant h(T)(|u|^{p-1} + 1), \quad |g(u,T) - \widetilde{g}(u)| \leqslant h(T)(|u|^q + 1),$$

где

$$C,\, c_0 > 0, \quad p > 2, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 1 \leqslant q \leqslant p(1+\alpha)/2,$$

$$q < p/2 + 4/(n-2) \ \text{при} \ n \geqslant 3, \quad 1 \leqslant r \leqslant p/2,$$

$$h(T) \in C(\mathbb{R}), \ h(T) \ \text{ограничена и монотонно убывает на} \ \mathbb{R}, \quad \lim_{T\to+\infty} h(T) = 0.$$

Пусть $E = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$. Стандартными методами (см. [1, 2]) устанавливается, что задача (1), (2) порождает в пространстве E полугруппу операторов $\{S_t,\ t \geqslant 0\}$:

$$S_t : (u_0, T_0) \to \big(u(t), T(t)\big),$$

где $(u_0, T_0) \in E$, $\big(u(t), T(t)\big)$ – решение задачи (1), (2) с начальным условием

$$\big(u(t), T(t)\big) = (u_0, T_0).$$

Для произвольной интегрируемой по Лебегу на Ω функции φ через $\langle\varphi\rangle$ обозначим ее среднее значение в этой области: $\langle\varphi\rangle = (\operatorname{mes}\Omega)^{-1}\int\limits_\Omega \varphi(x)\,dx$.

Пусть $V = \{\varphi \in L_2(\Omega) : \langle\varphi\rangle = 0\}$; (u,T) – решение задачи (1), (2) с начальным условием из E. Представим компоненту T в виде суммы $T = T_1 + T_2$, где $T_2 = \langle T\rangle$ (очевидно, что $T_1(t) \in V \ \forall t \geqslant 0$). Из (1), (2) получаем

$$\partial_t u = \Delta u - f(u, T_1 + T_2), \qquad \partial u/\partial\nu|_{x\in\partial\Omega} = 0, \tag{3}$$

$$\partial_t T_1 = \Delta T_1 + G_1(u, T_1 + T_2), \quad \partial T_1/\partial\nu|_{x\in\partial\Omega} = 0, \tag{4}$$

$$\partial_t T_2 = G_2(u, T_1 + T_2), \tag{5}$$

где $G_1(u, T_1 + T_2) = g(u, T_1 + T_2) - \langle g(u, T_1 + T_2)\rangle$, $G_2(u, T_1 + T_2) = \langle g(u, T_1 + T_2)\rangle$. Заметим, что из (5) и условия $g(u, T) \geqslant \varepsilon > 0$ следует: $T_2(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

Рассмотрим задачу, в некотором смысле предельную при $T_2 \to +\infty$ для задачи (3), (4):

$$\partial_t\widetilde{u} = \Delta\widetilde{u} - \widetilde{f}(\widetilde{u}), \quad \partial_t\widetilde{T}_1 = \Delta\widetilde{T}_1 + \widetilde{G}_1(\widetilde{u}), \tag{6}$$

$$\partial\widetilde{u}/\partial\nu|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad \partial\widetilde{T}_1/\partial\nu|_{x\in\partial\Omega} = 0, \tag{7}$$

где $\widetilde{G}_1(\widetilde{u}) = \widetilde{g}(\widetilde{u}) - \langle\widetilde{g}(\widetilde{u})\rangle$. Начальные данные этой задачи берутся в пространстве

$$E_1 = L_2(\Omega) \times V \subset E.$$

Для любых непустых множеств $X, Y \subset E$ положим $\mathrm{dist}_E(X, Y) = \sup\limits_{x\in X}\inf\limits_{y\in Y}\|x - y\|_E$.

Методами, изложенными в [2], доказывается, что задача (6), (7) порождает в пространстве E_1 полугруппу операторов $\{\widetilde{S}_t,\ t \geqslant 0\}$, обладающую максимальным аттрактором $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subset E_1$. (Следуя [2], *максимальным аттрактором* полугруппы операторов $\{\widetilde{S}_t\}$ называем такое компактное в E_1 и инвариантное относительно операторов полугруппы множество $\mathcal{A}$, что для любого ограниченного в E множества $B \subset E$ $\mathrm{dist}_E(\widetilde{S}_tB, \mathcal{A}) \to 0$ при $t \to +\infty$).

Определим отображения $\Pi_1\colon E \to E_1$ и $\Pi_2\colon E \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\Pi_1\colon(u, T) \to (u, T_1), \quad \Pi_2\colon(u, T) \to T_2$$

для любых $(u, T) \in E$, где $T = T_1 + T_2$, $T_2 = \langle T\rangle$.

Теорема. *Пусть B – ограниченное в E множество. Тогда*

$$\mathrm{dist}_E(\Pi_1S_tB, \mathcal{A}) \to 0 \quad \text{и} \quad \inf\Pi_2S_tB \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

где $\{S_t\}$ – полугруппа, порожденная в пространстве E задачей (1), (2).

Литература

1. Лионс Ж.–Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* М.: Мир, 1972.

2. Бабин А. В., Вишик М. И. *Аттракторы эволюционных уравнений.* М.: Наука, 1989.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

И.Б. Гарипов, Р.М. Мавлявиев

В настоящее время активно изучаются краевые задачи с интегральными условиями. Краевые задачи с интегральным условием для гиперболического уравнения были рассмотрены в работе [1]. Гиперболическое уравнение с оператором Бесселя и с нелокальным интегральным условием изучено в работе [2], а параболическое уравнение с оператором Бесселя в работах [3, 4].

Пусть $G_T = \{(x, t) :\ 0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T\}$ – прямоугольная область в координатной плоскости Oxt.

В области G_T рассмотрим параболическое уравнение

$$L_Bu \equiv u_t - B_xu = 0,$$