УСЛОВИЯ ВЫРАЖЕНИЯ КОРНЕЙ ПОЛИНОМА ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ В ВИДЕ СУММ ИЛИ ПРОИЗВЕДЕНИЙ КОРНЕЙ ПОЛИНОМОВ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Линкевич М.В., Соколова Я.П.,
студенты 2 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь
Научный руководитель – ***Чернявский М.М.,*** *преподаватель*

Ключевые слова. Полином, четвертая степень, аналитические условия, квадратный радикал, символьное решение, точные формулы.

Keywords. Polynomial, fourth degree, analytical conditions, square radical, symbolic solution, exact formulas.

Еще в XVI–XVII веках были открыты первые точные способы решения произвольного алгебраического уравнения четвертой степени (методы Феррари и Декарта). В общем случае корни уравнения четвертой степени выражаются через комбинацию квадратных и кубических радикалов от его коэффициентов. Стоит отметить, что последние версии современных систем компьютерной математики, а именно *Maple* 2022.1 и *Wolfram Mathematica* 13.1, не генерируют упомянутые конструкции из радикалов при использовании стандартной команды *solve ()*. Для этого необходимо «вручную» программировать какой-то из известных методов, что требует дополнительных временных затрат. С другой стороны, существует множество частных случаев, когда все корни полинома четвертой степени выражаются только через квадратные радикалы. В этом случае программирование решения уравнения или вычисление вручную существенно упрощается, однако здесь мы наталкиваемся на давно поставленный вопрос: как по коэффициентам полинома четвертой степени сказать, что его корни выражаются только через квадратные радикалы (или вообще не содержат радикалов)? В недавней статье Н.С. Астапова рассмотрено несколько таких простых случаев [1]. В статье [2] рассмотрен вопрос о представимости полинома четвертой степени в виде композиции полиномов второй степени, а в работе [3] приведен актуальный алгоритм для нахождения кратных корней полиномов в виде рациональных функций от коэффициентов.

Цель работы – получить условия, накладываемые на коэффициенты полинома четвертой степени, при выполнении которых его корни являются суммой или произведением корней полиномов второй степени.

Материал и методы. Материалом исследования являются алгебраические полиномы комплексного аргумента четвертой степени. Методы исследования – аналитические с применением системы компьютерной математики *Maple* 2022.1.

Результаты и их обсуждение. Сначала исследуем ситуацию, когда корни полинома комплексного аргумента четвертой степени

$$P_4(z) = z^4 + c_1 z^3 + c_2 z^2 + c_3 z + c_4 \tag{1}$$

представимы в виде сумм корней двух квадратных полиномов вида (2)

$$p(z) = z^2 + a_1 z + a_2, \quad q(z) = z^2 + b_1 z + b_2. \tag{2}$$

Теорема 1. *Для того чтобы корни полинома (1)* $z_k \ (k = 1,2,3,4)$ *являлись суммами корней* $p_{1,2}$ *и* $q_{1,2}$ *полиномов вида (2), то есть*

$$z_1 = p_1 + q_1, \quad z_2 = p_1 + q_2, \quad z_3 = p_2 + q_1, \quad z_4 = p_2 + q_2, \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$c_3 = -\frac{1}{8}c_1^3 + \frac{1}{2}c_1 c_2, \tag{4}$$

$$c_4 = -\frac{5}{256}c_1^4 + \frac{1}{16}c_1^2 c_2. \tag{5}$$

При этом

$$a_1 = -\frac{c_1}{2} - b_1, \quad a_2 = -\frac{1}{32}c_1^2 + \frac{1}{4}c_2 + \frac{1}{4}(b_1 - c_1)b_1, \quad b_2 = -\frac{3c_1^2}{32} + \frac{c_2}{4} + \frac{b_1^2}{4}, \tag{6}$$

параметр b_1 *остается свободным.*

Доказательство. Пусть выполнено условие (3), тогда

$$P_4(z) = (z - p_1 - q_1)(z - p_1 - q_2)(z - p_2 - q_1)(z - p_2 - q_2).$$

После раскрытия скобок и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях z последнего выражения и полинома (1), получаем систему уравнений:

$$c_1 = -2(p_1 + p_2 + q_1 + q_2); \quad c_2 = (p_1 + p_2)^2 + 3(p_1 + p_2)(q_1 + q_2) + (q_1 + q_2)^2 + 2p_1p_2 + 2q_1q_2;$$

$$c_3 = -(p_1 + p_2 + q_1 + q_2)\big((p_1 + p_2)(q_1 + q_2) + 2p_1p_2 + 2q_1q_2\big); \quad c_4 = (p_1p_2 + q_1q_2)^2 +$$

$$+(p_1 + p_2)(q_1 + q_2)(p_1p_2 + q_1q_2) + q_1q_2\big((p_1 + p_2)^2 - 2p_1p_2\big) + p_1p_2\big((q_1 + q_2)^2 - 2q_1q_2\big).$$

Подставляя соотношения Виета $p_1 + p_2 = -a_1, \quad p_1p_2 = a_2, \quad q_1 + q_2 = -b_1, \quad q_1q_2 = b_2$ в последние выражения, получим систему связей между коэффициентами полиномов четвертой и второй степеней. Проводя непосредственный анализ этой системы, быстро получаем условие (4) и выражения для a_1, a_2 (6). Определенная трудность возникает при выражении коэффициента b_2 (из квадратного уравнения), поскольку возникает квадратный радикал:

$$b_2 = \frac{b_1^2}{4} - \frac{3c_1^2}{32} + \frac{c_2}{4} \pm \frac{\sqrt{5c_1^4 - 16c_1^2c_2 + 256c_4}}{32}.$$

Если подставить в подкоренное выражение значения c_1, c_2, c_4, то получим $5c_1^4 - 16c_1^2c_2 + 256c_4 = 16\left(a_1^2 - b_1^2 - 4a_2 + 4b_2\right)^2$, то есть

$$b_2 = \frac{b_1^2}{4} - \frac{3c_1^2}{32} + \frac{c_2}{4} \pm \frac{\left|a_1^2 - b_1^2 - 4a_2 + 4b_2\right|}{8},$$

откуда следует выражение для b_2 (6). То есть оказалось, что $5c_1^4 - 16c_1^2c_2 + 256c_4 = 0$. Подставляя b_2 в последнее уравнение системы, получаем условие (5).

Аналогичным образом доказана теорема 2.

Теорема 2. *Для того чтобы корни полинома (1)* z_k $(k = 1,2,3,4)$ *являлись произведениями корней* $p_{1,2}$ *и* $q_{1,2}$ *некоторой пары полиномов вида (2), то есть*

$$z_1 = p_1q_1, \quad z_2 = p_1q_2, \quad z_3 = p_2q_1, \quad z_4 = p_2q_2, \tag{7}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение:

$$c_4 = c_3^2 / c_1^2. \tag{8}$$

При этом существует ровно 2 семейства полиномов вида (2), корни которых удовлетворяют условию (7). Коэффициенты a_1 *выражаются одинаково:* $a_1 = -c_1 / b_1$, *причем параметр* b_1 *остается свободным, но не равным нулю.*

Коэффициенты $a_{2,j}$ *и* $b_{2,j}$, *где* $j = 1,2$ *– номер семейства полиномов (2), вычисляются по формулам:*

$$a_{2,1} = \frac{c_3}{c_1b_{2,1}}, \quad b_{2,1} = \frac{b_1^2}{2c_1^3}(c_1c_2 + 2c_3 + s), \quad a_{2,2} = \frac{c_3}{c_1b_{2,2}}, \quad b_{2,2} = \frac{b_1^2}{2c_1^3}(c_1c_2 + 2c_3 - s),$$

$$s = \sqrt{c_1^2c_2^2 + 4c_3\left(c_1c_2 + c_3 - c_1^3\right)}. \tag{9}$$

Отметим, что выполнение условий теорем 1 и 2 является достаточным для выражения корней полинома четвертой степени через квадратные радикалы.

Рассмотрим конкретный числовой пример. Пусть

$$P_4(z) = z^4 - 2z^3 - 10z^2 + 6z + 9. \tag{10}$$

Условие (8) выполнено. Возьмем $b_1 = 2$, тогда $a_1 = -c_1 / b_1 = 1$. По формулам (9) вычислим остальные коэффициенты. Получим 2 пары полиномов вида (2):

$$p_1(z) = z^2 + z - 2 + \frac{\sqrt{19}}{2}, \quad q_1(z) = z^2 + 2z - 8 - 2\sqrt{19};$$

$$p_2(z) = z^2 + z - 2 - \frac{\sqrt{19}}{2}, \quad q_2(z) = z^2 + 2z - 8 + 2\sqrt{19}.$$

Находим корни представленных полиномов. Тогда корни исходного полинома (10) в соответствии с (7) будут иметь вид:

$$z_1 = \frac{\left(-1+\sqrt{9-2\sqrt{19}}\right)\left(-1+\sqrt{9+2\sqrt{19}}\right)}{2}, \quad z_2 = -\frac{\left(1+\sqrt{9-2\sqrt{19}}\right)\left(-1+\sqrt{9+2\sqrt{19}}\right)}{2},$$

$$z_3 = -\frac{\left(-1+\sqrt{9-2\sqrt{19}}\right)\left(1+\sqrt{9+2\sqrt{19}}\right)}{2}, \quad z_4 = \frac{\left(1+\sqrt{9-2\sqrt{19}}\right)\left(1+\sqrt{9+2\sqrt{19}}\right)}{2}.$$

Для применения теоремы 2 на практике достаточно построить любую пару полиномов $p_i(z)$ и $q_i(z)$. В данном примере мы построили 2 пары с целью показать справедливость формул теоремы 2. Стоит также отметить, что современные системы компьютерной математики *Maple* 2022.1 и *Wolfram Mathematica* 13.1 не генерируют корни полинома (10) стандартной командой *solve ()*.

Исследование выполнено в рамках проекта БРФФИ «Разработка новых методов нахождения корней алгебраических уравнений в символьном виде» (договор № Ф21М-118).

Заключение. Таким образом, с помощью системы компьютерной математики установлены явные аналитические зависимости между коэффициентами произвольного алгебраического полинома четвертой степени, наличие которых гарантирует существование двух полиномов второй степени, суммы или произведения корней которых являются корнями исходного полинома четвертой степени.

1. Астапов, Н.С. О решении в квадратных радикалах алгебраических уравнений малых степеней / Н.С. Астапов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2022. – Т. 14, № 10. – С. 5–16.

2. Трубников, Ю.В. Об условиях представимости полиномов четвертой и шестой степени в виде суперпозиции полиномов второй и третьей степени / Ю.В. Трубников, В.В. Юргелас // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2019. – № 1(102). – С. 17–24. – Режим доступа: https://rep.vsu.by/handle/123456789/18080. – Дата доступа 07.09.2022.

3. Чернявский, М.М. Модификация формул Эйткена и алгоритмы аналитического нахождения кратных корней полиномов / М.М. Чернявский, Ю.В. Трубников // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2021. – № 1(110). – С. 13–25. – Режим доступа:https://rep.vsu.by/handle/123456789/26638. – Дата доступа: 07.09.2022.

ПРОГРАММА ДЛЯ АНАЛИЗА МИКРОСКОПИЧЕСКИХ ОПТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ДОМЕННОЙ СТРУКТУРЫ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛОВ

Петраковская А.В., Неверовский Г.А.,
студенты 4 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь
Научный руководитель – ***Кашевич И.Ф.,*** *канд. физ.-мат. наук, доцент*

При исследовании структуры и свойств материалов применяются различные методы исследования: микроскопические, спектральные, рентгеновские.

Идентификация и количественный анализ полученных данных является трудоемким и сложным процессом. Компьютерная обработка экспериментальных данных на несколько порядков ускоряет обработку материала и даже позволяет создавать такие методы анализа, которые в ручной обработке не могут быть реализованы. Однако в полной мере преимущества использования вычислительной техники могут быть использованы, если исследователи имеют необходимый уровень подготовки в области материаловедения. В этом плане наиболее востребованы программы с понятным интерфейсом и имеющие функции подсказок для неподготовленного пользователя.