ДЕКОМПОЗИЦИЯ ПОЛИНОМОВ ВОСЬМОЙ СТЕПЕНИ НА ПОЛИНОМЫ ВТОРОЙ И ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНЕЙ

Грицкевич Н.С., Китаров Д.А.,
студенты 3 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь
Научный руководитель – ***Чернявский М.М.,*** *преподаватель*

Ключевые слова. Декомпозиция полиномов, восьмая степень, аналитические условия, разрешимость в радикалах, символьное решение, точные формулы.

Keywords. Decomposition of polynomials, eighth degree, analytical conditions, solvability in radicals, symbolic solution, exact formulas.

Несмотря на многовековую историю исследования различных аспектов теории алгебраических уравнений, в этой области существует ряд нерешенных задач, например, связанных с точным символьным решением алгебраических уравнений высоких степеней, допускающих решение в радикалах. Давно известна классическая задача определения типа такого уравнения непосредственно по виду его коэффициентов без привлечения дополнительной информации о корнях. В математической литературе и справочниках, как правило, не встречаются точные условия связи между коэффициентами уравнения заданной степени (пятой и выше), при выполнении которых можно однозначно отнести уравнение к определенному классу. Основной трудностью является существенно высокая трудоемкость и громоздкость вычислений. С помощью применения современных систем компьютерной алгебры данная трудность становится преодолимой.

Настоящий доклад посвящен вопросам декомпозиции полиномов комплексного аргумента восьмой степени.

Цель работы – для полиномов восьмой степени, являющихся композицией полиномов второй и четвертой степеней, получить точные формулы связи между коэффициентами исходного полинома и полиномов композиции.

Материал и методы. Материалом исследования являются алгебраические полиномы комплексного аргумента восьмой степени, являющиеся композицией полиномов меньших степеней. Методы исследования – методы алгебры с использованием системы компьютерной математики *Maple* 2022.1.

Результаты и их обсуждение. Рассмотрим возможность выражения полинома комплексного аргумента восьмой степени

$$P_8(z) = z^8 + a_1 z^7 + a_2 z^6 + a_3 z^5 + a_4 z^4 + a_5 z^3 + a_6 z^2 + a_7 z + a_8 \qquad (1)$$

в виде композиции квадратичного полинома от полинома четвертой степени

$$P_8(z) = f_2\left(f_1(z)\right), \qquad (2)$$

где $f_2(z) = z^2 + b_1 z + b_2$, $\quad f_1(z) = z^4 + c_1 z^3 + c_2 z^2 + c_3 z + c_4$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для того, чтобы полином восьмой степени (1) являлся композицией полиномов вида (2), необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия связей между его коэффициентами:*

$$a_5 = -\frac{7}{128}a_1^5 + \frac{5}{16}a_1^3 a_2 - \frac{3}{8}a_1^2 a_3 - \frac{3}{8}a_1 a_2^2 + \frac{1}{2}a_1 a_4 + \frac{1}{2}a_2 a_3; \qquad (3)$$

$$a_6 = \frac{7}{512}a_1^6 - \frac{15}{128}a_1^4 a_2 + \frac{1}{8}a_1^3 a_3 + \frac{9}{32}a_1^2 a_2^2 - \frac{1}{8}a_1^2 a_4 - \frac{1}{2}a_1 a_2 a_3 - \frac{1}{8}a_2^3 + \frac{1}{2}a_2 a_4 + \frac{1}{4}a_3^2; \qquad (4)$$

$$a_7 = -\frac{1}{1024}\left(a_1^3 - 4a_1 a_2 + 8a_3\right)\left(5a_1^4 - 24a_1^2 a_2 + 32a_1 a_3 + 16a_2^2 - 64a_4\right). \qquad (5)$$

При этом

$$c_1 = \frac{a_1}{2}; \quad c_2 = \frac{1}{8}\left(4a_2 - a_1^2\right); \quad c_3 = \frac{1}{16}a_1^3 - \frac{1}{4}a_1 a_2 + \frac{1}{2}a_3; \qquad (6)$$

$$c_4 = -\frac{5}{128}a_1^4 + \frac{3}{16}a_1^2 a_2 - \frac{1}{4}a_1 a_3 - \frac{1}{8}a_2^2 + \frac{1}{2}a_4 - \frac{1}{2}b_1; \tag{7}$$

$$b_2 = -\frac{25}{16384}a_1^8 + \frac{15}{1024}a_1^6 a_2 - \frac{5}{256}a_1^5 a_3 - \frac{23}{512}a_1^4 a_2^2 + \frac{5}{128}a_1^4 a_4 + \frac{3}{32}a_1^3 a_2 a_3 - \frac{3}{16}a_1^2 a_2 a_4 +$$
$$+\frac{3}{64}a_1^2 a_2^3 - \frac{1}{16}a_1^2 a_3^2 - \frac{1}{16}a_1 a_2^2 a_3 + \frac{1}{4}a_1 a_3 a_4 + \frac{1}{8}a_2^2 a_4 - \frac{1}{64}a_2^4 - \frac{1}{4}a_4^2 + a_8 + \frac{1}{4}b_1^2; \tag{8}$$

параметр b_1 *остается свободным.*

Наиболее короткое доказательство следует из тождества

$$f_2\left(f_1(z)\right) \equiv P_8(z),$$

если в левую часть подставить выражения (6)–(8), а в правую часть – правые части равенств (3)–(5).

Рассмотрим конкретный числовой пример, иллюстрирующий данную ситуацию. Пусть

$$P_8(z) = z^8 - 4z^7 - 24z^6 + 92z^5 + 159z^4 - 574z^3 - 166z^2 + 630z + 150.$$

Условия (3)–(5) выполнены, что означает наличие композиции вида (2). Для простоты полагаем $b_1 = 0$ и по формулам (6)–(8) находим коэффициенты полиномов меньших степеней:

$$b_2 = -625/4; \quad c_1 = -2; \quad c_2 = -14; \quad c_3 = 18; \quad c_4 = 35/2.$$

По аналогии с терминологией, используемой в статье [1], назовем корнями второго уровня корни уравнения $f_2(q) = 0$, то есть уравнения

$$q^2 - 625/4 = 0. \tag{9}$$

Решением уравнения (9) являются числа $q_1 = 25/2$ и $q_2 = -25/2$. Тогда корнями первого уровня, то есть корнями исходного полинома будут все возможные решения уравнений $z^4 + c_1 z^3 + c_2 z^2 + c_3 z + c_4 = q_1$; $z^4 + c_1 z^3 + c_2 z^2 + c_3 z + c_4 = q_2$.

В нашем случае это

$$z^4 - 2z^3 - 14z^2 + 18z + 35/2 = 25/2; \quad z^4 - 2z^3 - 14z^2 + 18z + 35/2 = -25/2.$$

Решением первого уравнения являются числа $z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{6}$, $z_{3,4} = 2 \pm \sqrt{5}$. Корни второго уравнения не генерируются (командой *solve*) в радикалах в системах компьютерной математики *Maple* 2022.1 и *Wolfram Mathematica* 13.1. Для их явного выражения необходимо «вручную» запрограммировать любой классический метод решения алгебраического уравнения четвертой степени [2]. Ниже приведен их приближенный вид:

$$z_5 \approx -1{,}0277386; \quad z_6 \approx -3{,}2066358; \quad z_7 \approx 2{,}3337563; \quad z_8 \approx 3{,}9006180.$$

Рассмотрим задачу о возможности представить полином (1) в виде композиции полинома четвертой степени от квадратичного:

$$P_8(z) = f_2\left(f_1(z)\right), \tag{10}$$

где $f_1(z) = z^2 + b_1 z + b_2$, $f_2(z) = z^4 + c_1 z^3 + c_2 z^2 + c_3 z + c_4$.

Доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Для того, чтобы полином восьмой степени (1) являлся композицией полиномов вида (10), необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия связей между его коэффициентами:*

$$a_3 = -\frac{a_1}{32}\left(7a_1^2 - 24a_2\right); \tag{11}$$

$$a_5 = \frac{a_1}{256}\left(7a_1^4 - 20a_1^2 a_2 + 128a_4\right); \tag{12}$$

$$a_7 = -\frac{a_1}{16384}\left(17a_1^6 - 48a_1^4 a_2 + 256a_1^2 a_4 - 4096a_6\right). \tag{13}$$

При этом

$$b_1 = \frac{a_1}{4}; \quad b_2 = \frac{1}{32}\left(8a_2 - 3a_1^2\right) - \frac{c_1}{4}; \quad c_2 = \frac{7}{512}a_1^4 + \frac{3}{32}a_2 a_1^2 - \frac{3}{8}a_2^2 + a_4 + \frac{3}{8}c_1^2;$$

$$c_3 = \frac{7}{4096}a_1^6 - \frac{1}{256}a_1^4 a_2 - \frac{3}{64}a_1^2 a_2^2 + \frac{1}{8}a_1^2 a_4 - \frac{1}{2}a_2 a_4 + \frac{1}{8}a_2^3 + a_6 +$$
$$+\left(\frac{1}{2}a_4 + \frac{7}{1024}a_1^4 + \frac{3}{64}a_1^2 a_2 - \frac{3}{16}a_2^2\right)c_1 + \frac{1}{16}c_1^3;$$

$$c_4 = -\frac{39}{1048576}a_1^8 - \frac{5}{32768}a_1^6 a_2 + \frac{1}{8192}a_1^4 a_2^2 + \frac{3}{1024}a_1^4 a_4 - \frac{1}{32}a_1^2 a_2 a_4 + \frac{3}{512}a_1^2 a_2^3 +$$
$$+\frac{3}{32}a_1^2 a_6 - \frac{3}{256}a_2^4 + \frac{1}{16}a_2^2 a_4 - \frac{1}{4}a_2 a_6 + a_8 +$$
$$+\left(\frac{7}{16384}a_1^6 - \frac{1}{1024}a_1^4 a_2 - \frac{3}{256}a_1^2 a_2^2 + \frac{1}{32}a_1^2 a_4 - \frac{1}{8}a_2 a_4 + \frac{1}{32}a_2^3 + \frac{1}{4}a_6\right)c_1 +$$
$$+\left(\frac{7}{8192}a_1^4 + \frac{3}{512}a_1^2 a_2 - \frac{3}{128}a_2^2 + \frac{1}{16}a_4\right)c_1^2 + \frac{1}{256}c_1^4;$$

параметр c_1 *остается свободным.*

Для упрощения расчетов удобно выбирать $c_1 = 0$.

Исследование осуществлено в рамках договора БРФФИ № Ф21М-118 на выполнение НИР «Разработка новых методов нахождения корней алгебраических уравнений в символьном виде».

Заключение. В работе рассмотрены два случая декомпозиции алгебраического полинома восьмой степени на полиномы второй и четвертой степеней. В явном виде сформулированы необходимые и достаточные условия наличия исследуемых композиций, а также получены формулы вычисления коэффициентов полиномов, из которых образована композиция.

1. Трубников, Ю.В. Об условиях представимости полиномов четвертой и шестой степени в виде суперпозиции полиномов второй и третьей степени / Ю.В. Трубников, В.В. Юргелас // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2019. – № 1(102). – С. 17–24. Режим доступа: https://rep.vsu.by/handle/123456789/18080. – Дата доступа: 07.09.2022.
2. Астапов, И.С. Решение алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней с помощью компьютерной алгебры / И.С. Астапов, Н.С. Астапов // Программная инженерия. – 2014. – № 10. – С. 33–42.

ПРИМЕНЕНИЕ ПАТТЕРНОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ДЛЯ СОЗДАНИЯ TEST AUTOMATION FRAMEWORK (TAF)

Грицкевич Н.С.,
студент 3 курса ВГУ имени П.М. Машерова, г. Витебск, Республика Беларусь
Научный руководитель – ***Новый В.В.,*** *ст. преподаватель*

Ключевые слова. Тестирование, фрэймворк для автоматизации тестирования, паттерны проектирования для TAF.

Keywords. Testing, test automation framework, design patterns of TAF.

В настоящее время IT-технологии участвуют во многих процессах жизнедеятельности человека. Примером могут служить социальные сети, сайты для заказа еды, оплата коммунальных услуг и т. д. Но кто же проверяет, правильно ли работают эти все системы? Кто же выявляет дефекты в приложениях? Как быстро они могут это сделать? Этими нюансами занимаются Quality Assurance engeniers. Automation QA разрабатывает TAF для выявления дефектов на протяжении жизненного цикла приложения. В данной статье мы не будем рассматривать основы построения фреймворка, но рассмотрим, как можно,