

НОВОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕРВНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Климович Т.А.,

*магистрант 1 года обучения УО «БНТУ», г. Минск, Республика Беларусь
Научный руководитель – Князев М.А., доктор физ.-мат. наук, профессор*

Ключевые слова. Теория Ходжкина-Хаксли, нервный импульс, солитон, кинк, прямой метод Хироты.

Keywords. Hodgkin-Huxley theory, nerve pulse, soliton, kink, Hirota direct method.

Теория Ходжкина-Хаксли для описания распространения нервных импульсов до недавнего времени широко использовалась на практике [1]. Эта теория использует предположение о равновесии ионных градиентов через нервную мембрану, благодаря наличию особых проводящих ионы белков. В свою очередь такое поведение градиентов приводит к быстрому изменению электрического напряжения. Теория основывается на использовании диссипативных процессов и поэтому является неадиабатической. Актуальной в настоящее время является задача поиска состояний системы, описывающих распространение нервного импульса, отличных от тех, которые дает теория Ходжкина-Хаксли.

В последнее время Хеймбургом и Джексоном предложена альтернативная теория распространения нервных импульсов [2]. Новая теория основывается на описании распространения локальной плотности нервного импульса (описываемого солитоном) в мембране аксона (нервного тела). Особенностью этой теории является использование опытных данных фазовых переходов в жидкостях при температурах ниже физиологических температур тела. В отличие от теории Ходжкина-Хаксли новой теории удастся объяснить наличие обратимой температуры и изменения тепла при наличии нервного импульса. Информация о поведении при тепловых изменениях позволяет объяснить и такой широко известный факт как возбуждение нервного импульса при неожиданном охлаждении нерва. Новая теория допускает возможность существования решений, отличных от тех, которые имеют место в теории Ходжкина-Хаксли. Целью настоящей работы является поиск таких решений.

Материал и методы. Основное уравнение движения теории Хеймбурга и Джексона описывает распространение звука вдоль выбранного направления при отсутствии дисперсии. Это уравнение имеет вид [3]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(B(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad (1)$$

где u – безразмерная величина, описывающая разность между поперечной плотностью массы мембраны и ее эмпирическим равновесным значением, отнесенную к этому равновесному значению;

$$B(u) = 1 + B_1 u + B_2 u^2$$

Для численных расчетов использовались значения постоянных $B_1 = -16.6$ и $B_2 = 79.5$, полученные при экспериментальных исследованиях распространения нервных импульсов вдоль оси симметрии в биологических мембранах цилиндрической формы. Уравнение (1) представляет собой обобщение уравнения Буссинеска, о котором известно, что оно обладает решениями солитонного типа [4]. Решение уравнения (1) в виде солитона известно. Его можно записать в следующей форме

$$u(x - \beta t) = \frac{2a_+ a_-}{(a_+ + a_-) + (a_+ - a_-) \cosh\left((x - \beta t) \sqrt{1 - \beta^2}\right)} \quad (2)$$

где $a_{\pm} = -\frac{B_1}{B_2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{\beta^2 - \beta_0^2}{1 - \beta_0^2}} \right)$, β – скорость распространения солитона, $\beta_0 = \sqrt{1 - \frac{B_1^2}{6B_2}}$.

Однако нелинейное уравнение (1) допускает и другое решение. Это так называемое решение типа кинка. Чтобы построить такое решение, мы использовали прямой метод Хироты решения нелинейных уравнений в частных производных [5], который был определенным образом модифицирован [6]. Получившееся в результате решение можно записать следующим образом

$$u(x, t) = \frac{\sigma k}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{kx - \omega t + \eta_0}{2} \right) \right], \quad (3)$$

где $\sigma = \sqrt{\frac{6}{B_2}}$, $k = -\frac{B_1}{\sqrt{6B_2}}$, а параметр ω определяется из дисперсионного соотношения

$\omega^2 = k^2 - k^4$. Параметр η_0 описывает начальное положение кинка и без потери общности может быть принят равным нулю.

От обычного кинка это решение отличается наличием постоянной составляющей. Кроме того, в соответствии с общепринятым подходом, наряду с решением типа кинка, можно записать и решение типа антикинка. Последнее будет отличаться от кинка направлением распространения [7].

Результаты и обсуждение. Решение (2) описывает обычный режим распространения нервного импульса форме солитона. Такая форма импульса считается общепонятной. Первоначально система в некоторой точке находится в каком-то определенном состоянии. Затем в этой точке происходит возбуждение системы вследствие прихода в точку уединенной волны типа солитона. Затем, после того, как солитон прошел эту точку, система возвращается в исходное состояние.

Решение (3) описывает новый тип распространяющегося нервного импульса в соответствии с профилем кинка (а фактически, гиперболического тангенса, сдвинутого относительно оси ординат на постоянное значение). До прихода нервного импульса система находится в том же состоянии, что и в случае решения (2). Для нового решения после прохождения импульса система не возвращается в исходное начальное состояние, а остается достаточно долгое время в новом состоянии, которое было вызвано этим импульсом. Ясно, что это состояние не будет продолжаться бесконечно долго, а должно перейти в исходное. Однако сам переход может занять время, намного большее, чем характерное время распространения импульса.

Заключение. Известно, что теория Хеймбурга и Джексона позволяет описать ряд вопросов, которые представляли трудности для теории Ходжкина-Хаксли. Вместе с тем, новая теория открывает и новые закономерности поведения системы при распространении нервных импульсов, что, в свою очередь, открывает новые возможности при создании лекарственных средств для лечения ряда заболеваний психофизического характера.

1. Hodgkin, A.L. Quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve / A.L. Hodgkin, A.F. Huxley // J. Physiol. – 1952. – Vol. 117. – P. 500-544.
2. Heimburg, T. On soliton propagation in biomembranes and nerves / T. Heimburg, A.D. Jackson // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 2005. – Vol. 102. – P. 9790-9795.
3. Lautrup, B. The stability of solitons in biomembranes and nerves / B. Lautrup, A.D. Jackson, T. Heimburg // The European Physical Journal E. – 2011. – Vol. 34, № 6. – P. 1-9.
4. Уизем, Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – М.: Мир, 1977. – 624 с.
5. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – М.: Мир, 1987. – 479 с.
6. Князев, М.А. Кинки в скалярной модели с затуханием / М.А. Князев. – Минск: Тэхналогія, 2003. – 115 с.
7. Раджараман, Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля / Р. Раджараман. – М.: Мир, 1985. – 416 с.